

ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS A SURFACE LIBRE AU-DESSUS D'UN FOND NON UNIFORME

Cleriffi F.

Ingenieur en Génie civil, Université Mouloud MAMMERI de Tiaret-Ouzou.

Bouzelha K.

Ingenieur en Génie Civil, Université Mouloud MAMMERI de Tiaret-Ouzou.

Boudouf M.

Professeur à l'Université des Sciences et Technologie Houari Boumediene, Alger.

RÉSUMÉ

L'analyse de l'écoulement, à surface libre, au-dessus d'un fond non uniforme, nécessite des calculs analytiques très laborieux, notamment pour des formes quelconques d'obstacles.

La recherche d'une solution adéquate nous a menés à la mise au point d'un procédé purement numérique, faisant l'objet du présent article.

À travers une étude expérimentale, menée au laboratoire, nous avons confirmé la validité de l'algorithme élaboré.

Mots-Clés

Théorie des ondes - programmation - onde de surface - résistance de vague - mode expérimental.

1. INTRODUCTION

La détermination de la forme de surface libre et des paramètres hydrauliques d'un écoulement, à travers un canal ou un cours d'eau, occupe une place prépondérante dans d'éminents projets hydrauliques. Leur calcul est toutefois une tâche laborieuse en raison de l'implicite et de la complexité des équations à résoudre. La difficulté principale à laquelle se heurte l'ingénieur hydraulicien est le manque, voire l'absence des éléments numériques lui permettant l'obtention rapide de conclusions quantitatives aussi précises que possible.

Au vu de ces données, nous proposons une étude purement numérique d'un écoulement à surface libre, perturbé par la présence d'un obstacle quelconque au fond d'un canal hydraulique. Cette perturbation donne naissance, en régime fluvial, à un système d'ondes stationnaires, appelées 'ondes de surface'.

En considérant des obstacles de faible épaisseur, on montrera que le calcul numérique des caractéristiques de ces ondes devient possible en se servant du concept dit 'de viscosité artificielle'.

Nous présenterons l'étude de l'écoulement du point de vue des difficultés qu'il présente à la résolution numérique, en insistant sur les particularités propres au problème en question.

Enfin, nous exposons quelques résultats d'une étude expérimentale effectuée sur un canal hydraulique.

2. PROBLÉMATIQUE

L'étude est menée, en théorie linéaire, en considérant un écoulement bidimensionnel d'un fluide parfait et incompressible. Un obstacle d'épaisseur maximale b et de longueur λ , interceptant les particules liquides, rend le fond du canal non uniforme. En amont, l'écoulement est uniforme de vitesse u_0 . En aval, la surface libre est le siège d'oscillations. Le plan est rapporté à un système d'axes xoy (figure 1).

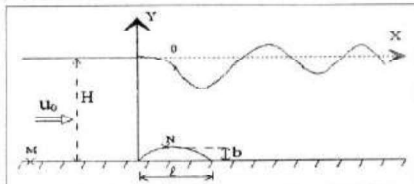


Figure 1: Schéma de l'écoulement.

Pour une géométrie donnée du profil, et en l'absence de tension superficielle sur la surface libre, on déterminera la position de ces ondes, les caractéristiques de l'écoulement aval ainsi que la force hydrodynamique exercée sur le corps solide.

3. TRAITEMENT NUMÉRIQUE

Conformément à la nature des conditions aux limites, le problème est formulé en terme de potentiel de vitesses Φ . Celui-ci, étant une fonction des coordonnées des points de l'espace occupé par le liquide, s'écrit en fonction du potentiel de perturbation ϕ selon la relation

$$\Phi = u_0 x + \phi.$$

3.1/ PROBLÈMES SPÉCIAUX

La surface libre étant une ligne de courant, les composantes normales des vitesses des particules liquides sont nulles.

$$\Phi_n = 0 \quad (1)$$

En outre, cette frontière impose une condition d'égalité des pressions qui s'écrit, par application de l'équation de Bernoulli à la surface, comme suit :

$$\frac{u^2}{2} + gy = \frac{u_0^2}{2} \quad (2)$$

U est la vitesse d'une particule liquide en aval du profil, g représente l'accélération de pesanteur.

Le fait qu'on ait deux conditions, dont l'une est de plus non linéaire (relation 2), en tout point de la surface libre, qui a priori est une inconnue du problème, présente des difficultés particulières.

Le domaine liquide est théoriquement infini suivant la direction longitudinale. La troncature de celui-ci et le choix des conditions adéquates à imposer sur ces frontières doivent être étudiés avec soin pour que le problème soit bien posé.

On peut alors entrevoir les difficultés inhérentes à la modélisation numérique de l'écoulement. Nous présenterons ainsi les principales étapes de résolution.

3.2. PROCÉDÉ DE RÉSOLUTION

La mise en équations du phénomène d'ondes aboutit à la résolution de l'équation de Laplace (3), pour le potentiel de perturbation Φ , tenant compte de la condition de surface libre (4).

$$\Delta \Phi = 0 \quad (3)$$

$$K_0 \Phi_y(x, 0) + \Phi_{xx}(x, 0) = 0 \quad \text{où } K_0 = \frac{g}{u_0^2} \quad (4)$$

Le problème n'étant pas unique, nous faisons appel au concept mathématique dit 'de viscosité artificielle' [1]. On introduit alors une perturbation singulière ε en amont de l'obstacle. Ceci fait apparaître, dans l'équation (4), un terme supplémentaire où intervient la viscosité artificielle ε .

$$K_0 \Phi_y + \Phi_{xx} + \varepsilon \Phi_{xxx} = 0 ; K_0 = \frac{g}{u_0^2}, \quad \varepsilon = \frac{\tilde{\varepsilon}}{u_0} \quad (4)\text{bis}$$

Cette dernière assure l'unicité du problème et la stabilité des calculs. Le schéma physique de l'écoulement, représenté sur la figure 1, est substitué par un domaine de calcul rectangulaire. On construit ainsi une grille dont chaque noeud est repéré par deux indices (i,j) (figure 2).

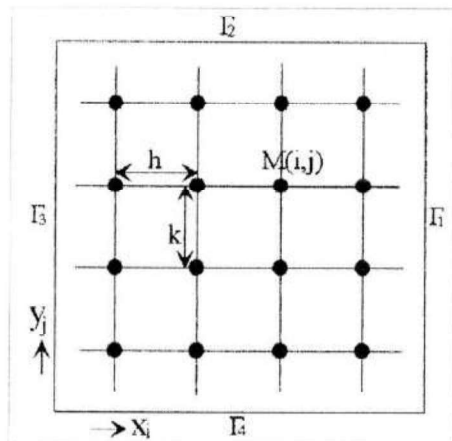


Figure 2: Grille de discrétisation.

Les pas h et k de discrétisation suivant x et y sont maintenus constants. L'indice i augmente de l'amont vers l'aval, tandis que j décroît du fond du canal vers le plan moyen de la surface libre. Une telle numérotation nous conduit, après discrétisation en différences finies, à la résolution d'un système algébrique linéaire à matrice A tridiagonale par blocs.

$$A X = D \quad (5)$$

Après résolution du système (5), par la méthode frontale, compte tenu de la nouvelle condition (4) bis, nous obtenons le profil de surface libre et les valeurs du potentiel de perturbation en chaque noeud du domaine liquide. Ces dernières définissent le mouvement ondulatoire pour chaque configuration de l'écoulement.

Le programme de calcul est rendu optimal du point de vue encombrement-mémoire par l'utilisation de fichiers intermédiaires et en optimisant le choix des pas de discrétisation suivant les deux directions ($h \leq 0.25$ $k \leq 0.20$) (figure 3). Le temps de calcul pour un maillage de 2250 noeuds est de 10 secondes sur un IBM 486 DX2 66.

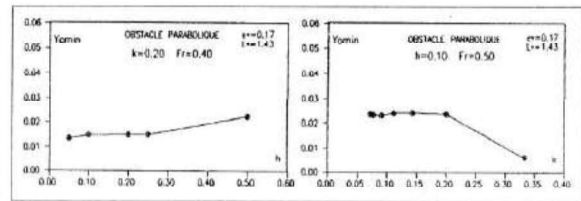


Figure 3 : Effet des pas de discrétisation suivant l'horizontale et la verticale.

4. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Nous présenterons, dans ce qui suit, quelques résultats numériques, obtenus dans l'hypothèse de petites perturbations.

4.1 PROFILS DE SURFACE LIBRE

La surface libre (figure 4) se définit par les premières composantes des vecteurs solution du système (5). Les résultats sont présentés pour un nombre de Froude Fr , rapport de la vitesse moyenne de l'écoulement à la vitesse critique $\sqrt{gH}$, égal à 0.45. Les perturbations sont localisées uniquement en aval du profil, au-dessus duquel survient une dépression maximale du plan d'eau.

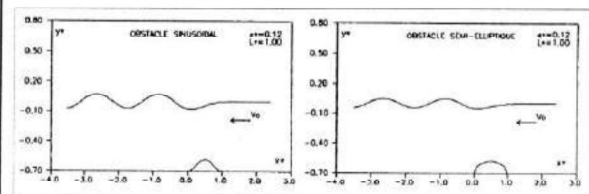


Figure 4 : Profils de surface libre pour deux formes d'obstacle.

La viscosité artificielle est un paramètre positif destiné à tendre vers zéro. Des valeurs suffisamment faibles ($\varepsilon < 0.05$) de celle-ci nous fournissent des résultats aberrants (figure 5), d'où la nécessité d'un choix optimal de ce paramètre.

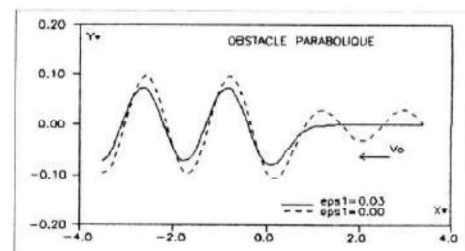


Figure 5 : effet de la viscosité artificielle amont sur le profil de surface libre ($Fr = 0.45$)

4.2. RÉSISTANCES DE VAGUES

La force hydrodynamique, exercée par le liquide sur le corps solide, a fait l'objet de diverses approches [1-4-5-6]. La prévision de la résistance de vagues 'Rw', composante horizontale de cette force, est réalisée analytiquement à partir des équations du mouvement du liquide. Celles-ci, étant souvent difficiles à intégrer, rendent la résolution du problème pas aisée. On mesure alors l'intérêt de pouvoir estimer numériquement la valeur de R_w . Cette dernière s'obtient par intégration des pressions, selon la relation (7), le long du profil de longueur L , décrit par la normale $\vec{n}$ et l'abscisse curviligne s .

$$R_w = \int_0^L P \cdot n_x \, ds \quad (7)$$

Par application de l'équation de Bernoulli à la surface libre, on détermine la pression P (relation 8) à partir de la dérivée première du potentiel de vitesse Φ_x , la vitesse de l'écoulement amont u_0 et la masse volumique ρ du liquide.

$$P = \rho V_0 \Phi_x \quad (8)$$

Ces résistances, tracées pour différentes formes d'obstacles, sont des fonctions croissantes du nombre de Froude (figure 6).

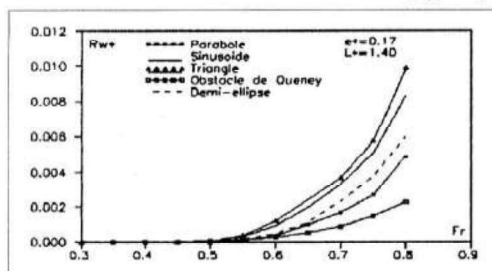


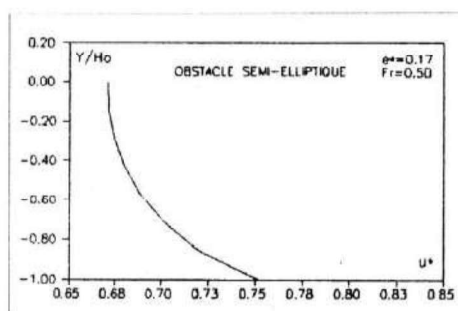
Figure 6 : Evolution de la résistance de vagues en fonction du nombre de Froude

4.3. CALCUL DES VITESSES

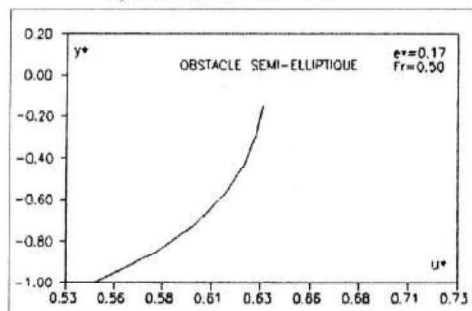
Le champ de vitesses de l'écoulement est irrotationnel. Cette condition est suffisante pour que les vitesses $\vec{V}$ des particules liquides puissent s'écrire comme le gradient du potentiel Φ .

$$\vec{V} = \text{grad}\Phi.$$

La répartition des vitesses longitudinales à travers une section transversale de l'écoulement est représentée, sur la figure 7, au niveau d'une crête et d'un creux.



a) Au niveau de la deuxième crête.



b) Au niveau du deuxième creux.

Figure 7 : Profil des vitesses horizontales pour un obstacle semi-elliptique

5. ETUDE EXPERIMENTALE

5.1. DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Après avoir effectué l'étude numérique, en théorie linéaire, des écoulements à surface libre, au-dessus d'un fond non-uniforme, nous avons procédé à la vérification des résultats obtenus, en les comparant à ceux issus d'une étude expérimentale. Les essais sont effectués dans un canal rectangulaire uniforme de 10 mètres de longueur et d'une largeur de 30 cm.

Le canal dispose, à son extrémité amont, d'une vanne d'alimentation pour le réglage du débit, suivie d'un système de nid d'abeilles pour la tranquillisation de l'écoulement. A son extrémité aval, est disposée une porte mobile pour le réglage du plan d'eau amont et un déversoir triangulaire à mince paroi permettant la mesure du débit.

Les vitesses horizontales sont mesurées au moyen du tube de Pitot. Un limnimètre à pointe, composé d'une règle graduée et une tige ascendante se terminant par une pointe fixe, permet la mesure d'un niveau d'eau dans le canal.

5.2. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

A débit constant, les différents profils de surface libre sont obtenus en faisant varier la hauteur d'eau amont au moyen de la porte mobile, terminant le canal. En augmentant le nombre de Froude, trois types de profils sont obtenus :

- une dépression locale au-dessus de l'obstacle, suivie d'une surface libre très peu perturbée;
- une dépression suivie d'une onde stationnaire aval, oscillant légèrement en dessous du niveau amont non perturbé [7]. C'est le cas traité numériquement (figure 4);
- un mouvement de retour au niveau des crêtes du système d'ondes qui se transforme rapidement en ressaut turbulent.

En augmentant la hauteur maximale et/ou la longueur de l'obstacle, la dépression apparaît rapidement pour de faibles nombres de Froude (tableau I). Celle-ci passe rapidement au ressaut ondulé et, par la suite, au ressaut turbulent.

	b=5cm, λ=10cm	b=7cm, λ=20cm	b=1cm, λ=10cm
Dépression locale, suivie d'une surface peu perturbée	Fr=0.21	Fr=0.19	Fr=0.20
Ressaut ondulé apparent	Fr=0.23	Fr=0.21	Fr=0.22
Ressaut turbulent	Fr=0.32	Fr=0.30	Fr=0.29

Tableau I : Régime d'écoulement en fonction du nombre de Froude, pour un triangle de différentes dimensions.

Nous présentons, sur les tableaux (2-3), les vitesses horizontales, rapportées à la vitesse moyenne u_0 de l'écoulement amont, suivant deux sections transversales de l'écoulement. A la surface libre aval, le fluide est accéléré au niveau des creux (tableau II), et ralenti au droit des crêtes (tableau III), ce qui est en accord avec les résultats numériques déjà obtenus (figure 7).

y(cm)	-0.50	-0.20	-4.30	-6.00	-7.75	-9.00	-11.00	-12.00	-12.20	-13.50
y/H	-0.036	-0.143	-0.307	-0.428	-0.553	-0.643	-0.786	-0.857	-0.871	-0.964
Δh(cm)	4.0	3.6	2.7	2.2	1.7	1.6	1.3	1.05	1.0	0.9
u(m/s)	0.615	0.591	0.520	0.500	0.470	0.400	0.350	0.302	0.295	0.292
u/u ₀	2.171	2.064	1.793	1.616	1.423	1.377	1.242	1.117	1.083	1.030

Tableau 2 : Variation de la composante horizontale de la vitesse au niveau d'un creux

y(cm)	-1.0	-2.5	-5.5	-6.5	-7.5	-8.5	-11.5	-12.20	-13.5
y/H	-0.071	-0.178	-0.393	-0.464	-0.536	-0.607	-0.821	-0.871	-0.964
ΔH (cm)	0.8	1.1	1.6	1.8	1.9	2.2	3.0	3.4	3.6
u(m/s)	0.274	0.322	0.387	0.411	0.422	0.455	0.531	0.565	0.580
u/u_0	0.975	1.146	1.377	1.462	1.502	1.620	1.889	2.010	2.064

Tableau 3 : Variation de la composante horizontale de la vitesse au niveau d'une crête.

En amont de l'obstacle, les vitesses sont enregistrées à environ 1 mètre. On note une accélération de l'écoulement au voisinage de la surface libre, due à la convergence de la veine liquide se trouvant à l'arrivée du corps. Sous l'effet de la viscosité, les vitesses deviennent faibles au voisinage du fond (tableau IV).

y(cm)	-0.50	-3.50	-4.00	-6.00	-7.5	-9.00	-10.50	-12.65	-13.50
y/H	-0.036	-0.250	-0.286	-0.428	-0.536	-0.643	-0.750	-0.903	-0.964
ΔH (cm)	2.5	2.2	2.1	1.9	1.5	1.1	0.6	0.2	0.1
u(m/s)	0.482	0.453	0.452	0.426	0.380	0.325	0.225	0.111	0.096
u/u_0	1.715	1.612	1.597	1.516	1.352	1.156	0.800	0.395	0.340

Tableau 4 : Variation des vitesses horizontales en amont de l'obstacle.

Au droit de l'obstacle, la veine liquide est rétrécie. On enregistre ainsi des vitesses plus importantes (tableau V).

y(cm)	-0.5	-1.8	-2.5	-3.5	-4.0	-5.0	-6.5
y/H	-0.036	-0.128	-0.178	-0.250	-0.285	-0.357	-0.464
ΔH (cm)	4.1	3.8	3.3	3.0	2.6	2.1	1.5
u(m/s)	0.620	0.600	0.556	0.530	0.494	0.442	0.375
u/u_0	2.206	2.135	1.978	1.886	1.744	1.573	1.334

Tableau 5 : Variation des composantes horizontales des vitesses au sommet de l'obstacle.

6. CONCLUSION

Le procédé numérique exposé définit, outre la position de la surface libre, les caractéristiques d'un écoulement, à surface libre, en aval d'un obstacle quelconque, pour différentes conditions amont.

Le programme de calcul permet la résolution simple et rapide du problème, lorsque l'intégration des équations du mouvement du liquide devient onéreuse.

La précision des résultats est, en effet, satisfaisante pour des valeurs de la viscosité rigoureusement choisies et s'améliore en raffinant le maillage.

Une étude expérimentale a permis de valider qualitativement notre modèle numérique.

7. BIBLIOGRAPHIE

[1] Euvrard D., "Sur la possibilité d'une résolution numérique directe du problème de Neumann Kelvin, par introduction d'une perturbation singulière", C.R.A.S. de PARIS, 262, A, 385 (1976).

[2] Zitoun T., "Contribution à l'étude analytique, en théorie linéaire, des ondes de surface dans un canal hydraulique", Thèse de 3^e cycle en Mécanique des fluides, U. S. T. H. B., (1992).

[3] Bouhade M., "Contribution à l'étude des ondes de surface dans un canal. Application à l'écoulement au-dessus d'un obstacle immergé", Thèse de Doctorat-ès-Sciences Physiques, Poitiers (1988).

[4] Bai K. J., "A localized finite element method for steady two-dimensional free surface flow problems", [Une méthode d'éléments finis localisés pour l'étude des problèmes d'écoulement bidimensionnel à surface libre], First Internat. Conf. on Numer. Ship Hydrodyn. Gaithersburg, Maryland, 209 (1975).

[5] Marcouyoux S., "Calcul, selon une méthode d'éléments finis localisés, de la résistance de vagues d'un profil immergé dans un écoulement à surface libre, dans l'approximation de Neumann-Kelvin", Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1977).

[6] Forbes L. K., "On the wave resistance of a submerged semi-elliptical body", [Sur la résistance d'un corps semi-elliptique noyé], J. of Engineer. Math. Vol. 15, p. 287-298, (1981).

[7] Benjamin T. B., "Upstream influence", [Influence amont], J. Fluid Mech. 48, part 1, 49 (1970).

[8] Cherifi F., Bouhade M., "Modélisation numérique, en théorie linéaire, des ondes de surface", 2^eme Séminaire National sur l'Hydraulique, Vol.2, p. 1-7, Biskra (1996).

[9] Bouzelha K., Zitoun T., Bouhade M., "Modélisation analytique, en théorie linéaire, des ondes de surface dans un écoulement au-dessus d'un obstacle noyé", 2^eme Séminaire National sur l'Hydraulique, Vol. 2, p. 1-10, Biskra (1996).