CONTRIBUTION A LA MODELISATION DES EFFETS DES IMPERFECTIONS DES COQUES CYLINDRIQUES SOUS PRESSION EXTERNE

Par
M. ARAAR
Chercheur, Institut de Génie Civil, Université de Annaba
N. DEBANNEH
Chercheur, Faculté de Génie Civil, Université de Tichrine, Syrie

Résumé

Deux approches sont proposées pour la prise en compte de deux imperfections particulièrement influentes sur le flambage des coques cylindriques sous pression externe. Les deux défauts considérés concernent la géométrie et les conditions de contour de la coque. Ces approches sont basées sur des données expérimentales et des analyses numériques menées au moyen du code INCA du système CASTEM du CEA.

Comparées à d'autres modèles, les approches présentées ont donné de bons résultats, suggérant la possibilité de leur généralisation.

Mots clés : coque cylindrique - flambement - imperfection - géométrie - conditions aux limites - code de calcul INCA.

1 INTRODUCTION

La coque cylindrique sans ou avec raidisseurs est souvent choisie dans la conception des structures de nombreux composants industriels : éléments de construction nucléaire, de plates-formes pétrolières, tunnels, sous-marins, conduites, etc.

Le dimensionnement de cette coque est basé essentiellement sur sa résistance au phénomène de flambage, qui peut causer la ruine de celle-ci bien avant que la limite de capacité de son matériau ne soit atteinte.

Pour une meilleure maîtrise de ce phénomène, des efforts sont mis en jeu pour la prise en compte dans les calculs numériques des divers paramètres influents, modélisation possible à partir d'une compréhension physique du phénomène tirée d'expériences de bon niveau. La qualité d'une telle modélisation est l'une des caractéristiques des logiciels de calculs numériques, qui sont devenus les meilleurs outils des bureaux d'études et des centres de recherche (système CASTEM du CEA, BOSOR, etc).

L'état de connaissances sur le flambage des coques cylindriques soumises à la pression externe, ([1], [2], [3], [4]...), montre une influence distincte des imperfections géométriques, de mode proche ou égal au mode critique, ainsi que de l'imparfaite réalisation des conditions aux limites.

L'approche suivante vise la modélisation de tels paramètres en s'appuyant sur des données expérimentales et des analyses numériques au moyen du code INCA du système CASTEM (du Commissariat à l'Energie-Atomique (CEA)), en utilisant pour la discretisation des éléments "COQUE" et "COMU" dont les avantages sont multiples [5].

2 COMPORTEMENT DES COQUES CYLINDRIQUES PARFAITES SOUS PRESSION EXTERNE

Sous les effets de la pression externe, la coque cylindrique parfaite atteint sa ruine par flambage. Elle flambe souvent en une demi-onde axialement et n ondes suivant la circonférence.

Pour une coque simplement appuyée, de rayon R, épaisseur h et longueur L, la pression et le mode critiques peuvent être obtenus à partir des formules de

Von-Mises, où la valeur du mode n sera celle donnant la plus faible pression critique exprimée par :

Pression latérale

$$P_{cr} = \frac{1}{12}\,\frac{(h/R)^2}{(1-\nu^2)}\left[n^2 - 1 + \frac{\lambda^2(2n^2-1-\nu)}{n^2+\lambda^2}\right] + \frac{\lambda^4}{(n^2-1)(n^2+\lambda^2)^2} \qquad (1)$$

Pression hydrostatique

$$P_{cr} = \frac{E(h/R)}{n^2 + (\lambda^2/2) - 1}\left\{\frac{(h/R)^2}{12\,(1-\nu^2)}\left[(n^2+\nu^2)^2 - 2n^2 + 1\right] + \frac{\lambda^4}{(n^2+\lambda^2)^2}\right\} \qquad (2)$$

$\lambda = \pi R/L$; E module d'Young ; ν coefficient de Poisson.

Dans le cas de d'autres types de conditions aux limites, n et P_{cr} peuvent être déduits des formules de Yamaki [4], données ci-dessous et bassées sur les équations de Donnell.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 . D}{R . L^2} K_P \quad (3) \qquad n = \frac{\pi . R}{L} K_n \quad (4)$$

$$K_P = \lambda_P Z^{1/2} \; ; \; K_n = \lambda_n Z^{1/4}$$

$$Z = \frac{L^2}{Rh}\sqrt{(1-\nu^2)} \; ; \; D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Pour $\nu = 0.3$, ces expressions deviennent :

$$P_{cr} = 0.883\lambda_p (L/R)^{-1}(R/h)^{-5/2} \qquad (5)$$

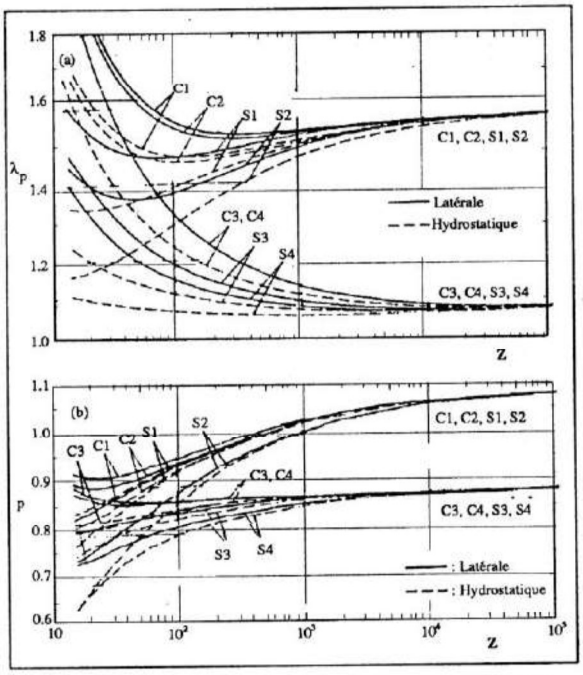
$$n = 3.12\lambda_n (L/R)^{-1/2}(R/h)^{1/4} \qquad (6)$$

Les paramètres λ_p et λ_n sont donnés sur la figure 1.

3 IMPERFECTIONS GEOMETRIQUES

Par ces imperfections on désigne les différences existant entre la géométrie réelle et la géométrie théorique prise pour le calcul. Ces imperfections peuvent prendre naissance dans les différentes phases d'exécution et d'exploitation des ouvrages. L'effet de ces imperfections se manifeste plus ou moins clairement selon le type de chargement et les conditions de liaison. Une étude de ce problème a été abordée par Koiter [6], [7]. Des modèles exprimant l'influence de quelques imperfections géométriques, pour diverses conditions aux limites, sont donnés dans les références [4], [6], [8], [9].

Les études expérimentales et théoriques, qu'on a menées à l'INSA de Lyon, ont porté entre autres sur :



	W	W,x	W,xx	U	V	Nx	Nxy
S1	0		0	0	0		
S2	0		0	0			0
S3	0		0		0	0	
S4	0		0			0	0
C1	0	0		0	0		
C2	0	0		0			0
C3	0	0			0	0	
C4	0	0				0	0

U, V, W : champ de déplacements

Nx, Nxy : efforts axial et circonférentiel

S : Appui simple

C : Encastrement

(W, x = dW/dx)

Figure 1 : Paramètres de pression et mode critiques pour différents types de conditions aux limites.

- L'évolution de la géométrie et des défauts des coques cylindriques en pression externe montrant que la géométrie précritique de celles-ci prend une allure modale plus distincte au voisinage de l'état critique, générée par les défauts en creux de mode proche du mode critique (Figure 2).
- Le caractère non linéaire du comportement de ces coques.

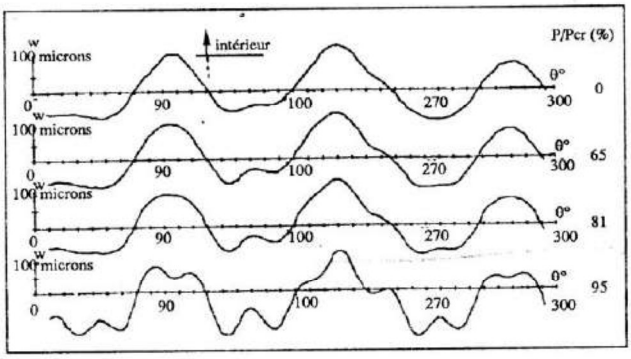


Figure 2 : Développement de la géométrie précritique sous pression externe, à mi-hauteur, d'une coque cylindrique quasi-parfaite.

Ceci nous a orienté à mener une analyse de la déformation sur la peau aux sommets des ondes de plusieurs déformées modales, relevées de nombreux essais de flambage. Elle montre que cette déformation est non linéaire et s'approche de la limite de linéarité du matériau juste avant l'instabilité. Ceci suggère l'atteinte de la plastification locale aux points considérés et peut permettre la formulation d'un critère local d'instabilité, sur la base des contraintes de flexion, permettant la prise en compte de ces imperfections dans le dimensionnement des coques en question.

En simplifiant, si l'on considère que les imperfections géométriques initiales se développent suivant une allure modale, il peut être fait l'hypothèse d'une géométrie initiale de la forme suivante (Figure 3).

$$w = w_o \cos n(\theta - \theta_s) \qquad (7)$$

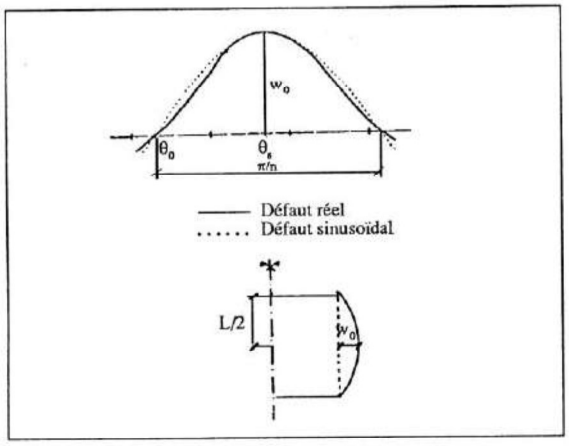


Figure 3 : Forme simplifiée du défaut.

De même, par simplification, afin d'utiliser le même type d'évolution sous chargement, si on considère qu'axialement la déformée est une demi-onde de forme cosinusoïdale, on peut exprimer les contraintes initiales maximales de flexion, suivant la circonférence.

Elles s'écrivent :

$$\sigma^o_{\theta f} = \frac{E\,h\,w_o}{1-\nu^2}\left[\frac{\nu\,\pi^2}{L^2} + \frac{(n^2-1)}{2R^2}\right] \qquad (8)$$

Au cours du chargement en pression, les contraintes circonférentielles de membrane varient linéairement. Par contre, l'amplification des défauts initiaux, de variation non linéaire avec la pression, conduit à des contraintes de flexion qui varient en conséquence de façon non linéaire.

Une analyse de nombreux résultats de tests sur des coques cylindriques minces en Nickel électro-déposé a permis le lissage avec le critère de moindre carré d'une expression en contraintes maximales de flexion, donnant le rapport entre la pression critique de la coque imparfaite et celle de la coque sans défauts (pression d'Euler), connaissant l'amplitude de l'imperfection et son mode, ou à défaut le mode critique, ainsi que les caractéristiques de la coque. Cette expression s'écrit :

$$\frac{P}{P_e}(\%) = -98\left(\frac{\sigma^o_{\theta f}}{\sigma_{\theta f}}\right)^{3/2} + 72.5\,n^{0.1} \qquad (9)$$

En introduisant la contrainte de membrane $\sigma_{\theta m} = PR/h$, la contrainte de flexion $\sigma_{\theta f}$ se met sous la forme :

$$\sigma_{\theta f} = \frac{\sigma^o_{\theta f}}{\left[\frac{1}{98}\left(-100\,\sigma_{\theta m}\frac{h}{P_e R} + 72.5\,n^{0.1}\right)\right]^{2/3}} \qquad (10)$$

L'expression (9) a été comparée avec un calcul non linéaire (élément COMU), pour deux principaux types de conditions aux limites définies ci-après (III), et pour un défaut modal (Figure 4) d'amplitude 1/10 de l'épaisseur, correspondant aux cas expérimentaux retenus pour la comparaison. Une bonne approximation de la charge critique de la coque imparfaite est obtenue, comme le montre le tableau 1, tout en restant conservative. Dans ce tableau, P_e indique la pression critique d'Euler. Ce tableau montre aussi un écart par rapport à l'expérience dont une part est à imputer aux effets des imperfections de conditions aux limites discutés ci-après.

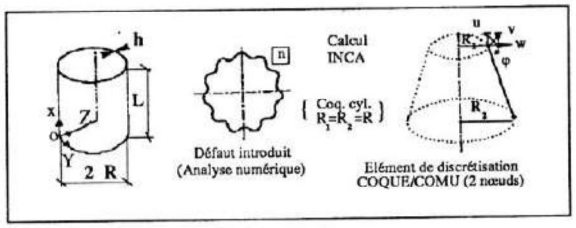


Figure 4

La représentation graphique de l'expression 10 comparativement aux tracés issus du calcul (Figure 5) traduit bien la qualité de cette expression. Elle montre une évolution remarquable des contraintes de flexion tendant vers la limite de linéarité du matériau pour une pression proche de la pression critique. Les contraintes issues du calcul numérique restent inféricures à cette limite.

Signalons enfin qu'une étude approfondie de l'influence de ce type d'imperfections sur le flambage des coques cylindriques sous pression externe, a permis d'élaborer une géométrie de coque à haute résistance qui a été nommée "ASTER" ([10], [11]) et qui a été brevetée.

4 IMPERFECTIONS DE CONDITIONS AUX LIMITES

La littérature ([3], [4], etc...) considère 8 types de conditions aux limites symétriques couvrant la majorité

	R (mm)	L (mm)	h (mm)	E (daN/mm²)	σ_L (daN/mm²)	C.L	P exp/Pe (%)	n	P cr/Pe(%) COMU	Pcr/Pe(%) Formule
						C1	85	12	95	92
A	75	120	150	16 280	12.2	C3	116	10	93	91
B	75	150	175	19 000	14	C1	97	11	94	91
C	75	150	173	14 663	12.8	C1	80	11	95	91
						C3	112	9	93	90

Tableau 1 : Comparaison du modèle avec un calcul non linéaire (COMU) sur des cas traités expérimentalement.

des cas pratiques. La réalisation pratique de ces conditions est généralement imparfaite et la réponse de la coque peut être différente de celle prévue dans le modèle de calcul.

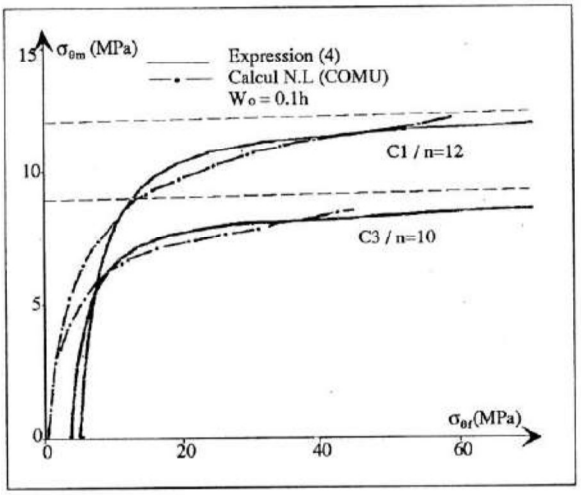


Figure 5 : Evolution des contraintes circonférentielles de flexion aux sommets des ondes à mi-hauteur.

En s'inspirant des données théoriques et en essayant de retrouver par le calcul numérique les charges critiques expérimentales pour les trois types de liaisons ci-après, une analyse condensée de nombreuses configurations au moyen du code INCA, avec considération de l'interaction entre les conditions statiques et de flambage, a mis en évidence une influence prédominante du déplacement axial des extrémités suivant le mode critique. L'empêchement d'un tel déplacement augmente de façon significative la pression critique.

Dans ce qui suit, on propose une méthode permettant de tenir compte de la rigidité axiale des liaisons dans la détermination de la pression critique.

Le principe de cette méthode consiste à remplacer la résistance au déplacement axial modal, offerte par les liaisons, par un appui élastique de raideur K (K = 0 pour un déplacement libre, condition désignée par C3, et K = ∞ pour un déplacement bloqué, condition désignée par C1 (Figure 7).

Cette raideur s'obtient de l'analyse des déformations de la coque sur ces liaisons pendant le flambage (Figure 8).

Considérons les deux cas A et C (*), l'effort axial N_x à transmettre aux supports ne sera repris que par les frottements entre la coque et l'élément de liaison. Dans le cas où ces frottements sont insuffisants pour équilibrer un tel effort, la partie de la coque de hauteur a, restant axisymétrique, tandis que la coque évolue suivant une configuration modale, doit assurer l'équilibre.

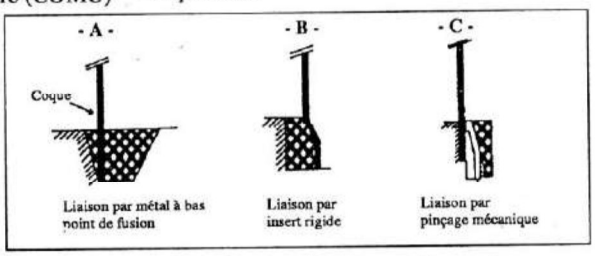


Figure 6 : Conditions aux limites expérimentales de comparaison.

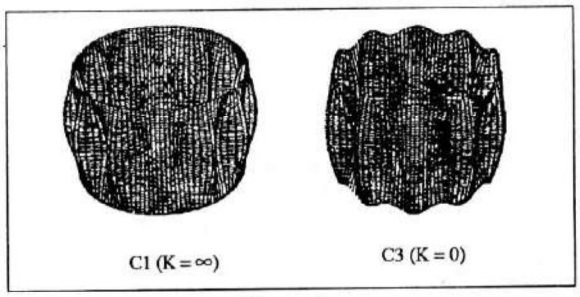


Figure 7

Dans l'hypothèse où les frottements sont négligeables, les liaisons peuvent être remplacées par un anneau de rayon R, hauteur a et épaisseur h, sollicité par l'effort N_x. Le comportement en flexion de cet anneau peut se traduire par une raideur.

Faisons l'hypothèse que le champ des déplacements au voisinage des bords peut s'exprimer par :

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}(x)\ \cos n\theta \\ v &= \bar{v}(x)\ \sin n\theta \\ w &= \bar{w}(x)\ \cos n\theta \end{aligned} \qquad (11)$$

n : mode critique

De la théorie des coques [8], et en faisant l'hypothèse que les efforts $N_{\theta x}$ soient négligeables, hypothèse valable pour un paramètre de Batdorf Z>500, l'effort N_x s'écrit :

$$N_x = C\left[u, x + \frac{\nu}{R}\left(v, \theta + \frac{W}{P}\right)\right] \qquad (12)$$

En introduisant (11) dans (12) on aura :

$$N_x = N_x \cos n\theta \qquad (13)$$

(*) Le cas B se traite de la même façon en considérant la rigidité de l'insert.

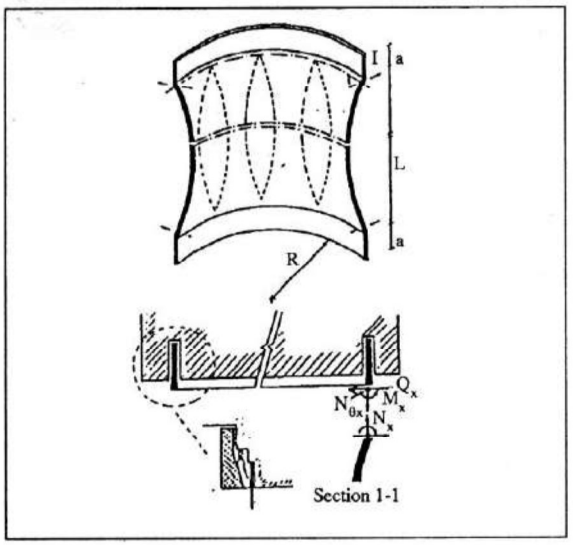


Figure 8

L'anneau circulaire en équilibre sous ce chargement périodique peut être traité comme une poutre de hauteur a, de longueur $2\pi R$, ayant une flèche u périodique (N_x = Ku). La rigidité K peut être déterminée en se basant sur la théorie des poutres élastiques. En se référant à [12], cette raideur est donnée par :

$$K = EI\left(\frac{n}{R}\right)^4 \Big/ \left[1 + \frac{2\alpha\,(1+\nu)I}{A_s}\left(\frac{n}{R}\right)^2\right] \qquad (14)$$

Avec :

$I = ha^3/12$, $A_s = ha$.
$\alpha = 1.1$: section rectangulaire (effet de cisaillement).

A partir de cette méthodologie, deux calculs (linéaire et non linéaire) ont été faits, en introduisant la raideur K pour chaque type de liaison. Une imperfection géométrique modale d'amplitude 0.1h est introduite.

Le Tableau 2 regroupe les résultats de ces calculs et montre qu'ils sont en bonne corrélation avec les résultats expérimentaux.

Cette méthodologie peut être généralisée à différents cas pratiques.

	Expérience P_{exp}/P_e (%)	Calcul linéaire "COQUE" App. Elast. P_{ek}/P_e (%)	Calcul linéaire "COMU" App. Elast. P_{ek}/P_e (%)
A	85	84	83
B	97	98	-
C	80	78	77

Tableau 2 : Prise en compte de la raideur des liaisons.

5 CONCLUSION

L'analyse des déformations des coques cylindriques avec défauts géométriques, peut conduire à la formulation d'un critère local en contraintes s'associant au critère global d'instabilité, qui permet la prise en compte de ces défauts.

Le mode de flambage sous pression de ces coques génère des contraintes axiales importantes au niveau des liaisons qui, à cause de la rigidité imparfaite de celles-ci, influencent l'état critique. Les conditions aux limites pratiques peuvent être modélisées approximativement par des raideurs élastiques ❶

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Budianski, G.C Amazigo : "*Initial postbuckling behavior of cylindrical shells under external pressure*". J. Math. Phys., 1968, Vol. 47, pp. 223-235.

[2] P. Montague : "*Experimental behavior of thin-walled cylindrical shells subjected to external pressure*". J. of Mech. Eng. Sci., 1969, Vol. 11, n°1, pp.40-56.

[3] L.H Sobel : "*Effects of boundary conditions on the stability of cylinders subject to lateral pressure*". J. AIAA, 1964, Vol. 2, pp.1437-1440.

[04] N. Yamaki : "*Elastic stability of circular cylindrical shells*". Amsterdam, : 1984, 558 p.

[5] A. Combescure : "*Static and dynamic buckling of large thin shells*". Nuclear Engineering and Design, Vol. 92, 1986, pp. 339-354.

[6] J.W Hutchinson, W.T Koiter : "*Postbuckling theory*". App. Mech. Rev., Vol. 23, 1970, pp. 1353-1366.

[7] W.T Koiter : "*A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells*". Proc. of the IUTAM Symposium, Delft, April 1960, pp. 12-33.

[8] J. W Hutchinson, J.C Fravethal : "*Elastic postbuckling behavior of stiffened and barreled cylindrical shells*". Trans. ASME, J. App. Mech., Vol. E-36, 1969, pp. 784-790.

[9] M. Potier-Ferry : "*Influence des défauts sur le flambage des coques*". Rapport Interne, Labo. Phys. Méc. des Matériaux, Inst. Sup. de Génie mécanique et productique, Metz (France), 1986, 47 p.

[10] M. Araar : "*Contribution à l'autoraidissage des coques cylindriques vis-à-vis du flambage*". Thèse de Doctorat, INSA de Lyon, Mars 1990, 320 p.

[11] J.F Jullien, M. Araar : "*Coque à haute résistance à symétrie de révolution*". Brevet n°90-04277, INSA de Lyon, Mars 1990.

[12] N. Debannch : "*Flambage des coques de révolution à méridienne brisée sous pression latérale externe - Influence des conditions aux limites*". Thèse de Doctorat, INSA de Lyon, Juillet 1988, 268 p.