INTERACTION STATIQUE SOL STRUCTURE ANALYSE MATRICIELLE DES STRUCTURES REPOSANT SUR UNE FONDATION ELASTIQUE

B. TILIOUINE
Professeur, Ecole Nationale Polytechnique
M.S GOUAL
Maître Assistant, ENSET (*) de Laghouat

Résumé

Une analyse automatique du comportement des structures hyperstatiques, compte tenu des déformations élastiques du support (sol élastique ou appuis élastiques), par la méthode matricielle des raideurs est présentée.

Une méthode d'analyse globale d'intéraction statique sol-structure a été utilisée en optant pour le modèle de Winkler continu comme modèle de comportement du sol de fondation.

Aux fins d'illustrer la validité et la versatilité de la méthode automatique employée, des applications numériques sont employées et confrontées aux méthodes analytiques de Hetenyi [1] et Simvoulidi [2].

Mots clés : déformations élastiques • appuis élastiques • méthode des raideurs • interaction sol-structure • modèle de Winkler.

1 INTRODUCTION

L'hypothèse couramment utilisée dans le calcul des structures selon laquelle les supports de structures hyperstatiques sont rigidement liés au sol de fondation, conduit à des conclusions qui s'écartent de la réalité, du fait que le sol se déforme (se tasse) et cette déformation peut engendrer des efforts dans la superstructure qui sont totalement différents de ceux trouvés par l'hypothèse mentionnée ci-dessus, ce qui peut influer d'une manière directe sur la résistance de la structure (sous dimensionnement des éléments), ou sur l'économie du projet (surdimensionnement des éléments).

Dans l'hypothèse des petites déformations (hypothèse acceptable dans l'état statique), nous pouvons supposer le comportement du sol comme étant élastique linéaire, en conséquence, le modèle de Winkler continu peut représenter d'une manière aussi proche que réelle le comportement élastique du sol de fondation par rapport au modèle discret.

Le présent article propose une méthode matricielle simple et pratique permettant le calcul des structures planes compte tenu des déformations élastiques du sol de fondation, basée sur la méthode des rigidités.

Une matrice de rigidité exacte a été élaborée en utilisant un modèle de Winkler continu [8] dont l'avantage par rapport au modèle discret réside dans le choix d'un nombre réduit d'éléments pour aboutir au résultat exact, ce même résultat n'est obtenu que par un nombre infini d'éléments discrétisés.

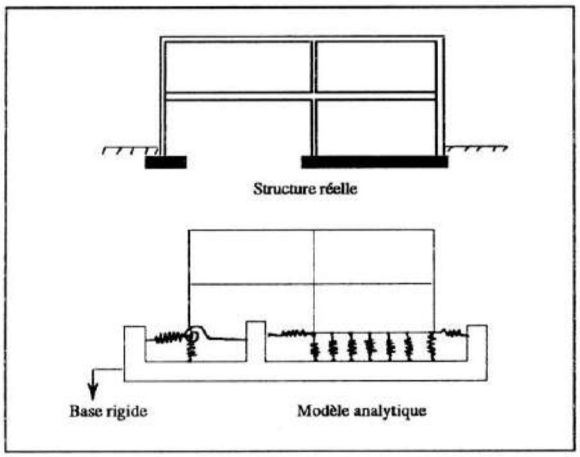
En général il suffit de choisir les nœuds aux points de variation d'inertie ou de chargement ou d'orientation des éléments, alors que pour le modèle de Winkler discret la précision des résultats dépend du nombre de nœuds à choisir.

Les applications de la méthode sont multiples et concernent une gamme étendue de systèmes de constructions tels que les poutres continues sur sol élastique, les longrines, les semelles continues, elles peuvent également être étendues au calcul des radiers par leurs discrétisation en réseaux de poutres croisées sur sol élastique, etc....

(*) Ecole Nationale Supérieure de l'Enseignement Technique

2 MODELE DE COMPORTEMENT DU SOL

La manière la plus simple de prendre le sol en compte est de le représenter par des ressorts reliant un ou plusieurs nœuds à une base rigide [3]. Dans le cas d'un modèle plan, une semelle isolée est représentée par deux ressorts, l'un agissant en translation et l'autre en rotation. Sous un radier ou une semelle filante, le sol est modélisé par une infinité de ressorts agissant seulement en translation verticale car l'effet de rotation et de translation horizontale peut être négligé devant le tassement vertical.



3 CARACTERISTIQUES MECANIQUES DU MODELE EQUIVALENT [4]

Direction	Raideur
Verticale	$\frac{2\,ER}{(1-\nu^2)}$
Horizontale	$\frac{16\,(1-\nu)ER}{(7-8\nu)(1+\nu)}$
Rotation	$\frac{4\,ER^3}{3\,(1-\nu^2)}$

E : Modèle d'Young du sol de fondation,
ν : Coefficient de poisson du sol de fondation,
R : Rayon du disque rigide équivalent à la section de la fondation.

Pour le cas d'un modèle à ressorts continus, la raideur du système est exprimée par mètre linéaire de l'élément de poutre ; elle représente le module de fondation noté K défini comme étant la réaction du sol par unité de longueur par unité de tassement ([K] = N/m^2).

Pour une largeur de poutre égale à 1m, le coefficient K est égale au coefficient de compression uniforme k (K = k b).

Les classes des valeurs de k, pour les différents groupes de sol sont données comme suit [5] :

Sol mou : $k < 30$ N/cm^3
Sol moyen : $30 < k < 50$ N/cm^3
Sol dur : $50 < k < 100$ N/cm^3
Sol rocheux : $k > 100$ N/cm^3

4 FORMULATION DU PROBLEME [6]

Les étapes principales de résolution du problème sont décrites en détail ci-après. Elles consistent en :

- ✔ Introduction des données géométriques et mécaniques de la structure et du sol de fondation.
- ✔ Formation de la matrice de rigidité d'un élément de poutre sur sol élastique directement dans le système d'axe global.
- ✔ Assemblage des matrices de rigidités globales.
- ✔ Détermination du vecteur chargement extérieur.
- ✔ Résolution du système d'équation linéaire.
- ✔ Evaluation des réactions.
- ✔ Détermination des éléments de réduction dans le repère local.

L'équilibre statique d'un élément de poutre sur sol élastique nous conduit aux équations différentielles suivantes :

La réaction du sol est donnée par :

$$r(x) = -K\,y(x) \qquad (1)$$

soit

$$\frac{dT}{dx} = -q(x) + Ky(x) \qquad (2)$$

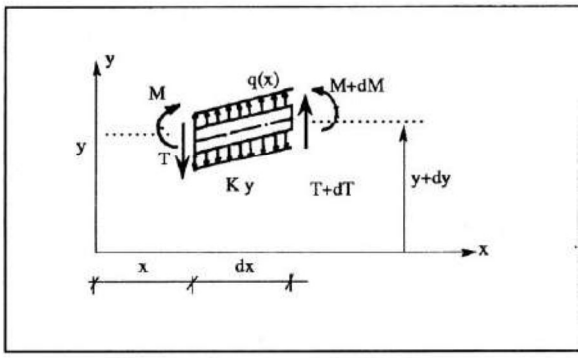
$$\frac{dM}{dx} = -T(x) \qquad (3)$$

et l'équation de la ligne élastique est donnée par :

$$M(x) = EI\,\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (4)$$

soit

$$T(x) = -EI\,\frac{d^3y}{dx^3} \qquad (5)$$



d'où l'équation différentielle de la ligne élastique :

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} + K\,y = q(x) \qquad (6)$$

La solution de l'équation (6) sans second membre est :

$$y_H(x) = C_1\cos\lambda x\ \cosh\lambda x + C_2\cos\lambda x\ \sinh\lambda x + C_3\sin\lambda x\ \cosh\lambda x + C_4\sin\lambda x\ \sinh\lambda x \qquad (7)$$

avec

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}}$$

La solution générale de l'équation (6) est la somme de la solution (7) et d'une solution particulière dépendant du second membre.

$$y(x) = y_H + y_P$$

Pour le cas d'une charge uniformément répartie, $y_P(x) = \frac{q}{K}$

Soit :

$$y(x) = y_H + \frac{q}{K} \qquad (8)$$

Pour le cas d'une charge concentrée, nous pouvons utiliser l'opérateur de Dirac pour représenter la fonction q(x) équivalente à la charge concentrée F ; dans ce cas :

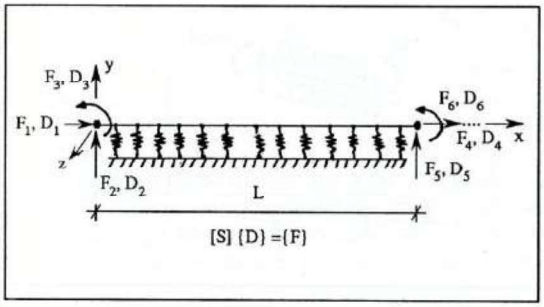
$$q(x) = F\,\delta(x-a) \qquad (9)$$

avec

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \infty \text{ si } x = a \\ 0 \text{ si } x > a \end{cases} \qquad (10)$$

Remarque : Afin d'éviter ces calculs mathématiques, nous choisissons le point d'application de la charge concentrée comme point nodale et la charge sera considérée directement comme charge nodale.

la matrice de rigidité d'un élément de portique reposant sur un sol élastique sera obtenu en utilisant les équations données ci-dessus et les conditions aux extrémités des nœuds.



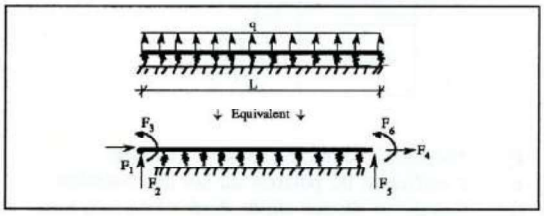
$$[S_L^E] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & A_1\frac{12EI}{L^3} & A_2\frac{6EI}{L^2} & 0 & -A_3\frac{12EI}{L^3} & A_4\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & A_2\frac{6EI}{L^2} & A_5\frac{4EI}{L} & 0 & -A_4\frac{6EI}{L^2} & A_6\frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -A_3\frac{12EI}{L^3} & -A_4\frac{6EI}{L^2} & 0 & A_1\frac{12EI}{L^3} & A_2\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & A_4\frac{6EI}{L^2} & A_6\frac{2EI}{L} & 0 & -A_2\frac{6EI}{L^2} & A_5\frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{matrix} \qquad (11)$$

A_i (i = 1, 6) sont les coefficients d'influences de l'interaction sol-structure.

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\phi^3}{3}\,\frac{\sinh\phi\cosh\phi + \sin\phi\cos\phi}{\sinh^2\phi - \sin^2\phi} \\ A_2 &= \frac{\phi^2}{3}\,\frac{\sinh^2\phi + \sin^2\phi}{\sinh^2\phi - \sin^2\phi} \\ A_3 &= \frac{\phi^3}{3}\,\frac{\sin\phi\cosh\phi + \cos\phi\sinh\phi}{\sinh^2\phi - \sin^2\phi} \\ A_4 &= \frac{2\phi^2}{3}\,\frac{\sin\phi\sinh\phi}{\sinh^2\phi - \sin^2\phi} \\ A_5 &= \frac{\phi}{2}\,\frac{\sinh\phi\cosh\phi - \sin\phi\cos\phi}{\sinh^2\phi - \sin^2\phi} \\ A_6 &= \phi\,\frac{\sin\phi\cosh\phi - \cos\phi\sinh\phi}{\sinh^2\phi - \sin^2\phi} \end{aligned} \qquad (12)$$

avec $\phi = \lambda L$

Les forces nodales équivalentes pour le cas d'une charge uniformément répartie sont les suivantes :



$$F_1 = F_4 = 0$$

$$F_2 = A_7\frac{qL}{2}\ ;\ F_3 = A_8\frac{qL^2}{12}\ ;$$

$$F_5 = A_7\frac{qL}{2}\ ;\ F_6 = -A_8\frac{qL^2}{12}$$

$$\begin{aligned} A_7 &= \frac{2}{\phi}\,\frac{(\cosh\phi - \cos\phi)(\sinh\phi - \sin\phi)}{\sinh^2\phi - \sin^2\phi} \\ A_8 &= \frac{6}{\phi^2}\,\frac{(\sinh\phi - \sin\phi)^2}{\sinh^2\phi - \sin^2\phi} \end{aligned} \qquad (13)$$

On en déduit directement l'expression analytique de la matrice de rigidité élémentaire dans le repère global $[S_G^E]$, à l'aide de la matrice de transformation $[R_T]$, dont la transposée est égale à sa matrice inverse $[R_T]^{-1}$

$$\left[S_G^E\right] = \left[R_T\right]^{-1}\left[S_L^E\right]\left[R_T\right] \qquad (14)$$

Le processus d'assemblage consiste à combiner systématiquement les matrices élémentaires obtenues par (14) et les affecter aux positions correspondantes dans la matrice de rigidité globale $[S]_G$, ensuite la réarranger de la manière suivante :

$$[S]_G = \begin{bmatrix} [S] & [S_{DR}] \\ [S_{RD}] & [S_{RR}] \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Nœuds libres} \\ \text{Nœuds bloqués} \end{matrix} \qquad (15)$$

Le système d'équation linéaire est le suivant :

$$\begin{bmatrix} [S] & [S_{DR}] \\ [S_{RD}] & [S_{RR}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{A_D\} \\ -\{ARL\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{AR\} \end{Bmatrix} \qquad (16)$$

Le vecteur déplacement est obtenu en résolvant le système :

$$[S]\{D\} = \{A_D\} \qquad (17)$$

Le vecteur réaction est donné par :

$$\{A_R\} = [S_{RD}]\{D\} + \{ARL\} \qquad (18)$$

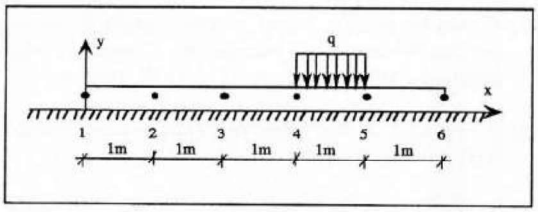
Les actions aux extrémités des éléments où les efforts internes sont déterminés par la superposition des deux états d'équilibre : un état d'équilibre sous chargement sans déformation, et un état d'équilibre correspondant à des déformations sans chargement.

$$\left\{A_M\right\}_i = \left\{A_{ML}\right\}_i + \left[S_L^E\right]_i \left[R_T\right]_i \left\{D\right\}_i \qquad (19)$$

5 APPLICATIONS

5.1 Poutre partiellement chargée

Données : EI = 45000 KN m^2 L = 5 m
K = 10^6 KN/m^2 q = 1 KN/ml



Résultats :

	PACSSAE*	Hetenyi[1]	Δ%
y_4 (m)	-0.5051E-06	-0.4978E-06	1.4664
y_5 (m)	-0.5175E-06	-0.5187E-06	0.2313

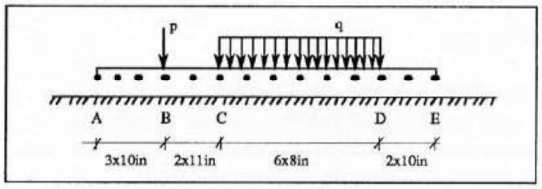
Hetenyi [1] a obtenu ces résultats en prenant les 20 premiers termes de la série trigonométrique représentant la déformée élastique d'une poutre partiellement chargée, donnée par :

$$y(x) = \frac{2qL^4}{\pi^5 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\cos\frac{n\pi C_1}{L} - \cos\frac{n\pi C_2}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}}{n\left(n^4 + \frac{K L^4}{\pi^4 EI}\right)}$$

5.2 Poutre avec chargement mixte

Données : EI = 7.50 E08 lb.in^2 P = 5 000 lbs
K = 750 psi q = 100 lb / in

La poutre est divisée en 13 éléments distincts comme il est indiqué sur la figure ci-dessous.



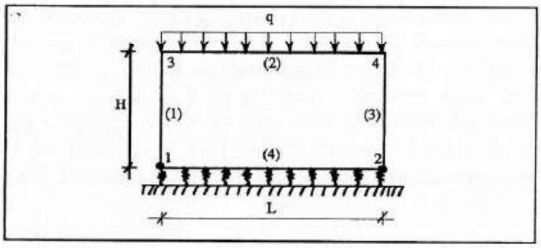
Les résultats particuliers donnés par le programme "PCSSAE" sont les suivants :

Nœud	Y. Déplac. (in)	Z.Déplac. (rd)	M (lb.in)	T (lb)
A	-0.1162	-0.7672E-03	0.0000	0.0000
B	-0.1352	-0.2187E-03	41735.7809	2856.5193 -2143.4807
C	-0.1303	0.5539E-03	19077.5786	-69.4885
D	-7.4980E-02	0.1648E-02	13537.4844	-871.3874
E	-4.1010E-02	0.1714E-02	0.0000	0.0000

5.3 Portique en forme de cadre reposant sur une fondation élastique

Données :

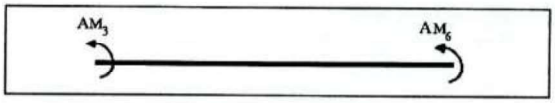
E = 2.9 E10 N/m^2
b = 1 m h = 0.30 m
H = 4 m L = 4.5 m
q = 25 10^3 N/m



* PCSSAE : Programme de calcul des structures sur appuis élastiques.

Sol moyen : $k = 32.10^6$ N/m^2

Résultats des moments aux extrémités des éléments

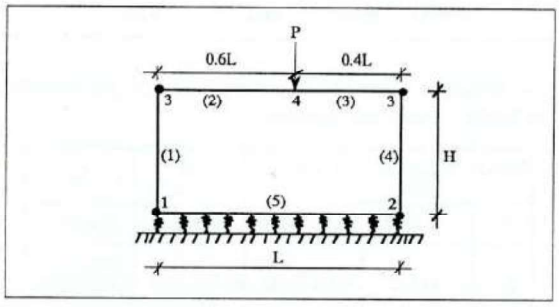


Elément	AM3 (N m)		AM6 (N m)	
	Simvoulidi	PCSSAE	Simvoulidi	PCSSAE
1	13 440	17584.157	-23 544	-23216.696
2	23 544	23216.696	-23 544	-23216.696
3	23 544	23216.696	-13 440	-17584.157
4	-13 440	-17584.157	13 440	17584.157

5.4 Le même portique précédent avec une charge concentrée

Données :

Les mêmes données que l'exemple 5.3 avec :
H = L = 4.5 m P = 12 10^4 N



Elément	AM3 (N m)		AM6 (N m)	
	Simvoulidi	PCSSAE	Simvoulidi	PCSSAE
1	6888.53	33702.664	-36908.89	-33702.664
2	36908.89	33702.664	-93306.45	93205.386
3	-93306.45	-93205.386	-36666.70	-38189.246
4	36666.38	38189.246	-6646.97	-16889.848
5	-6888.53	-12403.266	6644.42	16889.848

6 CONCLUSIONS

En conclusion, nous disons qu'avec cette étude nous pouvons aborder les calculs des structures sur sol ou appuis élastiques d'une manière simple et précise sans avoir recours à l'utilisation d'un nombre assez important d'éléments finis, elle peut être appliquée en cas d'un sol homogène comme pour le cas d'un sol à hétérogénéité verticale, le cas d'un sol à plusieurs couches nécessitant seulement la détermination de la raideur du système équivalent. L'avantage de la méthode réside dans son application à des éléments de longueurs finies, alors que le calcul des poutres sur sol élastique est limité généralement aux poutres de longueurs finies ou semi-infinies.

Les exemples traités dans cet article sont témoins sur la validité et la versatilité de la méthode exposée.

Enfin, avec la méthode présentée nous pouvons aborder le calcul des portiques en tenant compte de l'interaction statique sol-structure, tels que les hangars des avions, les bâtiments à comportement élastique, comme elle peut être appliquée au calcul des éléments de constructions tels que les longrines ou les semelles continues. La méthode peut être étendue également au calcul des radiers lorsque ces derniers sont discrétisés en réseaux de poutres croisées par l'utilisation de la théorie des équivalences.

Dans un prochain article nous aborderons l'étude de la stabilité élastique des structures sur sol ou appuis élastique en introduisant l'influence de l'effort axial.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Hetenyi : "*Beams on elastic foundation*". University of Michigan press, Michigan, 1964.

[2] I.A. Simvoulidi : "*Calcul des ossatures en tenant compte de l'interaction du sol élastique*", 1973.

[3] A. Capra et V. Davidovici : "*Calcul dynamique des structures en zones sismiques*". pp 89-90, Collection UTI, Eyrolles, Paris, 1982.

[4] A. Pecker : "*Dynamique des sols*". pp 225-239, Presse de l'ENPC, Paris, 1984.

[5] P. Shamsher : "*Sols dynamics*". Mc-Graw Hill book company, 1981.

[6] M.S Goual : "*Analyse matricielle des structures et de leur stabilité élastique compte tenu de l'intéraction sol-structure*". Thèse de Magister. ENP Alger, Juillet 1992.

[7] E. Moshe et Z.Y. David : "*Exact stiffness matrix for beams on elastic foundation*". Computers and structures, vol 21, N°6, pp 1355-1359, 1985.

[8] E. Winkler : "*Die lehre von elastizitatund festigkeit*". pp 182, Prague, 1867.

[9] M.G James et W.J Wiliam : "*Analysis of framed structures*". Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1965.