

Ecole Nationale des Travaux Publics

Département de la Post Graduation et de la Recherche

# THESE DE MAGISTER

Spécialité : Matériaux et structures



Présentée par :

**Mohamed BADAoui**

*Ingénieur d'Etat en Travaux Publics*

*Diplômé de l'Ecole Nationale des Travaux Publics*

- En Vue de l'Obtention du Titre de MAGISTER

## Thème

**MODELISATION HEXADIMENSIONNELLE  
DU COMPORTEMENT VIBRATOIRE DES  
BATIMENTS ASYMETRIQUES**

*Soutenue publiquement le 05 février 2002 devant le Jury composé de :*

M. B. Tiliouine	Professeur, ENP	Président
M. M. Bensaïbi	Chargé de Recherche, CGS	Directeur de Thèse
M. M.K. Berrah	Professeur, ENP	Examinateur
M. M. Amieur	Maître de Conférences, ENTTP	Examinateur
M. M. Benradouane	Chargé de cours, ENTTP	Examinateur
M. B. Ameur	Maître de Recherche, CGS	Examinateur
M. M. Belazougui	Directeur, CGS	Invité

# **DEDICACES**

**A mes parents  
A mes frères et sœurs**

## REMERCIEMENTS

Je remercie en premier et en dernier ALLAH le tout puissant de m'avoir gardé en bonne santé en m'accordant le courage et la volonté pour réaliser ce modeste travail.

Je remercie mon directeur de thèse Dr. M. BENSAIBI du C.G.S de m'avoir aidé et facilité la tâche durant l'élaboration de ce travail.

Je tiens à remercier vivement le Professeur B.TILLIOUINE de l'E.N.P pour sa disponibilité malgré ses multiples occupations.

Mes remerciements sont réservés aussi à Mr N.HERMAS enseignant à l'université de Ouargla, Mr BELKADI enseignant à l'ENS Kouba et à Mr N.BOUZOUADA architecte.

Mes vifs remerciements sont adressés au Directeur du C.G.S, Mr M.BELAZOUGUI pour mon recrutement au C.G.S qui m'a beaucoup aidé pour la finition de ce travail.

Mes sincères salutations sont réservées à Monsieur le Président et les honorables membres du Jury et aux invités, qui vont m'honorer de leurs critiques et jugement pour ce modeste travail.

## ملخص

تحديد تشوه عمارة تحت تأثير هزة زلزالية هو ترابط وثيق بين فعالية النتائج و سرعة الحساب. النماذج المركبة للعمارات، كالعناصر المنتهية ثلاثية الأبعاد، تعطي نتائج دقيقة في ظرف زمني طويل نسبيا. النماذج المبسطة تعطي نتائج بسرعة أكبر و لكنها تقريبية. أغلبية هذه النماذج ترمي إلى إنشاء تمثيل نقطي للعمارة بحيث لا يكون لدينا سوى بضع درجات حرية. النموذج المقترح، في هذه الدراسة يأخذ بعين الاعتبار الست درجات للحرية المرتبطة بالبلاطة المفترضة صلبة. بحيث تكون ظاهرة الإلتواء مأخوذة بعين الاعتبار.

هذا التقريب السداسي الأبعاد مكتوب بالمطابقة مع نظرية الهندسة التفاضلية لزمر "لي". هذا التمثيل يبسط صيغ المعادلات و التعامل معها عدديا.

تم تجريب هذا النموذج على بعض الأمثلة لعمارات حساسة لتأثيرات الإلتواء، والذي كانت نتائجه جيدة بالمقارنة مع نتائج موجودة بواسطة نماذج أخرى.

الأخذ بعين الاعتبار تفاعل تربة-منشأة كان أيضا محل دراسة، في حالة القواعد الصلبة السطحية و هذا من أجل إظهار إحدى إمكانيات النموذج و البرنامج المطور. النتائج الموجودة كانت مطابقة للنظرية.

## Résumé

Estimer les déformations d'un bâtiment sous sollicitations sismiques est une illustration concrète du compromis entre la fiabilité des résultats et la rapidité du calcul. Les modélisations complexes des bâtiments, type éléments finis tridimensionnels, donnent des résultats précis mais des temps de calcul relativement longs. Les modélisations plus simples donnent des résultats rapides mais approximatifs. La plupart de ces modélisations consistent à construire une représentation discrète du bâtiment en n'ayant que quelques degrés de liberté.

Le modèle utilisé, dans la présente étude prend en compte les six degrés de liberté associés aux planchers supposés rigides, de sorte que le phénomène de torsion soit pris en compte. Cette approche hexadimensionnelle est réécrite en conformité avec la théorie de la géométrie différentielle des groupes de Lie. Cette représentation simplifie l'expression des équations ainsi que leurs traitement numérique. Une simulation a été réalisée sur des exemples de bâtiments sensibles aux effets de torsion. Cette modélisation conduit à de bons résultats en comparaison avec ceux obtenus avec d'autres modélisations. La prise en compte de l'interaction sol-structure a fait l'objet d'une investigation, dans le cas de fondations rigides superficielles. Ceci afin de montrer une des possibilités du formalisme ainsi que du programme développé. Les résultats obtenus sont conformes à la théorie.

## Summary

Estimating the deformation of building under a seismic load is a typical illustration of the compromise between the reliability of the results and the rapidity of calculations. Complex modelisations of buildings, such as the finite element method, allow accurate but long calculations, even with a computer. Simple modelisations allow quick but approximative calculations. Most of them consist in building a discrete representation of the building in order to have few degrees of freedom. The model used in the present paper, assumes that the slabs are rigid and move with the six degrees of freedom. Thereby, the torsion motion is taken into account. This hexadimensional approach is rewritten according to the theory of the differential geometry of Lie's groups. This representation simplifies the expression of the equations and their numerical treatment. A computer program was developed and tested on several examples of buildings sensitive to torsion effects. This modelling yields good results in comparison with those obtained with other models. The soil-structure interaction was also investigated, in the case of superficial rigid foundation. This is in order to show the efficiency of the mathematical formalism and the developed computer program. The obtained results are conform to the theory.

## SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE .....</b>	<b>3</b>
1- Introduction .....	3
2- Asymétrie dans les structures .....	4
3- Modélisation des bâtiments .....	5
4- Influence de facteurs structuraux .....	10
5- La torsion dans les règlements parasismiques .....	13
6- Les effets de quelques paramètres .....	15
7- La torsion dans le RPA 99 .. ..	22
8- Influence du sol sur la réponse dynamique.....	25
9- Conclusion .....	29
<b>Chapitre 2 : MODELE PAR MATRICE DE TRANSFERT A SIX DEGRES DE LIBERTE .....</b>	<b>31</b>
1- Introduction .....	31
2- La modélisation hexadimensionnelle .....	32
3- Méthode hexadimensionnelle d'étude sismique d'un bâtiment .....	35
4- Dynamique du solide rigide .....	40
5- Etude du contreventement .....	43
6- Equations de la dynamique sismique .....	51
7- Méthode de Runge-Kutta .. ..	57
8- Conclusion .....	58
<b>Chapitre 3 : MISE EN ŒUVRE NUMERIQUE .....</b>	<b>59</b>
1- Introduction .....	59
2- Programmation .....	60
3- Exemples de validation .....	61

4- Exemples d'application .....	64
5- Résultats .....	68
6- Conclusions .....	87
<b>Chapitre 4 : INTERACTION SOL – STRUCTURE .....</b>	<b>89</b>
1- Introduction .....	89
2- Fondation superficielle .....	90
3- Exemples d'application .....	91
4- Résultats .....	92
5- Conclusions .....	99
<b>CONCLUSION GENERALE .....</b>	<b>100</b>
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>	<b>102</b>

## INTRODUCTION GENERALE

L'analyse dynamique nécessite initialement la création d'un modèle de calcul représentant la structure. Ce modèle, introduit ensuite dans un programme de calcul dynamique permet la détermination des modes propres de vibrations et des efforts engendrés par l'action sismique de la structure à étudier. Cette dernière peut être de nature symétrique ou bien asymétrique. Pour différentes raisons (commodité de calcul, simplification, nombre de degré de liberté, ect...) il est nécessaire de faire une distinction entre les deux natures.

Dans le premier cas, les masses et les rigidités sont symétriquement réparties, on pourra compter sur un net découplage entre les différents types de modes. Sous une sollicitation sismique de direction horizontale donnée, mis à part le déplacement dans la direction du séisme les autres déplacements sont pratiquement nuls, la réponse à l'excitation sismique est essentiellement plane sans apparition de mouvements de torsion d'axe vertical.

Ceci est aussi vrai dans la direction orthogonale de la sollicitation.

Dans ce cas on a recours à de simples modèles plans; l'étude dans chacune des deux directions horizontales peut être menée de façon complètement indépendante. Il convient toutefois d'être vigilant pour ce qui est de la rigidité de torsion des structures, qui doit être importante même si les dissymétries de masses et de raideurs sont faibles ou modérées.

Le cas de structures nettement asymétriques fait apparaître un couplage des déformations. Pour une direction horizontale donnée du séisme, la structure présente ses déplacements maximaux dans la direction en question, mais ceux-ci s'accompagnent de façon systématique de déplacements non négligeables dans la direction orthogonale ainsi que d'effets de torsion.

On conçoit alors que seul un modèle 3-D est apte à représenter de manière réaliste le comportement de la structure.

Dans le cadre de la modélisation en 3-D, le modèle le plus répandu est le modèle éléments finis tridimensionnels. Ce modèle est efficace mais peut être d'une utilisation très lourde. Il peut conduire à accroître la complexité des calculs, en extrayant un nombre important de modes à caractère local qui à cause d'éléments secondaires qui dégagent une forte énergie potentielle, masquent les modes principaux avec des masses participantes importantes, et sont

sans intérêt pour le comportement général de la structure. Aussi nécessite-t-il plus de précautions pour l'exploitation des résultats, vu leur trop grand nombre.

Afin de s'affranchir de ce type d'inconvénients et pouvoir étudier correctement le comportement de structures dissymétriques, nous présentons dans le cadre de cette étude un nouveau modèle du comportement dynamique de bâtiment construit à l'aide de corps rigide, de poutres et une technique originale pour obtenir ses équations du mouvement à l'aide de la géométrie différentielle des groupes de Lie.

Notre démarche consistera, tout d'abord, en une étude des différentes méthodes de modélisation des bâtiments asymétriques et de la prise en compte du phénomène de torsion, que ce soit dans les modèles numériques ou bien dans les règlements parasismiques à travers le monde, ceci fera l'objet du premier chapitre. Dans le second chapitre, le modèle proposé est explicité. Dans ce modèle, les planchers peuvent se déplacer suivant les six degrés de liberté de l'espace et l'approche hexadimensionnelle donne une écriture condensée des équations, ce qui facilite leur traitement numérique. Les bases de cette théorie appliquées au cas des corps rigides (planchers) et des liaisons assimilées à des poutres (éléments porteurs) sont étudiées successivement. Dans le cas des petits déplacements, on aboutit au système des équations de la dynamique du nouveau modèle. Dans le troisième chapitre, nous traitons quelques exemples de validation, qui nous ont permis de mettre en œuvre le nouveau modèle. Par la suite nous présentons deux exemples d'application. Dans le quatrième chapitre, une petite investigation sur l'interaction sol-structure est effectuée. Nous y montrons la possibilité de prendre en compte l'effet du sol avec le modèle proposé, ceci de façon très simple et efficace. Des exemples d'application sont donnés.

Enfin une discussion de tous les résultats obtenus sera présentée en conclusion générale.

# **CHAPITRE 1**

## **ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

### **1-INTRODUCTION**

Généralement dans nos conceptions des structures de bâtiments, nous avons affaire à des bâtiments symétriques qui ne présentent pas d'ambiguïtés et dont le calcul est simple. Parfois, on est amené, à étudier des bâtiments asymétriques qui présentent des irrégularités architecturales et massiques, ceci pour des raisons fonctionnelles (exemples : centrales

nucléaires, imprimeries...) ou bien pour des raisons architecturales (exemples : esthétique, environnement ...).

L'étude de ces bâtiments est différente de celle des bâtiments symétriques, car dans ce cas le phénomène de torsion peut avoir une grande influence. Il est dû principalement à l'excentricité existante soit entre le centre de gravité et le centre de torsion de la structure, soit à celle engendrée par la plastification de certains éléments ce qui conduit à une redistribution déséquilibrée de la rigidité. Un autre aspect qu'il ne faut pas négliger est l'effet de propagation des ondes sismiques ou le mouvement de torsion du sol durant une secousse sismique [1].

La torsion, dans les bâtiments symétriques ne se manifeste que dans le cas d'une dégradation des caractéristiques mécaniques de ses éléments de contreventement.

Par contre, dans le cas de bâtiments asymétriques, ce phénomène est toujours présent et on doit en tenir compte dans les calculs.

Plusieurs modélisations ont été proposées, pour étudier ce type de structure, elles vont de celles dont le calcul est simple et les résultats ne reflétant pas la réalité (modèle brochette) à celles dont le calcul est complexe et fastidieux et les résultats proches de la réalité (modèle éléments finis tridimensionnels).

Plusieurs chercheurs, ont pris le modèle brochette comme modèle de base tout en introduisant l'effet de l'asymétrie, chacun selon sa conception.

D'autres chercheurs sont arrivés à la conclusion, que l'introduction de l'effet de la torsion est impérative au niveau de la modélisation, soit en utilisant des modèles adaptés, soit en utilisant les recommandations préconisées par les différents règlements de construction.

Toujours est-il que le phénomène de torsion est un phénomène complexe qui nécessite sa prise en considération dans les bâtiments asymétriques lors des calculs.

## **2-ASYMETRIE DANS LES STRUCTURES**

L'asymétrie (excentricité) de la structure est généralement associée à la torsion, car la réponse en torsion est généralement limitée par l'effet de couplage des modes latéraux et de

torsion lors d'une excitation latérale. Il faut noter la différence entre l'excentricité et le mode de torsion qui est une caractéristique dynamique de la structure qu'elle soit symétrique ou asymétrique.

La fréquence associée au mode de torsion dépend de la distribution de la rigidité des éléments de résistance dans le plan horizontal de la structure. Par exemple les bâtiments ayant un noyau central, une structure autostable avec une distribution uniforme de poteaux, ou des voiles périphériques comme système de contreventement (fig.1) tendent à avoir une fréquence de torsion inférieure, sensiblement égale ou supérieure à la fréquence fondamentale latérale [1,2].

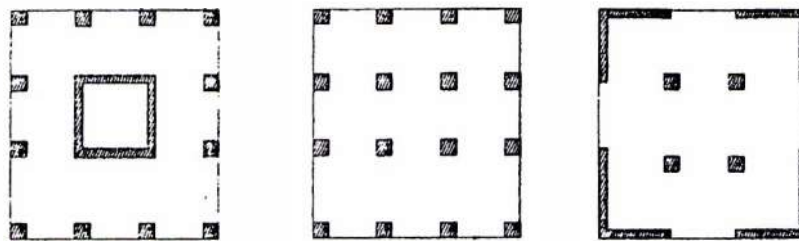


Figure1 : Distribution des éléments résistants dans le plan horizontal[1,2]

Le mode de torsion est pur dans une structure parfaitement symétrique (fig.2-a), mais il peut être couplé à l'un ou aux deux modes latéraux dans une structure asymétrique (fig.2-b,c)

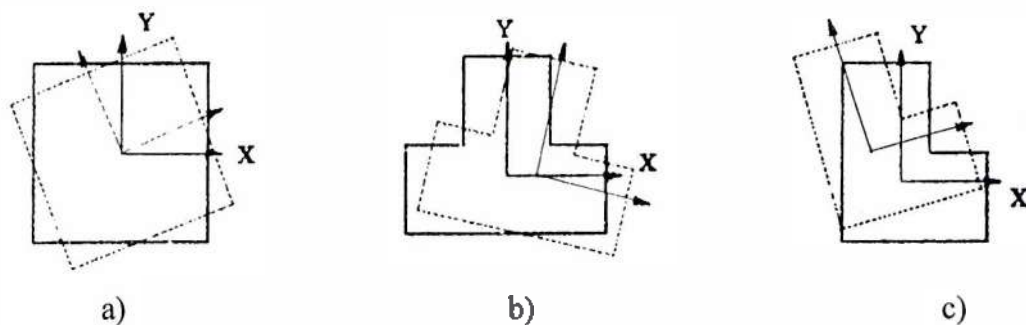


Figure 2 : Couplage des modes de torsion[1]

### 3-MODELISATION DES BATIMENTS

L'étude d'une structure comporte deux phases :

1. la schématisation
2. la description mathématique qui s'applique au modèle établi

Bien que la schématisation ou la description puissent varier d'un modèle à un autre, les principes de fonctionnement mécanique d'une structure de bâtiment sont les mêmes [3], ces principes généraux peuvent être résumés comme suit :

- les planchers transmettent les charges verticales aux éléments porteurs, repartissent les charges horizontales dans le contreventement, assurent la compatibilité des déplacements horizontaux
- les éléments porteurs verticaux transmettent les charges verticales apportées par les planchers jusqu'au fondations et assurent la stabilité horizontale du bâtiment
- les fondations assurent la liaison avec le sol et y repartissent les efforts. Elles jouent le rôle d'appui.

Tous les modèles sont supposés vérifier deux hypothèses :

- les éléments de contreventement ainsi que les poutres ont un comportement élastique ;
- les planchers sont infiniment rigides dans leurs plans et infiniment souples en dehors de leurs plans.

Dans ce qui suit nous allons donner quelques modèles utilisés pour l'étude des bâtiments. Ces modèles sont parmi les plus répandus dans la littérature.

### **3-1-MODELE BROCHETTE**

Il se présente comme une console verticale discrétisée en un certain nombre de nœuds reliés entre eux par un ressort linéaire et un amortisseur visqueux, les masses sont affectées aux nœuds. Ce modèle est inefficace pour tenir compte de l'effet de la torsion, surtout dans les bâtiments présentant des dissymétries de répartition des masses et/ou d'ordre architectural.

#### **3-1-1-Exemple de l'inconvénient de ce modèle**

Soit un mât qui fournit une oscillation, encasté à la base, supportant une traverse indéformable (fig.3) ayant une masse  $M/2$  à chacune de ses extrémités, l'énergie cinétique maximale a pour valeur :

$$W = \frac{1}{2} \sum MV^2$$

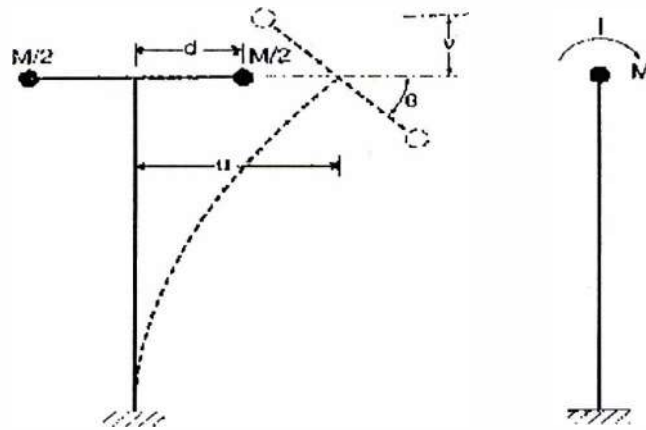


Figure 3 : Mât avec les masses non concentrées au droit de l'axe[4]

Les équations du déplacement et de la vitesse d'un oscillateur non amorti sont :

- pour les déplacements :

$$\begin{cases} u(t) = u \sin \omega t \\ v(t) = v \sin \omega t \end{cases}$$

pour les vitesses :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = u \omega \cos \omega t \\ \dot{v}(t) = v \omega \cos \omega t \end{cases}$$

Le maximum de la vitesse est atteint quand le mât passe par sa position verticale, donc pour tous  $t = 0$ , d'où :

$$\begin{cases} \dot{u} = u \omega \\ \dot{v} = v \omega \end{cases}$$

L'expression de l'énergie s'écrit alors :

$$W = \frac{1}{2} [M\dot{u}^2 + M\dot{v}^2]$$

et  $v = d\theta$

ce qui ramène 
$$W = \frac{\omega^2}{2} [Mu^2 + Md^2\theta^2]$$

avec :

$$I = Md^2 : \text{moment d'inertie massique}$$

d'où :

$$W = \frac{\omega^2}{2} [Mu^2 + I\theta^2]$$

La position des masses  $M/2$  (fig.3) provoque donc une augmentation de la période par l'apparition d'un couple d'inertie  $I\theta^2$ .

Toujours dans le même registre l'exemple d'un pylône métallique (fig.4) a pour but de montrer l'écart parfois considérable sur les valeurs des périodes propres qui résultent d'une modélisation incorrecte des masses, et en particulier d'une erreur sur la position relative des masses d'un même niveau est montrée [4]. En effet, un changement de cette position, pratiquement sans influence pour les structures courantes, peut entraîner des conséquences importantes dans certains cas.

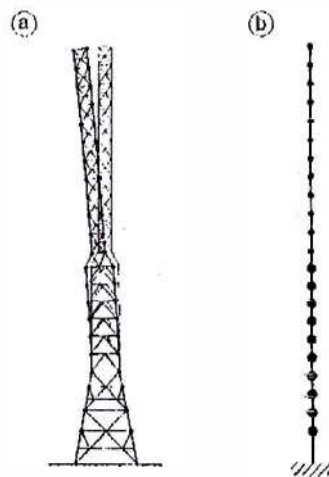


Figure 4 : Pylône avec les masses concentrées[4]  
 a) Masses concentrées au croisement des barres  
 b) Masses concentrées sur une console verticale.

Les périodes propres ont été calculées à l'aide des deux modèles suivants :

- les masses sont concentrées au croisement des barres (fig.4.a), ce qui restitue correctement leur répartition ; elles agissent à l'horizontale comme à la verticale. La période propre du premier mode est de 1.115 s
- le pylône est modélisé par une console verticale (fig.4.b) agissant à l'horizontale seulement, sans prise en compte d'un moment d'inertie massique. Il s'agit d'un modèle classique pour les bâtiments courants. La période propre du premier mode est de 0.407 s.

la période calculée avec une position exacte des masses est plus de deux fois supérieure (structure plus souple) à celle obtenue avec les masses concentrées sur l'axe (structure plus rigide) ; d'où le danger des hypothèses simplificatrices pour la « condensation » des masses sans prise en compte du moment d'inertie massique.

### **3-2-MODELE PLANS DE LAREDO [3]**

Ces modèles sont en général limités aux structures symétriques suivant l'axe de chargement et ne possédant pas d'éléments verticaux couplés. Il existe deux types :

#### **3-2-1-Modèles discontinus**

La structure est remplacée par un système d'éléments verticaux identiques à son contreventement et liés entre eux au niveau de tous les planchers par des bras d'inertie infinie articulés à leurs deux extrémités. Les charges sont supposées appliquées au niveau du plancher.

#### **3-2-2-Modèles continus**

Le contreventement est supposé sans discontinuité et la répartition des planchers et des linteaux suffisamment denses pour pouvoir considérer l'ensemble de leurs réactions sur un élément de contreventement comme une charge répartie. Ce type de modèle est moins conforme à la réalité que le précédent. Son intérêt est de permettre dans certains cas particuliers des économies de calcul appréciables.

### **3-3-MODELE PLAN DE SMITH [5,6]**

Il intègre tous les éléments verticaux dans deux directions orthogonales et les assemble dans un plan de façon à permettre la reproduction de la réponse du contreventement asymétrique.

La question se pose de la validité de l'hypothèse d'un modèle plan qui prend en compte le déplacement perpendiculaire au plan considéré et la torsion.

### **3-4-MODELE MANIVELLE [7,8]**

Ce modèle respecte la position géométrique des masses dans l'espace et tient compte des caractéristiques de torsion des voiles. Ce type de modélisation est tridimensionnel et a l'allure suivante :

- les planchers sont modélisés par des éléments rigides, et leur masse discrétisée en un nœud situé au centre de gravité ;
- les voiles sont modélisés par une poutre équivalente positionnée à la verticale de son centre de gravité.

Néanmoins, la désolidarisation des voiles à leurs intersections est problématique.

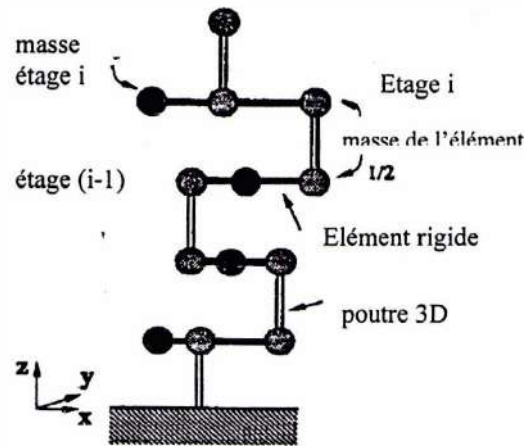


Figure 5 : Modèle manivelle[8]

### 3-5-MODELE CLASSIQUE[9]

Il permet aux planchers des  $N$  étages d'un immeuble de se déplacer suivant les trois degrés de liberté : deux translations horizontales et une rotation autour d'un axe ne passant pas forcément par le centre de gravité du plancher. L'inconvénient de ce modèle réside dans le nombre de degré de liberté limité.

### 3-6-MODELE ELEMENTS FINIS TRIDIMENSIONNEL

L'analyse statique ou dynamique du bâtiment se fait sur le modèle complet ce qui permet de tenir compte de tous les facteurs, torsion comprise. L'inconvénient réside dans la lourdeur de la modélisation et la difficulté de l'interprétation des résultats.

## 4-INFLUENCE DE FACTEURS STRUCTURAUX

Plusieurs études paramétriques ont montré la grande influence de l'excentricité et du rapport de la fréquence de torsion à la fréquence latérale  $\lambda$ , sur la réponse élastique des structures excentrées [2], sans oublier d'autres facteurs qui ne manquent pas d'importance [1] tels que :

- l'intensité d'excitation
- l'amortissement structurel de torsion et latéral ( $\xi_T, \xi_L$ )
- le contenu fréquentiel de la secousse sismique
- le paramètre d'interaction sol-structure [10]

Une expérience a été réalisée sur une structure asymétrique (fig.6) où les deux paramètres  $\lambda_t$  et  $e/r$  ( $\lambda_t$  étant le rapport de la fréquence de torsion sur la fréquence latérale et  $e$  étant l'excentricité statique) sont variables et les autres paramètres sont définis, afin de voir l'influence de ces paramètres sur la demande maximale en ductilité (dmd) et les déplacements de rives rigide et flexible  $\delta_r$  et  $\delta_f$ . Les résultats obtenus sont résumés dans les tableaux 1 et 2 ainsi que dans les fig. 7 et 8.

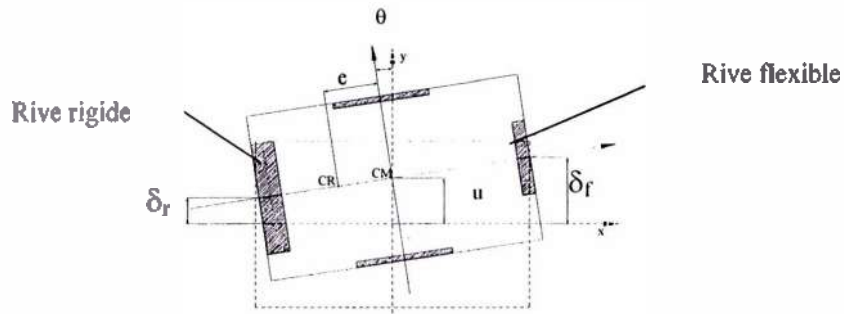


Figure 6 : Modèle analytique et paramètres structuraux en plan[1]

Rive rigide	Rive flexible	Observations
N'est pas sensible à la variation de $\lambda_t$		
	Très influencé par $\lambda_t$	Particulièrement pour les systèmes ayant une faible rigidité de torsion avec une importante excentricité statique

Tableau 1- Effet du rapport de fréquence  $\lambda_t$

Pour le cas où  $\lambda_t=1$  l'amplification de couplage ne pourrait pas être estimée.

Rive rigide	Rive flexible	Observations
La demande en ductilité maximale est peu affectée par le facteur d'excentricité normalisé $e/L$ pour $\lambda_t < 1$		
Une nette diminution de la ductilité pour les structures fortement excentriques		
	Ductilité augmente rapidement avec le degré d'excentricité $e/L$	Particulièrement pour les structures ayant $\lambda_t < 1$

Tableau 2-Effet de l'excentricité statique  $e$

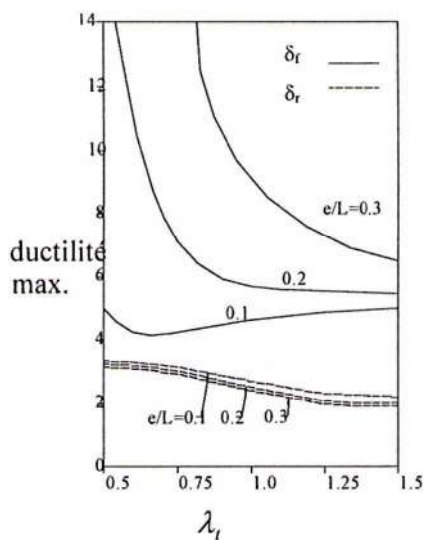


Figure 7 : Effet du rapport fréquentiel sur la ductilité[1]

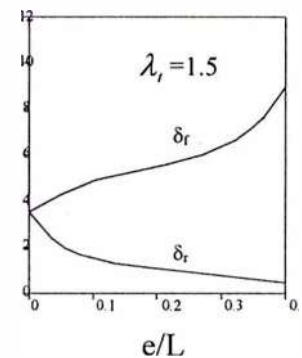
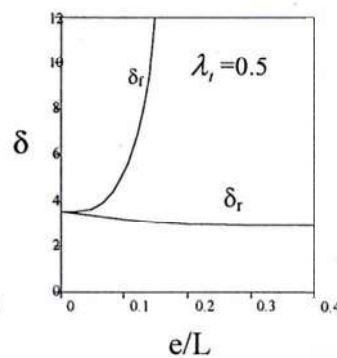


Figure 8 : Effet de l'excentricité statique sur la déformation maximale dans le plan[1]

Il faut noter aussi que les opinions diffèrent quant à l'importance du rapport des fréquences de torsion et latéral  $\lambda_t$  des bâtiments asymétriques sur la réponse inélastique[11], on peut citer :

Pour Tso et Sadek :  $\lambda_t = 1$  n'est pas un cas critique.

Pour Bozorgnia et Tso :  $\lambda_t$  n'est pas un paramètre critique pour l'estimation de la demande en ductilité.

Pour Syamal et Pekau : la demande en ductilité décroît avec l'accroissement de  $\lambda_r$  dans l'élément de la rive rigide.

Pour Goel et Chopra : déformation de l'élément de la rive rigide décroît avec la décroissance de  $\lambda_r$ .

Les observations données par ces chercheurs de l'influence de  $\lambda_r$  sur la réponse en torsion des systèmes excentrés sont contradictoires, les raisons de ces contradictions sont dus à l'utilisation de modèles différents, à la définition de  $\lambda_r$ , à la période et à la distribution de l'effort tranchant de base selon les différents éléments.

## 5-LA TORSION DANS LES REGLEMENTS PARASISMIQUES

En statique le moment de torsion s'exprime de la façon suivante :

$$M_t = V_0 \cdot e$$

Sa répartition s'effectuera sur les éléments de contreventement au prorata des distances du centre de torsion. Il en résulte à la fois une addition de sollicitation des éléments situés sur le côté flexible qui est le cumul de l'effort tranchant latéral et l'effort de torsion engendré par le moment de torsion, et du côté rigide par une réduction de la sollicitation (une addition algébrique de deux efforts de sens opposés) (fig.9).

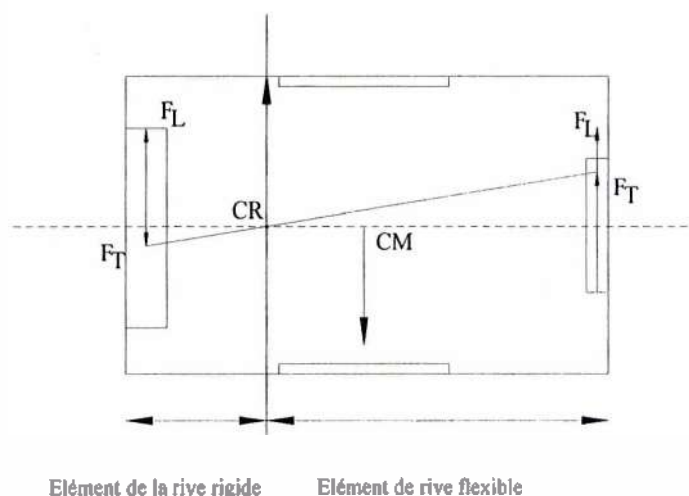


Figure 9 : Efforts tranchants additifs et négatifs dus aux moments de torsion[1]

C'est pour cette raison, que dans la plupart des règlements parasismiques on définit deux excentricités de conception l'une dite primaire et l'autre secondaire, qui tiennent compte de

l'augmentation ou de la diminution de la résistance des éléments [1,2,11 et 12]. Ces excentricités s'écrivent:

$$e_{D1} = e_{d1} + e_a$$

$$e_{D2} = e_{d2} - e_a$$

avec  $e_d = \alpha.e$

$\alpha$  : facteur d'amplification

et  $e_a$  : excentricité accidentelle

Une étude [2] sur l'amplification de la réponse d'une structure asymétrique conclue que, l'amplification dynamique est appréciable pour les structures faiblement excentrées (fig.10). Ce qui amène certains codes sismiques (tableau 3) à tenir compte de l'effet d'amplification dynamique de la torsion. Ceci se fait en multipliant l'excentricité statique par  $\alpha=1.5$ , sauf pour l'Eurocode 8 qui ajoute à l'excentricité statique une excentricité  $e_1$ . Cette excentricité dépend des dimensions en plan horizontal de la structure et de  $\lambda_t$ . Et d'autre part l'effort tranchant dynamique  $V$  du système couplé agissant dans la direction du mouvement sismique est généralement réduit comparativement à son correspondant pour le système non couplé  $V_0$ . Plus particulièrement pour  $\lambda_t$  inférieur ou égal à l'unité avec une forte excentricité comme le montre la figure 11 qui représente la variation du rapport d'amplification de l'effort tranchant  $V/V_0$  en fonction du rapport fréquentiel [2].

Règlement parasismique	Excentricité primaire	Excentricité secondaire
Canada (NBCC 90)	$1.5e + 0.1L$	$0.5e - 0.1L$
Eurocode 8 (EC8 : 89)	$1.0e + e_1 + 0.05L$	$1.0e - 0.05L$
Mexico 1987	$1.5e + 0.1L$	$1.0e - 0.1L$
New Zeland 92	$1.0e + 0.1L$	$1.0e - 0.1L$
UBC 88	$1.0e + 0.05L$	$1.0e - 0.05L, e \leq 0.05L$ $0.0$ pour $e > 0.05L$

Tableau 3-Excentricités de conception dans les différents codes sismiques

$e_1$  prend la plus grande des deux valeurs exprimées par :

$$e_1 = 0.1(L + B) \sqrt{10 \frac{e_0}{L}} \leq 0.1(L + B) ; e_1 = \frac{1}{2e} \left[ l_s^2 - e^2 - p^2 + \sqrt{(l_s^2 + e^2 - p^2)^2 + 4e^2 p^2} \right]$$

où  $l_s^2 = (L^2 + B^2)/12$

$L, B$  sont les dimensions en plan perpendiculaire et parallèle à l'action sismique  
 $p^2$  est le rapport de rigidité torsionnelle et latérale.

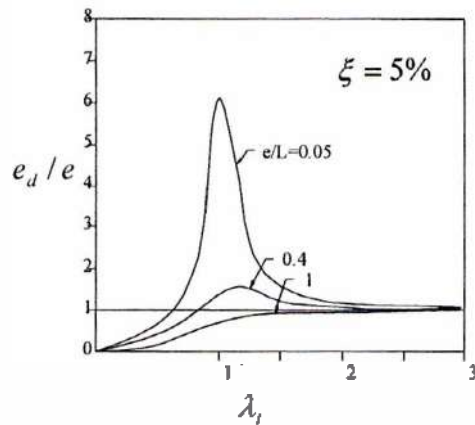


Figure 10 : Amplification dynamique de l'excentricité[1]

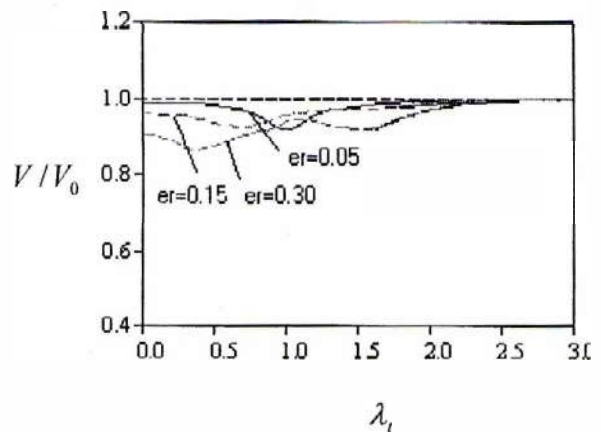


Figure 11 : Amplification de l'effort tranchant[1]

Dans le Règlement Parasismique Algérien (RPA 99) (paragraphe 4.2.7) l'excentricité du calcul est prise égale à la plus grande des deux valeurs :

- 5% de la plus grande dimension du bâtiment à ce niveau (cette excentricité doit être prise en considération de part et d'autre du centre de torsion).
- excentricité théorique résultant des plans.

Cette éventuelle majoration par rapport à l'excentricité effective (calculée) est sensée prendre en compte les effets aussi bien de l'excentricité accidentelle que d'une éventuelle amplification de la torsion.

## 6- LES EFFETS DE QUELQUES PARAMETRES

Dans ce paragraphe nous allons donner quelques résultats sur la réponse torsionnelle et latérale couplée d'un modèle de bâtiment à un seul étage (fig.12), où le plancher est un diaphragme constitué de deux types de matériaux qui ont des densités massiques différentes. Ce bâtiment est soumis à des excitations sismiques, données par les enregistrements des séismes d'El Centro et Européen A et B. Le but est d'estimer l'influence de la torsion couplée sur la réponse élastique des bâtiments sous l'effet d'un mouvement de sol et de faire une comparaison avec les règlements courants qui tiennent compte de ces effets par des procédures empiriques[2,10].

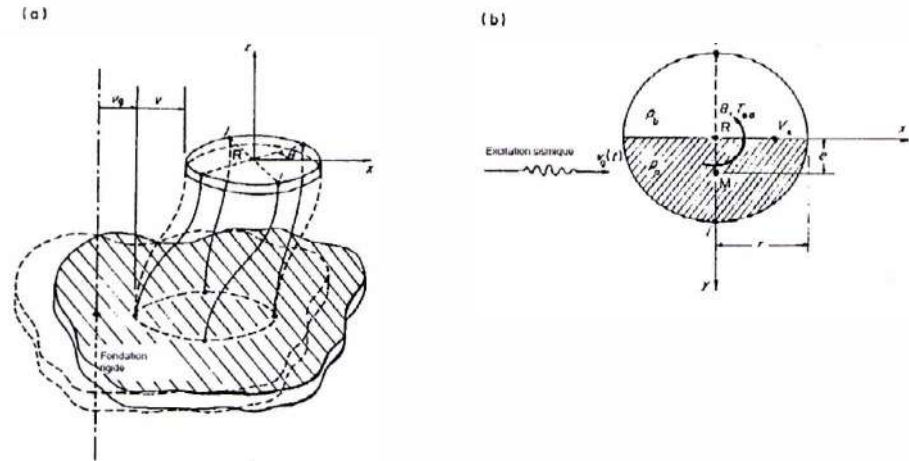


Figure 12 : Modèle d'un bâtiment à un étage[2]  
 a) réponse sous l'excitation de la base rigide  
 b) vue en plan du diaphragme

### 6-1-EFFET DE L'EFFORT TRANCHANT

L'effort tranchant  $V_{x0}$  est donné soit par les règlements soit par l'analyse dynamique ou la méthode statique équivalente. Il dépend du poids  $W$ , des conditions locales du sol et des propriétés de l'excitation tel que le pic de l'accélération du sol. Dans cette étude, le spectre des déplacements  $S_d(\omega_v, \xi)$  est dérivé des enregistrements sélectionnés en employant la méthode dynamique sur un modèle non couplé avec un seul degré de liberté. Par conséquent, l'effort tranchant dynamique maximum de l'étage pour un système non couplé est :

$$V_{x0} = K_v S_d(\omega_v, \xi)$$

La quantité  $V_{x0}$  représente l'effort tranchant de l'étage recommandé par tous les règlements des bâtiments considérés dans cette étude à savoir ATC3 (Californie), Canadien, Mexicain, Néo-Zélandais et Eurocode 8. L'analyse dynamique dans le temps des systèmes couplés conduit à l'effort tranchant de l'étage correspondant :

$$V_x = K_v v^{\max}$$

L'amplification dynamique de l'effort tranchant dû à la torsion couplée est donc :

$$V_x / V_{x0} = v^{\max} / S_d \quad (1)$$

aucun des règlements ne propose un facteur de réduction de l'effort tranchant  $V_{x0}$ , et à partir de la figure 13,  $V_{x0}$  est toujours supérieur à  $V_x$  pour des valeurs de  $\lambda_t$  proche de un et avec

des excentricités larges. Néanmoins une tendance similaire est observée avec une réduction significative pour  $\lambda_t < 1.5$ . Pour le séisme El Centro, l'effort tranchant croît avec un petit pourcentage (4 à 5 %) pour des excentricités larges et  $\lambda_t > 1.2$ . Cette tendance est non observée pour les séismes européens ou l'effet de couplage est négligeable pour  $\lambda_t > 1.5$  (Séisme A) et  $\lambda_t > 2.0$  (Séisme B), sans rendre compte de l'excentricité.

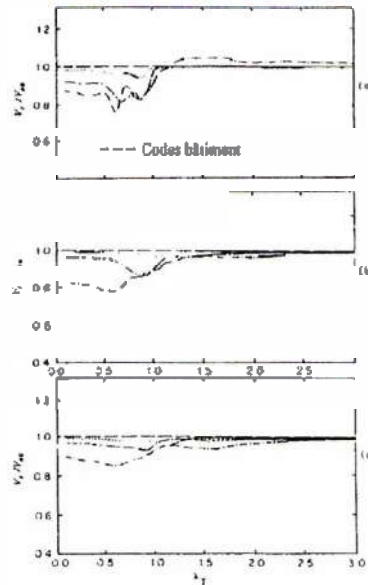


Figure 13 : La variation de l'amplification dynamique de l'effort tranchant pour des bâtiments excités par les séismes NS El Centro (a), Européen A (b) et Européen B (c) ;  $e_r=0.05$  (.....),  $e_r=0.15$  (---),  $e_r=0.30$  (-.-.-),  $\xi=0.05$ [2]

### 6-2-EFFET DE L'AMPLIFICATION DE L'EXCENTRICITÉ

La torsion dynamique maximum résultante de l'excentricité  $e$  est donnée par :

$$T_{ed} = K_{\theta} (v_{\theta}^{\max} / r)$$

L'excentricité dynamique  $e_d$ , est la distance du centre de résistance à partir de laquelle l'effort tranchant  $V_{x0}$  est appliquée, la torsion est donnée donc par :

$$e_d = \frac{T_{ed}}{V_{x0}} = \frac{1}{r} \left( \frac{K_{\theta}}{K_v} \right) \frac{v_{\theta}^{\max}}{S_d(\omega_v, \xi)} \tag{2}$$

et le rapport de l'excentricité dynamique  $e_{dr}$  est donné par  $e_d / r$ . Il est montré que  $\lambda_t$  est liée aux rigidités de l'étage par :

$$\lambda_t^2 = \frac{2}{r^2} \left( \frac{K_{\theta}}{K_v} \right)$$

et à partir de l'équation (2) on obtient l'amplification de l'excentricité comme :

$$e_{dr}/e_r = \frac{\lambda_r^2}{2e_r} \left( \frac{v_{\theta}^{\max}}{S_d} \right) \quad (3)$$

Les Figures 14 à 16 illustrent la variation de l'amplification de l'excentricité dynamique avec  $\lambda_r$ , il est montré que les codes ATC3, Canadien et Néo-Zélandais sous estiment beaucoup les effets de la torsion couplée pour les petites et moyennes excentricités statiques quand  $\lambda_r$  est proche de l'unité. Le code ATC3 sous estime l'amplification de la réponse pour toute les excentricités où  $0.5 < \lambda_r < 3.0$ , il en est de même pour les codes Mexicain, Canadien, et Néo-Zélandais quoique l'intervalle de sous estimation est petit, d'ailleurs ils donnent des estimations raisonnables pour  $\lambda_r > 2.0$ . Pour une large excentricité ( $e_r=0.30$ ) les codes Mexicains, Canadien et Néo-Zélandais donnent des estimations raisonnables de la réponse du séisme Européen A, mais sous estiment significativement le pic de la réponse d'El Centro et Européen B.

La remarque la plus importante tirée à partir des figures 14 et 15 est que les codes ATC3, Canadien, Mexicain et Néo-Zélandais négligent l'effet important de  $\lambda_r$  dans la torsion couplée ce qui engendre par conséquent des erreurs dans le calcul de la torsion. Ces codes mettent des coefficients arbitraires pour le calcul de la torsion présentant la magnitude de l'excentricité statique.

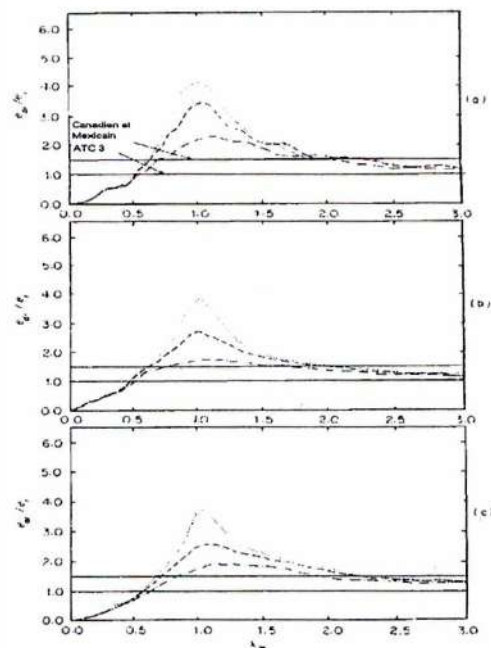


Figure 14 : Comparaison entre l'amplification dynamique de l'excentricité pour des bâtiments excités par les séismes El Centro (a), Européen A (b) et Européen B (c) avec les valeurs correspondantes données par les codes ATC 3, Canadien et Mexicain ;  $e_r=0.05$  (.....),  $e_r=0.15$  (---),  $e_r=0.30$  (-.-.),  $\xi=0.05$  [2]

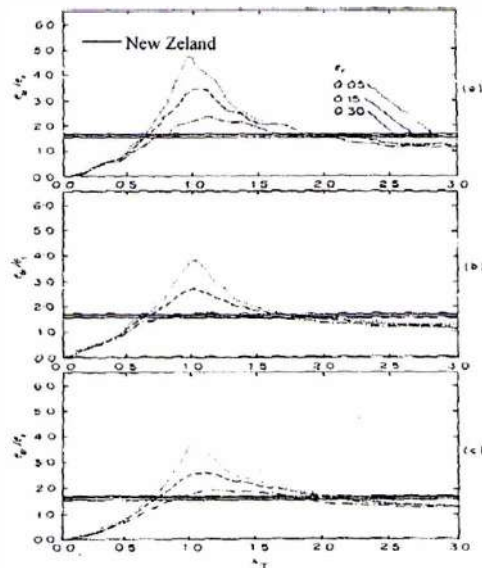


Figure 15 : Comparaison entre l'amplification dynamique de l'excentricité pour des bâtiments excités par les séismes El Centro (a), Européen A (b) et Européen B (c) avec les valeurs correspondantes données par le code New Zealand ;  $e_r = 0.05$  (.....),  $e_r = 0.15$  (---),  $e_r = 0.30$  (-·-·-),  $\xi = 0.05$  [2]

L'Eurocode 8 donne une estimation majorée pour le pic de l'amplification de l'excentricité ( $\lambda_d \cong 1$ ) ceci pour toute les excentricités et pour toute les excitations employées (Fig.16) L'estimation pour ces valeurs de  $\lambda_d$  est considérée plus que majoré pour les séismes européens. Pour  $\lambda_d < 1$  l'Eurocode 8 surestime grossièrement l'amplification de l'excentricité déterminée par l'analyse dynamique. Pour  $\lambda_d > 1.5$  l'Eurocode 8 donne des estimations correctes pour la réponse au séisme Européen A tandis qu'il donne des estimations non majorées de l'effet du couplage de la torsion pour la réponse du séisme Européen B et d'ordre moindre pour El Centro.

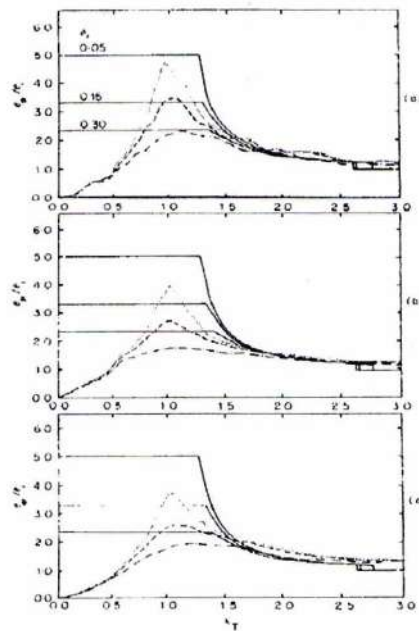


Figure 16 : Comparaison entre l'amplification dynamique de l'excentricité pour des bâtiments excités par les séismes El Centro (a), Européen A (b) et Européen B (c) avec les valeurs correspondantes données par l'Eurocode 8 ;  $e_r=0.05$  (.....),  $e_r=0.15$  (---),  $e_r=0.30$  (-.-.),  $\xi=0.05$  [2]

En général, les estimations de l'Eurocode 8 sont moins simples, plus justes, d'où la possibilité de produire des estimations non majorées de l'effet de la torsion couplée par rapport au reste des codes considérés dans cette étude. Néanmoins quelques améliorations des recommandations de L'Eurocode 8 sont nécessaires, particulièrement pour  $\lambda_t < 1$  où les estimations sont majorées et dans quelques cas pour  $\lambda_t > 1.5$  où elles sont non majorées.

Les résultats montrés dans les figures 14 à 16 indiquent que l'effet de la torsion couplée de la réponse dynamique de la torsion est plus significatif pour  $\lambda_t$  égal ou proche de l'unité.

Dans la figure 17  $\lambda_t = 1$  et on y voit la variation de l'excentricité dynamique  $e_{dr}$  en comparant avec les différents règlements. Les résultats confirment les conclusions tirées avant, c'est à dire la grande sous-estimation apportée par les règlements ATC3, Canadien, Mexicain et Néo-Zélandais pour des excentricités petites et moyennes, tandis que l'Eurocode 8 surestime la réponse due à tous les séismes considérés dans les deux cas de petites et larges excentricités, mais donne une bonne estimation de la réponse au séisme d'El Centro pour des valeurs intermédiaires de l'excentricité.

Toujours sur cette figure, la non linéarité de la courbe de la réponse dynamique est clairement démontrée, en effet l'hypothèse faite par les règlements ATC3, Mexicain, et Canadien que la

relation entre l'excentricité dynamique et statique est linéaire (légèrement non linéaire pour le code Néo-Zélandais) est la source d'erreur principale pour les petites et moyennes excentricités. Les recommandations de l'Eurocode 8 donne une bande supérieure de l'estimation de la réponse pour toutes les excentricités considérées.

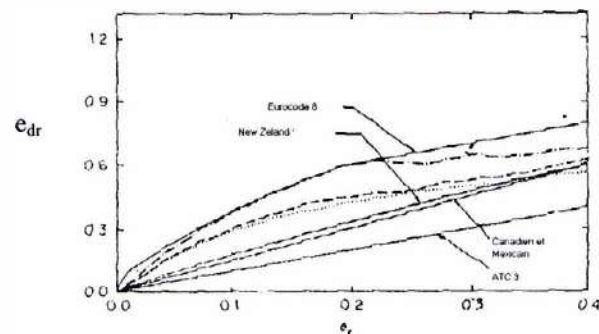


Figure 17 : Variation du rapport de l'excentricité dynamique avec  $e_s$  pour des bâtiments excités par les séismes Ns El Centro (---), Européen A (---) et Européen B (-----), et comparaison avec les valeurs correspondantes données par les codes des bâtiments ;  $\lambda_T = 1.0$  ,  $\xi = 0.05$  [2]

### 6-3-EFFET DE L'INTERACTION SOL-STRUCTURE

Dans les cas où le type ou l'importance de la structure exige la prise en compte de l'effet de l'interaction sol/structure dans les calculs, particulièrement quand la structure a une rigidité relativement grande par rapport à celle du sol de fondation, le règlement ATC3 donne des recommandations spécifiques pour son inclusion au moyen de facteurs empiriques pour réduire la valeur de l'effort tranchant à la base. Le facteur de réduction approprié est déterminé par une procédure basée sur le calcul de la période effective du bâtiment  $\bar{T}_v$  pour une structure flexible en comparaison avec la période  $T_v$  pour une structure rigide en prenant l'amortissement induit par la fondation. La distribution de l'effort sismique total  $V$  sur la hauteur du bâtiment est considérée la même que dans le cas où il n'y a pas d'interaction sol-structure. En aucun cas l'effort tranchant réduit  $V_r$  à la base ne doit être pris inférieur de  $0.7V_R$ .

Cependant l'utilisation de ces recommandations vont réduire les valeurs de l'effort tranchant à la base  $V_R$  et les forces latérales alors que les moments vont augmenter les valeurs des déplacements latéraux. Les effets de l'interaction sont dus au changement dans la réponse dynamique structurale due à un séisme. Ce changement résulte de l'interdépendance des

relations caractéristiques structurales et des propriétés du sol sur lequel est le bâtiment. Dans plusieurs règlements les effets de l'interaction sol-structure sont négligés, quand les méthodes simplifiées sont utilisées pour l'analyse. On considère généralement que les fondations rigides donnent des solutions majorées dans tous les cas d'application. Cependant, la complexité des effets de l'interaction sol-structure rend difficile la formulation de règles générales applicables aux méthodes simplifiées. Dans la plupart des modélisations nécessitant la prise en compte de l'interaction sol-structure des méthodes numériques sophistiquées sont nécessaires. La méthode des éléments finis est particulièrement utilisée pour modéliser le système de fondation et calculer ainsi sa réponse à un séisme.

## 7-LA TORSION DANS LE RPA 99

Le phénomène de la torsion a été pris en compte dans le règlement parasismique Algérien (RPA). Le but du présent paragraphe est d'essayer d'établir une analogie entre le RPA et les autres règlements parasismiques à notre disposition.

La distribution des forces dans les bâtiments est établie et cela dans plusieurs codes, selon deux procédures : la procédure statique et la procédure dynamique[13,14]. La procédure statique est généralement appliquée sur les bâtiments réguliers. Pour le cas des bâtiments irréguliers, soit en plan, soit en élévation, l'analyse dynamique est inévitable[14].

La distribution verticale de la force sismique calculée à partir de la méthode statique équivalente, qui remplace les forces réelles dynamiques qui se développent dans la construction se fait selon la formule suivante [14] :

$$F_i = (V_b - F_i) \left[ w_i h_i / \sum_{j=1}^n w_j h_j \right]$$

Où  $F_i$  : Effort horizontal revenant au niveau  $i$

$h_i$  : niveau du plancher où s'exerce la force  $F_i$

$h_j$  : niveau d'un plancher quelconque

$w_i, w_j$  : poids revenant aux planchers  $i, j$

Pour le RPA 99  $F_i = 0.07TV_b$  ne dépassera en aucun cas  $0.25V_b$ , et elle est prise égale à zéro quand  $T$  est plus petite ou égale à 0.7 seconde.

où  $T$  est la période propre,  $V_b$  est l'effort tranchant à la base.

La distribution horizontale de l'effort tranchant dans chaque niveau sera distribué aux différents éléments de contreventement proportionnellement à leurs rigidités.

L'augmentation de l'effort tranchant provoqué par la torsion horizontale due à l'excentricité entre le centre de gravité et le centre de référence doit être prise en compte (pour le RPA 99 les efforts tranchants négatifs dus à la torsion devront être négligés). Cependant les codes sismiques y compris le RPA 99 ne spécifient pas comment déterminer le centre de référence [13].

Plusieurs définitions [13] sont données du centre de référence, Poole définit le centre de référence, comme le centre de rigidité, le point d'application de la résultante des efforts tranchants appliqués sur les éléments de l'étage et qui n'engendre aucune rotation en aucun des autres étages. Humar définit le centre de référence, comme le centre de résistance, le point dans le plancher où l'application de la charge latérale à travers ce point ne cause pas une rotation dans ce plancher, mais les autres planchers peuvent avoir des rotations. Cheung et Tso, ainsi que, Hejal et Chopra, définissent le centre de référence, comme le centre de rigidité. Le point dans le plancher où l'application de la force latérale à travers ce point n'engendre pas une rotation dans tout les planchers.

Le centre de référence est appelé aussi centre de torsion.

Une comparaison [1] entre les excentricités de conception des différents codes sismiques avec le RPA 88 est faite (Fig.18). L'excentricité primaire de conception de RPA 88 constitue l'enveloppe inférieure vu que l'excentricité accidentelle n'est pas cumulative à l'excentricité statique. Par contre l'excentricité secondaire qui est égale au signe près à l'excentricité primaire devient la plus sécuritaire surtout pour les structures fortement excentrées.

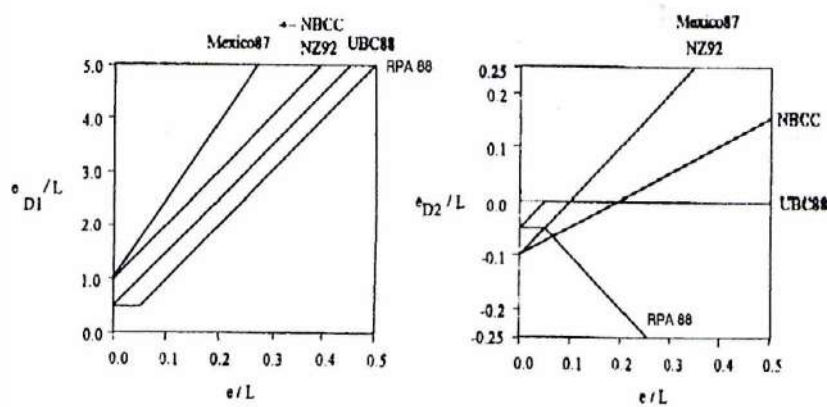


Figure 18 : comparaison des excentricités de conception  
des différents règlements parasismiques [1]

Concernant l'analyse dynamique, elle est généralement appliquée aux structures qui présentent une irrégularité ou une grande hauteur pour lequel la période principale est supérieure à 1.0 seconde et la forme propre diffère de la forme triangulaire associée à la méthode statique équivalente.

L'analyse dynamique spécifiée dans les codes sismiques utilise une des deux méthodes pour un système élastique linéaire, analyse par spectre de réponse ou analyse du mouvement en fonction du temps [14,15].

La réponse dynamique donnée par l'analyse par spectre de réponse est obtenue par la méthode de la racine carrée[14] qui ne donne pas toujours des résultats satisfaisants.

L'analyse du mouvement en fonction du temps nécessite plusieurs enregistrements du mouvement sismiques pour mieux maîtriser le problème.

A titre indicatif des études faites par Duan et Chandler [15] ont montré que la procédure d'analyse modale peut être non sécuritaire pour un système non élastique, elle est applicable seulement dans les systèmes élastiques linéaires.

Un autre facteur qui ne manque pas d'importance dans la stabilité de la structure est l'interaction sol-structure. Généralement dans le calcul des structures la fondation est prise rigide ce qui peut être acceptable dans le cas d'une structure asymétrique avec une petite excentricité, mais dans le cas où l'excentricité est large, ou la période est longue, la flexibilité de la fondation doit être prise en compte [12].

## 8-INFLUENCE DU SOL SUR LA REPOSE DYNAMIQUE

L'influence du sol sur la réponse dynamique des structures peut être importante du fait de la modification des caractéristiques dynamiques de la structure par la présence de sol déformable. Le problème principal dans la prise en compte de l'effet du sol sur la réponse dynamique des structures est la détermination des relations force-déplacements à l'interface sol-structure [16] appelée : fonctions d'impédances de la fondation.

### 8-1-IMPEDANCE D'UNE FONDATION RIGIDE

Une fondation sans masse soumise à une force harmonique de pulsation  $\omega$ ,  $P(t) = P_0 \exp(i\omega t)$  est animée d'un mouvement de même fréquence  $X(t) = X_0(\omega) \exp(i\omega t)$ , déphasé par rapport à P. L'amplitude et le déphasage dépendent de la fréquence [17]. L'impédance est par définition le nombre complexe K, variable avec la fréquence :

$$K(\omega) = P(t)/X(t)$$

qu'on écrit souvent :

$$K(\omega) = K_r(\omega) + iK_i(\omega)$$

$K_r$ ,  $K_i$  parties réelle et imaginaire de l'impédance.

En principe ce genre de fonctions peut être utilisé dans une analyse dans le domaine fréquentiel [16,18]. Cependant, l'analyse d'un système compliqué, nécessitant la mise en œuvre d'un grand nombre de degrés de liberté, peut être simplifiée si les fonctions d'impédance sont considérées indépendantes de la fréquence d'excitation. En outre, la résolution dans le domaine fréquentiel ne peut plus être envisagée si l'analyse est étendue au domaine non-linéaire [16].

### 8-2-METHODES DE DETERMINATION DE L'IMPEDANCE

Les méthodes analytiques ont permis, à partir des équations de propagation des ondes dans un milieu continu et de diverses simplifications, de calculer l'impédance d'une fondation circulaire sur un demi-espace élastique.

Différentes méthodes numériques, éléments finis, équations intégrales, nombre d'onde ou double transformée de Fourier permettent aujourd'hui d'envisager le calcul de l'impédance d'une fondation de forme quelconque[17].

### **8-3-FORMULATION D'UN PROBLEME D'INTERACTION SOL-STRUCTURE**

Une analyse complète d'interaction doit prendre en compte [19] :

- la variation des caractéristiques du sol avec la profondeur
- le comportement non linéaire du sol
- le schéma complexe de propagation des ondes qui engendrent le mouvement
- l'interaction avec les structures avoisinantes.

### **8-4-METHODES DE PRISE EN COMPTE DE L'INTERACTION SOL-STRUCTURE [19],[20],[21]**

Plusieurs méthodes de prise en compte de l'interaction sol-structure existent, selon qu'on travaille dans le domaine fréquentiel ou bien dans le domaine temporel. Nous en donnons ci-après les principales ramifications.

#### **8-4-1-Méthode d'analyse dans le domaine fréquentiel**

Les méthodes dans le domaine fréquentiel sont divisées en trois catégories :

- a) méthode globale
- b) méthode de sous-structures
- c) méthode hybride

#### **8-4-2-Méthode d'analyse dans le domaine temporel**

Les méthodes dans le domaine temporel se décomposent en trois grandes catégories :

- a) méthode globale
- b) méthode de frontière
- c) méthode de volume

## 8-5-NECESSITE DE MODELISER LE SOL

Le mouvement sismique est le mouvement à la surface du sol en champ libre en l'absence de toute construction, défini à partir d'enregistrements réels actuellement disponibles qui ont presque tous été obtenus en surface ou à très faible profondeur. Le mouvement sismique donné, déduit de tels enregistrements, est donc essentiellement représentatif du mouvement d'un point au voisinage de la surface.

La réponse de la structure à ce mouvement sismique dépend de la nature de ce mouvement, des propriétés dynamiques de l'ouvrage et de celles du sol. Il y a donc interaction entre la structure et le milieu extérieur.

Il faut rappeler que c'est essentiellement la structure que l'on souhaite dimensionner et non le milieu extérieur. On souhaite, par conséquent, limiter le plus possible l'interaction à la fois pour des raisons de coût et à cause de la complexité de l'analyse à effectuer.

La procédure la plus radicale pour éliminer le problème de l'interaction sol-structure (ISS) est de considérer la structure parfaitement encastree dans le sol, hypothèse d'autant plus valable que le sol de fondation est peu déformable vis-à-vis de la structure, qui peut donc être considérée comme encastree (cas des bâtiments courants faisant l'objet des méthodes de calcul simplifiées).

Il n'y a pas non plus d'interaction dans le cas d'un bâtiment rigide sur un sol rocheux. En effet, les déformations du sol au droit du bâtiment sont négligeables devant les déformations dues à l'action sismique.

En général, et plus particulièrement dans le cas de bâtiments massifs sur des sols moyennement ou faiblement raides, il y a une intervention non négligeable du sol (modes de sol) et une modification de la réponse de la structure.

D'une manière générale, la déformabilité du sol entraîne :

- un allongement de la période de vibration du premier mode notamment, qui peut provoquer une variation en plus ou en moins de la valeur de l'accélération selon la zone où l'on se situe sur le spectre élastique ;
- un amortissement non négligeable (amortissement radiatif + amortissement propre du matériau sol) puisque toujours supérieur à celui des matériaux de la structure. Ne pas le prendre en compte conduit à surestimer la réponse ;
- une rotation de la fondation qui peut modifier sensiblement le calcul de la déformée modale et donc la répartition des accélérations sur la hauteur du bâtiment ;
- le mouvement du sol à la base du bâtiment est supposé identique à celui du champ libre.

La modélisation la plus fréquente de l'ISS suppose que la structure soit fondée en surface sur sol homogène (solide élastique) et horizontal, avec des propriétés mécaniques connues et constantes au cours du séisme, et que le mouvement sismique sollicitant la structure soit des ondes de volume se propageant verticalement à partir d'un substratum horizontal.

En réalité, le substratum présente parfois un certain pendage, le sol est hétérogène et les caractéristiques dynamiques varient au cours du séisme, la structure peut être aussi sollicitée par des ondes de surface, et la fondation est plus souvent disposée à une certaine profondeur.

La principale difficulté est liée au caractère non borné du domaine de sol à l'échelle de la fondation.

La modélisation de sol se fait généralement par des ressorts ou des éléments finis.

Le modèle à étudier est composé en partie d'éléments de sol et en partie par une représentation simplifiée de l'ouvrage, à la base duquel on impose un mouvement défini par l'accélérogramme déconvolué.

## 8-6-MODELISATION DU SOL PAR UN SYSTEME DE RESSORTS AMORTIS

Une méthode simple de prise en compte l'interaction sol-structure est de séparer le sol et la structure. Dans ces conditions, le mouvement du bâtiment est égal à la somme :

- du mouvement que prendrait le bâtiment fictif, supposé sans masse sous l'action de l'excitation sismique imposée à la base du modèle : *interaction cinématique* ;
- et du mouvement que prendrait le bâtiment réel, en l'absence d'excitation sismique à la base du modèle, s'il était soumis aux forces d'inerties résultant d'un calcul utilisant le mouvement précédent : *interaction inertielle*.

Pour un bâtiment dont les fondations sont superficielles, l'interaction cinématique est nulle et le mouvement de la base du modèle est identique au mouvement du sol en champ libre.

On est alors dans le cas d'un modèle unique sol-structure où l'on représente le sol par un système de ressorts amortis, dont les caractéristiques sont obtenues pour chaque module de sol de la façon suivante [4] :

- on calcule en première approximation les raideurs de sol par la méthode Newmark-Rosenblueth, méthode indépendante de la fréquence, donc avec des coefficients constants ;
- on calcule la fréquence  $f_0$  de la structure à partir des raideurs ainsi obtenues ;

- on détermine les nouvelles raideurs et l'amortissement géométrique selon la méthode de Deleuze [4], fondations circulaires ou assimilées sur un milieu semi-infini. Pour les autres types de fondations superficielles, on peut déterminer les raideurs d'après Sieffert et Cevaer[4] ;
- les valeurs de raideur du sol résultent d'un processus itératif qui converge rapidement (3 à 4 itérations).

Chaque ressort est caractérisé par sa raideur et son amortissement réduit.

Pour l'étude de l'interaction sol-structure en plus de l'amortissement interne du sol, on considère l'amortissement géométrique ou radiatif .

### **8-6-1-Méthode Newmark-Rosenblueth**

Cette méthode est indépendante de la fréquence, donc avec des coefficients constants. Elle permet d'estimer et de contrôler les valeurs des raideurs, des amortissements du sol et des fréquences propres de la structure.

### **8-6-2-Méthode de Deleuze**

Cette méthode peut être appliquée dans le cas où les fondations, circulaires ou assimilées, peuvent être considérées comme superficielles et suffisamment rigides.

### **8-6-3-Méthode simplifiée de Veletsos**

La méthode simplifiée de Veletsos s'appuie sur le texte de l'ATC-3. Cette approche s'applique aux structures relativement régulières avec des fondations du type radier ou semelles isolées.

## **9-CONCLUSION**

Il apparaît de cette étude bibliographique que le phénomène de torsion est un phénomène complexe. Il est difficile à modéliser et à prendre en compte. Les différents règlements à travers le monde tentent d'en tenir compte avec plus ou moins de réussite sans vraiment le cerner précisément. De là découle la volonté et la nécessité de le caractériser avec

précision, surtout dans le cas de certains ouvrages particuliers. Effectivement sur ces ouvrages sujets à la torsion ce paramètre peut devenir prépondérant lors d'excitations sismiques.

La grande majorité des modèles présentés n'arrivent pas à rendre compte de la torsion des bâtiments. Il faut donc raffiner la modélisation tout en essayant de conserver un petit nombre d'inconnues, condition indispensable pour une mise en œuvre numérique efficace.

L'approche que nous allons présenter se base sur la théorie des groupes de Lie, cadre naturel de l'étude du groupe des rotations  $SO_3(\mathbb{R})$ , et qui considère les planchers comme des solides rigides, avec leurs six degrés de liberté de translation et de rotation.

Les deux seules hypothèses sont :

- Les planchers sont parfaitement rigides
- Les forces d'inertie des éléments de liaison entre les planchers sont négligeables devant celles du plancher

Les avantages de ce modèle sont :

- Les centres de gravité des planchers peuvent ne pas être alignés verticalement
- Les axes principaux d'inertie des planchers ne sont pas nécessairement parallèles
- Les planchers peuvent se déplacer suivant les six degrés de liberté de l'espace
- Les forces d'inertie gyroscopique ne sont pas négligées
- Toutes les sollicitations des éléments de liaison sont considérées.

De plus ce modèle présente l'avantage non négligeable de pouvoir y inclure l'effet de l'interaction sol-structure, ceci d'une manière simple et efficace. En effet cet effet doit être pris en considération pour certains types de sol sur lequel serait bâti l'édifice.

Il existe plusieurs méthodes pour prendre en compte l'effet de l'interaction sol-structure. Ces méthodes peuvent être simples ou complexes selon le degré de sophistication que l'on cherche et la précision des calculs voulus ainsi que du type de fondations considérées.

Dans notre cas nous nous bornerons à l'étude des fondations rigides superficielles. Le but étant de montrer que l'on peut prendre en compte l'effet du sol de manière efficace dans un modèle simplifié.

## **CHAPITRE 2**

### **MODELE PAR MATRICE DE TRANSERT A SIX DEGRES DE LIBERTE**

#### **1-INTRODUCTION**

Dans ce chapitre nous allons développer la formulation mathématique du modèle choisi c'est à dire le modèle par matrice de transfert à six degrés de liberté[5,6,8]. Ce modèle nous permettra de prendre en compte les six déplacements de la structure y compris donc la torsion. Le but principal de cette étude étant la modélisation du phénomène de torsion dans les bâtiments. Ce phénomène peut avoir lieu essentiellement dans les bâtiments asymétriques lors d'un séisme. En se basant sur la théorie des groupes de Lie, une formulation a été développée. Nous nous proposons d'en donner ci-après les principaux fondements ainsi que quelques

démonstrations de nature à expliciter la problématique et rendre compte de la complexité du problème. Rappelons tout d'abord les hypothèses du modèle :

1. Planchers parfaitement rigides.
2. Forces d'inertie des éléments de liaison entre les planchers négligeables devant celles du plancher.

Le nouveau modèle illustré dans la figure 1, appelé *modèle par matrice de transfert à six degrés de liberté*, et constitué par la succession de planchers assimilés à des solides rigides et de liaisons élastiques de type poteau ou voile entre deux planchers consécutifs assimilé à une "poutre".

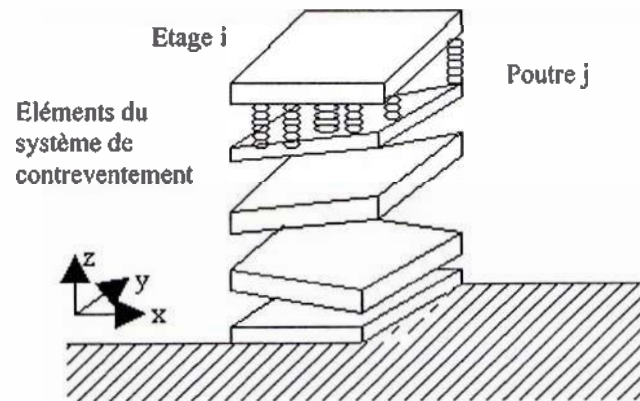


Figure 1 : Modèle proposé [8]

## 2-LA MODELISATION HEXADIMENSIONNELLE

Nous écrivons ici le principe fondamental de la dynamique pour un solide rigide à partir de n'importe quel point de l'espace. Nous donnerons une présentation plus formelle donc plus détaillée dans le prochain paragraphe (Méthode hexadimensionnelle d'étude sismique d'un bâtiment). Le but de celui-ci étant de donner les grandes lignes directrices. Nous appliquons ce principe aux planchers de l'édifice puis nous expliciterons les matrices de masse et de raideur.

### 2-1- LA MODELISATION DU PLANCHER

Par définition, la position d'un solide rigide dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  donné est déterminée par 3 degrés de liberté de rotation et 3 degrés de liberté de translation. Un mouvement de ce solide donne lieu à un champ de déplacements, qui, dans l'hypothèse des petites perturbations, s'avère être un distributeur. Un distributeur  $\vec{d}$  est un champ de vecteurs tel qu'il existe un vecteur  $\vec{\theta}$  vérifiant :

$$\text{Pour tous points } M, P \quad \vec{d}(M) = \vec{d}(P) + \vec{\theta} \wedge \overline{MP}$$

Dans un repère, un distributeur est entièrement déterminé par ses éléments de réduction, à savoir sa valeur  $\vec{d}(O)$  en l'origine et le vecteur  $\vec{\theta}$ ; cela signifie simplement que le **mouvement d'un corps rigide se décompose en une translation et en une rotation autour d'un point**. Compte tenu de la relation des déplacements, les nouveaux éléments de réduction du même distributeur en un autre point  $O'$  sont:  $\vec{d}(O') = \vec{d}(O) + \vec{\theta} \wedge \overline{OO'}$  et  $\vec{\theta}$ .

En dérivant la relation précédente par rapport au temps (et toujours dans l'hypothèse des petites perturbations), on a la relation bien connue, analogue à la formule de changement de référentiel pour le champ des vitesses:

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(P) + \vec{\omega} \wedge \overline{MP}$$

Le champ des vitesses est donc aussi un distributeur, dont les éléments de réduction sont les dérivées temporelles des éléments de réduction du champ de déplacements: une vitesse d'ensemble et un vecteur en un point.

Le champ de forces qui s'exerce sur un solide rigide est un torseur caractérisé par 6 paramètres; il s'agit des trois (3) composantes de la résultante  $\vec{R}$  des efforts extérieurs et des trois (3) composantes du moment  $\vec{H}(O)$  en l'origine du repère, duales des composantes du champ des vitesses. A partir d'un autre point  $O'$ , le même torseur est défini par  $\vec{R}$  et par:

$$\vec{H}(O') = \vec{H}(O) + \overline{OO'} \wedge \vec{R}$$

La puissance du torseur des efforts dans le distributeur des vitesses s'écrit  $\vec{R} \cdot \vec{v}(O) + \vec{H}(O) \cdot \vec{\omega}$

La relation fondamentale de la dynamique  $\vec{f} = m\vec{\gamma}$  appliquée en chaque point d'un solide rigide  $S$  permet d'identifier le torseur des forces extérieures et le torseur dynamique de résultante

$\int_S \rho \vec{\gamma} dM$  et de moment  $\int_S \overline{OM} \wedge \rho \vec{\gamma} dM$ . En identifiant torseurs et distributeurs à des éléments de  $R^6$  et en utilisant

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d\vec{v}(M)}{dt} = \frac{d\vec{v}(O)}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overline{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overline{OM}}{dt},$$

le calcul des éléments de réduction du torseur dynamique permet de faire apparaître dans  $R^6$  un opérateur linéaire de moment:  $M$  et un produit vectoriel  $[\cdot, \cdot]$ , vérifiant:

$$f = M \frac{dv}{dt} + [v, Mv]$$

Cette égalité est valable composante par composante, elle permet de déterminer l'évolution de la position d'un solide rigide par un **système couplé de 6 équations différentielles du deuxième ordre**. Le point O, origine du repère est quelconque, ce n'est pas obligatoirement le centre d'inertie du solide ni un point fixe.

## 2-2-LA MODELISATION DU CONTREVENTEMENT

Après la modélisation des planchers comme des solides rigides, intervient celle des contreventements. Nous supposons que les éléments de contreventements sont des poutres cylindriques encastées suivant la section droite en contact avec le plancher qui les soutient. Il peut y en avoir un nombre quelconque entre deux étages, posés à n'importe quel endroit du plancher.

**La formulation classique du comportement des poutres** permet d'obtenir une relation **linéaire** entre le torseur des forces appliquées sur une section et le distributeur des déplacements de cette section. Cette relation exprimée dans un repère lié à chaque section doit être écrite dans une base commune à toutes les sections de la poutre, en l'occurrence la base de la section finale, appelée **base locale** de la poutre. Cela permet de définir une matrice de rigidité  $K_i$  écrite dans cette base locale.

Dans le cas (fréquent) où il y a plusieurs éléments de contreventements, il faut exprimer les différentes matrices de rigidité dans une base commune, dite **base centrale** liée au plancher, au moyen d'une matrice de passage  $D_i$ . La matrice de rigidité d'une poutre est alors:

$$\tilde{K}_i = D_i K_i D_i^{-1}.$$

**La compatibilité des déformations du plancher**, qui découle de l'hypothèse de corps rigide, permet de sommer les différentes matrices de rigidité. La matrice de raideur d'un système complet de contreventement entre deux étages est donc:

$$K = \sum_{i=1}^p \tilde{K}_i$$

**La matrice de masse** correspond à celle de l'opérateur moment. A un distributeur  $x$ , l'opérateur associe le distributeur  $M(x)$  défini par:

$$M(x)(P) = \int_S \overline{PM} \wedge x(M) \rho(M) dM$$

où S est un solide: le plancher ou l'élément de contreventement.

Cet opérateur a pour valeur propre triple la masse  $m$  du solide, et pour valeur propre simple les moments d'inertie de ce solide par rapport aux trois axes du solide. La matrice de masse

d'un plancher est la somme des matrices de masse du contreventement supérieur, du contreventement inférieur et du plancher.

## 2-3-LES EQUATIONS DU MOUVEMENT EN CAS DE SEISME

Le mouvement du sol est donné par son déplacement  $u_g$ . Le mouvement **relatif** d'un bâtiment de N étages par rapport au sol est donné par le vecteur  $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  où les  $x_i$ ,  $i=1, \dots, N$  sont des vecteurs hexadimensionnels. Chaque  $x_i$  correspond au distributeur décrivant le déplacement de l'étage  $i$ , ses trois premières composantes sont celles du vecteur rotation, les trois dernières celles du vecteur translation.

L'application du principe fondamental aboutit à un système de  $2 \times (6N)$  équations différentielles qui se ramène à un système du premier ordre en le vecteur  $(X, \frac{dX}{dt})$ :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = v_1 \\ \vdots \\ \frac{dx_N}{dt} = v_N \\ \frac{dv_1}{dt} = -\ddot{u}_g - M_1^{-1}([v_1, M_1 v_1] + [\dot{u}_g, M_1 v_1] + [v_1, M_1 \dot{u}_g]) + (K_1 + \tilde{K}_2)x_1 - H_2 K_2 x_2 \\ \vdots \\ \frac{dv_N}{dt} = -\ddot{u}_g - M_N^{-1}([v_N, M_N v_N] + [\dot{u}_g, M_N v_N] + [v_N, M_N \dot{u}_g]) + K_N x_N - K_N H_N^{-1} x_{N-1} \end{cases}$$

## 3-METHODE HEXADIMENSIONNELLE D'ETUDE SISMIQUE D'UN BATIMENT

Le modèle proposé se base essentiellement sur la notion de distributeur. Ce distributeur est l'élément qui permet de présenter le déplacement avec ses 6 degrés de liberté appelé aussi champ équiprojectif. Pour un développement des équations de mouvement, le produit vectoriel dans l'espace des champs équiprojectifs ainsi que le changement de base, sont deux outils importants qu'il faut définir afin de permettre l'écriture de la relation hexadimensionnelle fondamentale de la dynamique d'une multi-structure.

### 3-1- DEFINITIONS DANS L'ESPACE VECTORIEL DES CHAMPS EQUIPROJECTIFS

Nous présentons ci-après une version formalisée de la dynamique des corps rigides, mais nous n'évoquerons la théorie des groupes de Lie qui la sous tend que sommairement [22]. Notons qu'il s'agit simplement d'identifier un distributeur à un élément de  $R^6$  via ses éléments de réduction.

#### a) Groupe de Lie

C'est un groupe qui vérifie la relation suivante :

Soit un groupe  $G$ , muni d'une structure de variété différentielle, telle que l'application  $(x, y) \rightarrow xy$  de  $G \times G$  dans  $G$  et l'application  $x \rightarrow x^{-1}$  de  $G$  dans  $G$  soient de classe  $C^\infty$ .

#### b) Algèbre de Lie

Algèbre  $E$  dont la multiplication, associant au couple  $(x, y)$  l'élément noté  $[x, y]$ , satisfait aux deux conditions suivantes :

1) pour tout élément  $x$  de  $E$ ,

$$[x, y] = -[y, x]$$

2) pour tout triplet  $(x, y, z)$  d'éléments de  $E$ ,

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad (\text{Identité de Jacobi}).$$

#### c) Champs équiprojectifs

Soit  $x$  un champ de vecteurs sur l'espace affine  $R^3$ , ayant des valeurs dans l'espace vectoriel  $R^3$ , vérifiant :

$$\exists \bar{\omega}_x \in R^3 \text{ tel que } \forall M, P \in R^3 \quad x(M) = x(P) + \bar{\omega}_x \wedge \overline{PM} \quad (1)$$

$\bar{\omega}_x$  est l'invariant vectoriel de  $x$ .

$x$  est appelé **distributeur** ou **champ équiprojectif**. L'ensemble des distributeurs forme un espace vectoriel, noté  $Eq$ .

**d) Base et changement de base**

Soit un repère fixe  $R=(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace affine  $R^3$ , un distributeur est défini par ses **éléments de réduction** en O : les deux vecteurs  $x(O)$  et  $\overline{\omega_x}$ . Une base B de Eq est donc  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Eq est un espace vectoriel de **dimension 6** et les composantes d'un distributeur dans la base B sont les composantes de  $\overline{\omega_x}$  et de  $x(O)$ (dans cet ordre) dans le repère R.

Soient deux bases  $B_1$  et  $B_2$  de Eq déduites respectivement des repères  $R_1=(G_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  et  $R_2=(G_2, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ . Pour avoir la matrice de passage D de  $B_1$  à  $B_2$  on doit écrire les vecteurs de base  $B_1$  ( $\vec{i}_1 \wedge \overline{G_1M}, \vec{j}_1 \wedge \overline{G_1M}, \vec{k}_1 \wedge \overline{G_1M}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ ) dans la base  $B_2$  ( $\vec{i}_2 \wedge \overline{G_2M}, \vec{j}_2 \wedge \overline{G_2M}, \vec{k}_2 \wedge \overline{G_2M}, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2$ ) :

$$\vec{i}_1 = \alpha_{11}\vec{i}_2 + \alpha_{21}\vec{j}_2 + \alpha_{31}\vec{k}_2$$

$$\vec{j}_1 = \alpha_{12}\vec{i}_2 + \alpha_{22}\vec{j}_2 + \alpha_{32}\vec{k}_2$$

$$\vec{k}_1 = \alpha_{13}\vec{i}_2 + \alpha_{23}\vec{j}_2 + \alpha_{33}\vec{k}_2$$

$$\begin{aligned} \vec{i}_1 \wedge \overline{G_1M} &= \vec{i}_1 \wedge (\overline{G_1G_2} + \overline{G_2M}) = \vec{i}_1 \wedge \overline{G_1G_2} + \vec{i}_1 \wedge \overline{G_2M} \\ &= \vec{i}_1 \wedge \overline{G_1G_2} + \alpha_{11}(\vec{i}_2 \wedge \overline{G_2M}) + \alpha_{21}(\vec{j}_2 \wedge \overline{G_2M}) + \alpha_{31}(\vec{k}_2 \wedge \overline{G_2M}) \end{aligned}$$

$$\vec{j}_1 \wedge \overline{G_1M} = \vec{j}_1 \wedge \overline{G_1G_2} + \alpha_{12}(\vec{i}_2 \wedge \overline{G_2M}) + \alpha_{22}(\vec{j}_2 \wedge \overline{G_2M}) + \alpha_{32}(\vec{k}_2 \wedge \overline{G_2M})$$

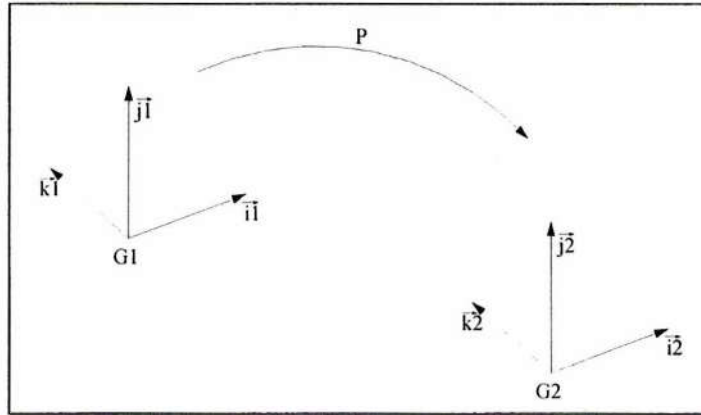
$$\vec{k}_1 \wedge \overline{G_1M} = \vec{k}_1 \wedge \overline{G_1G_2} + \alpha_{13}(\vec{i}_2 \wedge \overline{G_2M}) + \alpha_{23}(\vec{j}_2 \wedge \overline{G_2M}) + \alpha_{33}(\vec{k}_2 \wedge \overline{G_2M})$$

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ & \overline{G_2G_1} \wedge \cdot & & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ & & & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

donc la matrice de passage dans Eq de la base  $B_1$  à la base  $B_2$  est :

$$D = \begin{bmatrix} P & 0 \\ (\overline{G_2G_1} \wedge \cdot) & P \end{bmatrix} \tag{2}$$

où P est la matrice de passage de  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  à  $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$  (voir Fig.2).

Figure 2 : changement de base  $B_1$  à la base  $B_2$ 

$(\overline{G_2 G_1} \wedge \cdot)$  est l'application  $\vec{x} \mapsto \overline{G_2 G_1} \wedge \vec{x}$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Nous pouvons l'écrire aussi,  $\overline{G_2 G_1} \wedge \vec{x} = A\vec{x}$  tel que A est une matrice de la forme :

$$A = [ \overline{G_2 G_1} \wedge \vec{i}_1 \quad \overline{G_2 G_1} \wedge \vec{j}_1 \quad \overline{G_2 G_1} \wedge \vec{k}_1 ]$$

dans la base  $B_2$ .

### e) Produit vectoriel

Soient  $x$  et  $y$  deux distributeurs d'invariants vectoriels  $\overline{\omega}_x$  et  $\overline{\omega}_y$ , soit  $z$  le champ de vecteur  $z = [x, y]$  défini par :

$$z(M) = \overline{w}_x \wedge y(M) - \overline{w}_y \wedge x(M) \quad (3)$$

remplaçant dans  $x(M)$  et  $y(M)$  :

$$\begin{aligned} z(M) &= \overline{\omega}_x \wedge (y(O) + \overline{\omega}_y \wedge \overline{OM}) - \overline{\omega}_y \wedge (x(O) + \overline{w}_x \wedge \overline{OM}) \\ &= \overline{\omega}_x \wedge y(O) - \overline{\omega}_y \wedge x(O) + \overline{w}_x \wedge (\overline{\omega}_y \wedge \overline{OM}) + \overline{\omega}_y \wedge (\overline{OM} \wedge \overline{\omega}_x) \end{aligned}$$

d'après la relation vectorielle :  $\overline{\omega}_x \wedge (\overline{\omega}_y \wedge \overline{OM}) + \overline{OM} \wedge (\overline{\omega}_x \wedge \overline{\omega}_y) + \overline{\omega}_y \wedge (\overline{OM} \wedge \overline{\omega}_x) = \vec{0}$

On écrit :

$$z(M) = \overline{w}_x \wedge y(O) - \overline{\omega}_y \wedge x(O) + (\overline{\omega}_x \wedge \overline{\omega}_y) \wedge \overline{OM} \quad (4)$$

$z$  est un distributeur d'invariant vectoriel  $\overline{w}_z = \overline{\omega}_x \wedge \overline{\omega}_y$ . D'une manière pratique, il se

calcule ainsi :

$$\left[ \begin{pmatrix} \overline{\omega_x} \\ x(O) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{\omega_y} \\ y(O) \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \overline{\omega_x} \wedge \overline{\omega_y} \\ \overline{\omega_x} \wedge y(O) - \overline{\omega_y} \wedge x(O) \end{pmatrix} \quad (5)$$

[.,.] est un produit vectoriel sur Eq.

### f) Moment d'un distributeur

Soit un solide S de masse m, de masse volumique  $\rho$  non uniforme et de barycentre G. L'opérateur de moment M est l'endomorphisme de Eq défini par :

$$\forall x \in Eq, \forall P \in R^3, M(x) = \int_S \overline{PM} \wedge x(M) \rho(M) dM \quad (6)$$

D'un point de vue physique, M synthétise la masse, le tenseur d'inertie et le centre d'inertie du solide.

On peut vérifier que M(x) est bien un distributeur.

$$\begin{aligned} M(x)(Q) - M(x)(P) &= \int_S (\overline{QM} - \overline{PM}) \wedge x(M) \rho(M) dM \\ &= \overline{QP} \wedge \int_S x(M) \rho(M) dM \\ &= mx(G) \wedge \overline{PQ} \end{aligned}$$

Dans une base B de Eq déduite d'un repère de  $R^3$  d'origine A. Nous avons d'une part :

$$\overline{\omega_{M(x)}} = mx(G) = mx(A) + m\overline{\omega_x} \wedge \overline{AG} \quad (7)$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} M(x)(A) &= \int_S \overline{AM} \wedge (x(A) + \overline{\omega_x} \wedge \overline{AM}) \rho(M) dM \\ &= m\overline{AG} \wedge x(A) + \int_S \overline{AM} \wedge (\overline{\omega_x} \wedge \overline{AM}) \rho(M) d(M) \\ &= m\overline{AG} \wedge x(A) + I_A(\overline{\omega_x}) \end{aligned} \quad (8)$$

La matrice de l'application linéaire M dans la base B s'en déduit simplement :

$$M_A = \begin{bmatrix} \overline{mGA} \wedge \cdot & mI_3 \\ I_A & -\overline{mGA} \wedge \cdot \end{bmatrix} \quad (9)$$

$(\overline{mGA} \wedge \cdot)$  est l'application  $\vec{x} \mapsto \overline{mGA} \wedge \vec{x}$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ , peut être écrite aussi,

$\overline{mGA} \wedge \vec{x} = T\vec{x}$  tel que T est une matrice de la forme :

$$T = \begin{bmatrix} \overline{mGA} \wedge i & \overline{mGA} \wedge j & \overline{mGA} \wedge k \end{bmatrix}$$

dans la base B.

## 4-DYNAMIQUE DU SOLIDE RIGIDE

Le principe fondamental de la dynamique peut être appliqué en utilisant les expressions développées précédemment, au cas d'un solide rigide **en nous limitant à six inconnues**.

### 4-1-CINEMATIQUE DU SOLIDE RIGIDE EN PETITS DEPLACEMENTS

L'étude de mouvement dans l'espace d'un solide rigide se fait par le biais de son déplacement d, défini mathématiquement par une application affine de l'espace conservant les distances et l'orientation dont la partie linéaire associée est une rotation, élément du groupe spécial orthogonal  $SO_3(\mathbb{R})$ . Si M et P deux points de l'espace, on a alors :

$$d(M) = d(p) + R.\overline{PM}$$

aussi 
$$\overline{d(p)d(m)} = R.\overline{PM} \quad \text{avec } R \in SO_3(\mathbb{R}) \quad (10)$$

L'ensemble des déplacements D est un groupe pour la loi de composition des applications o.

Le mouvement d'un solide peut être décrit par une application  $t \mapsto D(t)$  de  $\mathbb{R}$  dans D. Cette application est au moins de classe  $C^2$  puisque D est un groupe de Lie, c'est à dire, un groupe muni d'une structure différentielle compatible avec la loi de composition interne o. Soit  $\partial$

son algèbre de Lie, dans le cas du groupe D,  $\partial$  s'identifie à l'espace vectoriel des champs équiprojectifs muni du crochet de Lie :

$$[x, y] = \overline{\omega}_x \wedge y(M) - \overline{\omega}_y \wedge x(M) \quad (11)$$

où  $\overline{\omega}_x$  et  $\overline{\omega}_y$  désignent les invariants vectoriels respectivement du champ  $x$  et du champ  $y$ .

Pour les petits déplacements, éléments d'un "petit" voisinage de l'élément neutre  $1_D$ ; on peut assimiler la partie voisine de  $1_D$  à une portion de l'espace tangent en ce point, c'est à dire son algèbre de Lie  $\partial$  qui est, à un isomorphisme près, l'espace vectoriel des champs équiprojectifs.

Il est à rappeler que toute matrice orthogonale  $R$  est l'exponentielle d'une matrice antisymétrique  $A$  :

$$R = \exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

qui s'écrit dans le cas de l'hypothèse des petits déplacements (H.P.D)

$$R \approx I_3 + A + o(A^2)$$

Pour toute matrice  $A$  antisymétrique  $3 \times 3$  il existe un vecteur  $\vec{\theta}$  tel que  $A \cdot \overline{MP} = \vec{\theta} \wedge \overline{MP}$

Il vient alors :  $R \cdot \overline{MP} \approx \overline{MP} + \vec{\theta} \wedge \overline{MP}$

Soit  $x$  le champ de vecteur déplacement, défini par  $x(M) = \overline{Md(M)}$  alors de la relation (10) :

$$\begin{aligned} \overline{d(M)d(P)} &= R \cdot \overline{MP} \approx \overline{MP} + \vec{\theta} \wedge \overline{MP} \\ \overline{d(M)M} + \overline{MP} + \overline{Pd(P)} &= \overline{MP} + \vec{\theta} \wedge \overline{MP} \\ -x(M) + x(P) &= \vec{\theta} \wedge \overline{MP} \\ x(M) &= x(P) + \vec{\theta} \wedge \overline{PM} \end{aligned} \quad (12)$$

*Le champ de déplacements d'un solide en petites perturbations est un distributeur.*

En dérivant la relation précédente, et en notant  $\overline{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$ , il apparaît la relation :

$$\begin{aligned} \frac{dx(M)}{dt} &= \frac{dx(P)}{dt} + \frac{d\vec{\theta}}{dt} \wedge \overline{PM} + \vec{\theta} \wedge \frac{d\overline{PM}}{dt} \\ v(M) &= v(P) + \overline{\omega} \wedge \overline{PM} \end{aligned} \quad (13)$$

Le dernier terme s'écrit :  $\vec{\theta} \wedge (\vec{\theta} \wedge \overline{PM}) = A^2 \cdot \overline{PM} \approx 0$  A est 'petit' cas (H.P.D)

*Le champ des vitesses d'un solide en petits déplacements est un distributeur.*

## 4-2-CALCUL DU TORSEUR DYNAMIQUE

Les torseurs représentent le système de forces s'exerçant sur un solide rigide.

Ils sont définis par leurs éléments de réduction en un point O : la résultante  $\vec{R} = \int \vec{f}(M) dM$

et le moment  $\vec{H} = \int \overline{OM} \wedge \vec{f} dM$ . H vérifie la relation  $H(O') = H(O) + \overline{O'O} \wedge \vec{R}$ .

*L'ensemble des torseurs est donc un espace vectoriel hexadimensionnel.*

Le principe fondamental de la dynamique du solide :  $\vec{f} = M\vec{\gamma}$  appliqué en chaque point d'un solide rigide S nous permet d'identifier le torseur dynamique et le torseur  $T_f$  des forces extérieures.

La résultante du torseur dynamique est :

$$R = \int_s \rho(M) \vec{\gamma}(M) d(M) \quad (14)$$

et le moment en un point O est :

$$H = \int_s \overline{OM} \wedge \rho(M) \vec{\gamma}(M) dM \quad (15)$$

par dérivation de la relation (13), il vient :

$$\cdot \frac{d\vec{v}(M)}{dt} = \frac{d\vec{v}(O)}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overline{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overline{OM}}{dt}$$

ce qui devient, en utilisant (12) :

$$\frac{d\vec{v}(M)}{dt} = \frac{d\vec{v}(O)}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overline{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \overline{OM})$$

la résultante est donc :

$$\begin{aligned} R &= \int_s \left( \vec{\gamma}(O) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overline{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{OM}) \right) \rho(M) dM \\ R &= \vec{\gamma}(O) \int_s \rho(M) dM + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \int_s \rho(M) \overline{OM} dM + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(O) \int_s \rho(M) dM \\ &\quad + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \int_s \rho(M) \overline{OM} dM) \\ R &= m\vec{\gamma}(O) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge m\overline{OG} + m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge m\overline{OG}) \end{aligned} \quad (16)$$

de la même manière on obtient le moment H :

$$\begin{aligned}
 H &= \int_s \overline{OM} \wedge \rho(M) \vec{\gamma}(M) dM \\
 &= \int_s \overline{OM} \wedge (\vec{\gamma}(O) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overline{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overline{OM}}{dt}) \rho(M) dM \\
 &= \int_s \rho(M) \overline{OM} dM \wedge \vec{\gamma}(O) + \int_s \rho(M) \overline{OM} \wedge (\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overline{OM}) dM \\
 &\quad + \int_s \rho(M) \overline{OM} \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \overline{OM})) dM \\
 &= \int_s \rho(M) \overline{OM} dM \wedge \vec{\gamma}(O) + \int_s \rho(M) \overline{OM} \wedge (\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overline{OM}) dM \\
 &\quad + \int_s \rho(M) \overline{OM} dM \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{v}(O)) + \int_s \rho(M) \vec{\omega} \wedge (\overline{OM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{OM})) dM \\
 H &= m \overline{OG} \wedge \vec{\gamma}(O) + I_o (\frac{d\vec{\omega}}{dt}) + m \overline{OG} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{v}(O)) + \vec{\omega} \wedge I_o (\vec{\omega}) \quad (17)
 \end{aligned}$$

G et m notations déjà définies dans le § 3.

Comme le torseur dynamique est égal au torseur des forces appliquées :

$$T_f = \left\langle \left\langle \begin{matrix} R \\ H \end{matrix} \right\rangle \right\rangle \quad (18)$$

L'identification distributeur-torseur donne :

$$T_f = M \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right) + \left[ \vec{v}, M(\vec{v}) \right] \quad (19)$$

Le crochet du terme complémentaire est appelé **crochet de Lie**.

## 5-ETUDE DU CONTREVENTEMENT

L'étude de contreventement varie d'un auteur à un autre, elle dépend essentiellement de la modélisation. Dans notre cas les planchers sont modélisés par des solides rigides avec leurs six degrés de liberté. La modélisation des différents éléments de contreventement est réalisée en utilisant la **théorie des poutres**.

### 5-1-MATRICE DE RIGIDITE

L'élément de contreventement  $i$  entre les étages  $n-1$  et  $n$  est une poutre de longueur  $l$ , de section  $S$ , de sections réduites  $S_x$  et  $S_y$ , de module de Young  $E$ , de coefficient de cisaillement  $G$  et de constante de torsion  $J$  (Fig. 3). Elle est encastree suivant sa section droite d'origine  $O$ , et soumise à sa section finale à des efforts extérieurs de résultante  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$  et de moment de couple  $\vec{\Gamma} = (\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z)$ , définissant un vecteur  $\vec{f}$  de  $\mathbb{R}^6$ .

On s'intéresse aux déplacements de la section finale  $A$ , les translations  $(u_x, u_y, u_z)$  et rotations  $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ , groupées en un seul vecteur  $\chi$  de  $\mathbb{R}^6$ .

La théorie des poutres permet d'exprimer la loi de comportement (relation déformation – efforts intérieurs) à l'aide d'une matrice  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}^6$  telle que :  $\pi(M) = \Lambda \varepsilon(M)$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & GS_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & GS_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ES \\ EI_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

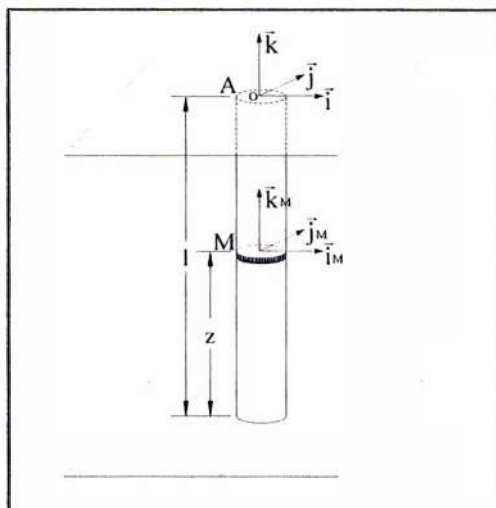


Figure 3 : Élément poutre

Où  $\pi(M)$  représente les six efforts intérieurs classiques au point M de la poutre (moments fléchissants, moment de torsion, efforts tranchants, effort normal) :

$$\pi(M) = (M_x, M_y, C, T_x, T_y, N)$$

$\varepsilon(M)$  est le vecteur déformation associé.

Cette relation est écrite dans une **base orthonormée locale** liée à la section de côte z.

La déformation est la dérivée de la déformée  $\chi$ . Pour avoir la valeur de la déformée en A, il faut intégrer  $\varepsilon$  sur la poutre qui doit être exprimée dans une même base quelque soit la côte z.

$$\chi = \int_0^l \varepsilon(M) dM = \int_0^l D^{-1} \Lambda^{-1} D \pi(M) dM \quad (21)$$

La valeur de  $\pi(M)$  dans la base liée à la section A est constante et vaut  $\vec{f}$ , d'où :

$$\chi = \left( \int_0^l D^{-1} \Lambda^{-1} D dz \right) \vec{f} \quad (22)$$

En prenant pour base fixe la **base de la section finale**, les bases locales sont les translatées de celle-ci.

L'inverse de la matrice  $\Lambda$  se fait facilement en remplaçant chacune de deux diagonales de  $\Lambda$  par l'inverse de l'autre. D est la matrice de passage dans  $\mathbb{R}^6$  de la base de côte z à la base de côte z=l définie dans l'équation 2.

$$D = \begin{bmatrix} P & 0 \\ \overline{OM} \wedge . & P \end{bmatrix} \quad (23)$$

O est l'origine de repère liée à la section de cote z=l

P est la matrice de passage dans  $\mathbb{R}^3$  de la base de côte z à la base de côte z=l.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (l-z) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(l-z) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

L'inverse de D s'obtient en remplaçant (l-z) par son opposé.

Où  $\pi(M)$  représente les six efforts intérieurs classiques au point M de la poutre (moments fléchissants, moment de torsion, efforts tranchants, effort normal) :

$$\pi(M) = (M_x, M_y, C, T_x, T_y, N)$$

$\varepsilon(M)$  est le vecteur déformation associé.

Cette relation est écrite dans une **base orthonormée locale** liée à la section de côte z.

La déformation est la dérivée de la déformée  $\chi$ . Pour avoir la valeur de la déformée en A, il faut intégrer  $\varepsilon$  sur la poutre qui doit être exprimée dans une même base quelque soit la côte z.

$$\chi = \int_0^l \varepsilon(M) dM = \int_0^l D^{-1} \Lambda^{-1} D \pi(M) dM \quad (21)$$

La valeur de  $\pi(M)$  dans la base liée à la section A est constante et vaut  $\vec{f}$ , d'où :

$$\chi = \left( \int_0^l D^{-1} \Lambda^{-1} D dz \right) \vec{f} \quad (22)$$

En prenant pour base fixe **la base de la section finale**, les bases locales sont les translatées de celle-ci.

L'inverse de la matrice  $\Lambda$  se fait facilement en remplaçant chacune de deux diagonales de  $\Lambda$  par l'inverse de l'autre. D est la matrice de passage dans  $\mathbb{R}^6$  de la base de côte z à la base de côte z=l définie dans l'équation 2.

$$D = \begin{bmatrix} P & 0 \\ \overline{OM} \wedge . & P \end{bmatrix} \quad (23)$$

O est l'origine de repère liée à la section de cote z=l

P est la matrice de passage dans  $\mathbb{R}^3$  de la base de côte z à la base de côte z=l.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (l-z) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(l-z) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

l'inverse de D s'obtient en remplaçant (l-z) par son opposé.

En remplaçant (24) dans (22) et après intégration on obtient :

$$\chi = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{l^2}{2EI_x} & 0 & \frac{l}{EI_x} & 0 & 0 \\ \frac{l^2}{2EI_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{GJ} \\ \frac{l^3}{3EI_y} + \frac{l}{GS_x} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{2EI_y} & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EI_x} + \frac{l}{GS_y} & 0 & -\frac{l^2}{2EI_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{ES} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \pi(A) \quad (25)$$

La matrice  $K_i^{-1}$  obtenue est écrite dans la base de la section finale en contact avec le plan supérieur. Son inverse  $K_i$  est la matrice de rigidité de l'élément  $i$  par rapport à la même base :

$$K_i = \begin{bmatrix} 0 & -k_{ix\theta_2} & 0 & k_{ix} & 0 & 0 \\ k_{iy\theta_1} & 0 & 0 & 0 & k_{iy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{iz} \\ k_{i\theta_1} & 0 & 0 & 0 & k_{iy\theta_1} & 0 \\ 0 & k_{i\theta_2} & 0 & -k_{ix\theta_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{i\theta_3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

avec :

$$k_{ix} = \frac{1}{\frac{l^3}{12EI_y} + \frac{l}{GS_x}} \quad ; \quad k_{iy} = \frac{1}{\frac{l^3}{12EI_x} + \frac{l}{GS_y}} \quad , \quad k_{iz} = \frac{ES}{l} \quad ; \quad k_{ix\theta_2} = \frac{1}{\frac{l^2}{6EI_y} + \frac{2}{GS_x}}$$

$$k_{iy\theta_1} = \frac{1}{\frac{l^2}{6EI_x} + \frac{2}{GS_y}} \quad ; \quad k_{i\theta_1} = \frac{\frac{l^2}{3EI_x} + \frac{1}{GS_y}}{\frac{l^2}{12EI_x} + \frac{1}{GS_y}} \cdot \frac{EI_x}{l} \quad ; \quad k_{i\theta_2} = \frac{\frac{l^2}{3EI_y} + \frac{1}{GS_x}}{\frac{l^2}{12EI_y} + \frac{1}{GS_x}} \cdot \frac{EI_y}{l} \quad ; \quad k_{i\theta_3} = \frac{GJ}{l}$$

On peut écrire la matrice de rigidité de chaque élément de contreventement par rapport à une **base centrale liée au plancher**, tout en passant par la matrice de passage  $D_i'$  dans  $R^6$  (Fig.4).

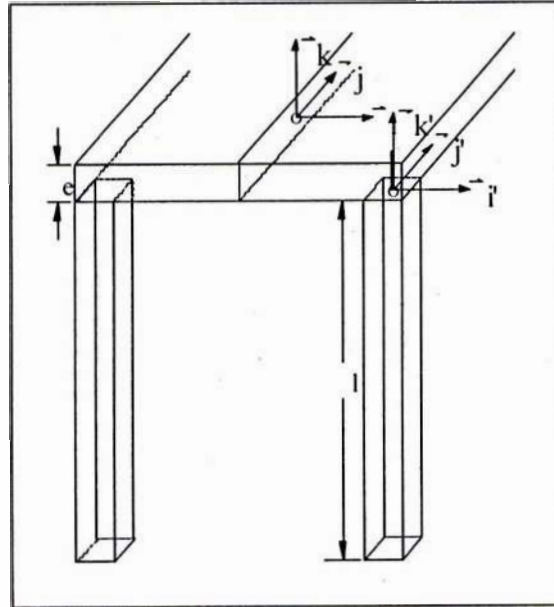


Figure 4 : Base locale liée à l'élément et la base Centrale liée au plancher

A partir de la définition de la matrice de passage entre deux bases, on aura :

$$D_i' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_i & y_i & 1 & 0 & 0 \\ z_i & 0 & -x_i & 0 & 1 & 0 \\ -y_i & x_i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Où  $x_i$ ,  $y_i$  et  $z_i$  sont les coordonnées de la section finale dans la base centrale.

La matrice de rigidité d'un élément  $i$  dans la base centrale est donc :

$$\tilde{K}_i = D_i' K_i D_i'^{-1} \quad (28)$$

et s'écrit:

$$\tilde{K}_i = \begin{bmatrix} 0 & -k'_{ix\theta_2} & -y_i k'_{ix} & k_{ix} & 0 & 0 \\ k'_{iy\theta_1} & 0 & x_i k'_{iy} & 0 & k_{iy} & 0 \\ y_i k'_{iz} & -x_i k'_{iz} & 0 & 0 & 0 & k_{iz} \\ k'_{i\theta_1} + y_i^2 k'_{iz} & -x_i y_i k'_{iz} & x_i k'_{iy\theta_1} & 0 & k'_{iy\theta_1} & y_i k'_{iz} \\ -x_i y_i k'_{iz} & k'_{i\theta_2} + x_i^2 k'_{iz} & y_i k'_{ix\theta_2} & -k'_{ix\theta_2} & 0 & -x_i k'_{iz} \\ x_i k'_{iy\theta_1} & y_i k'_{ix\theta_2} & k_{i\theta_3} + y_i^2 k'_{ix} + x_i^2 k'_{iy} & -y_i k_{ix} & x_i k_{iy} & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Avec :

$$k'_{ix\theta_2} = k_{ix\theta_2} - k_{ix} z_i$$

$$k'_{iy\theta_1} = k_{iy\theta_1} - k_{iy} z_i$$

$$k'_{i\theta_1} = k_{i\theta_1} - 2k_{iy\theta_1} z_i + k_{iy} z_i^2$$

$$k'_{i\theta_2} = k_{i\theta_2} - 2k_{ix\theta_2} z_i + k_{ix} z_i^2$$

Où  $z_i = -\frac{e_p}{2}$ ,  $e_p$  est l'épaisseur du plancher (épaisseur est uniforme).

La rigidité globale est déterminée à partir de la compatibilité des déformations au niveau de la liaison avec les planchers supposés rigides indéformables, c'est à dire les déplacements des éléments de contreventement sont identiques dans une base liée au plancher :

$$\chi_i = \chi_{pl} \quad \forall i = 1, 2, \dots, p \quad (30)$$

où  $p$  est le nombre d'éléments.

Les efforts globaux exercés par les différents éléments de contreventement sur le plancher sont :

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^p \vec{f}_i = \sum_{i=1}^p \tilde{K}_i \tilde{\chi}_i = \left( \sum_{i=1}^p \tilde{K}_i \right) \chi \quad (31)$$

la matrice de rigidité globale d'un système de contreventement écrite dans la base centrale d'un plancher est donc :

$$K = \sum_{i=1}^p \tilde{K}_i \quad (32)$$

soit matriciellement :

$$K_G = \begin{bmatrix} 0 & -k_{x\theta_2} & -k_x \tilde{y} & k_x & 0 & 0 \\ k_{y\theta_1} & 0 & k_y \tilde{x} & 0 & k_y & 0 \\ k_z \hat{y} & -k_z \hat{x} & 0 & 0 & 0 & k_z \\ k_{\theta_1} + k_z \hat{y}^2 & -k_z \hat{x} \hat{y} & k_{y\theta_1} \hat{x} & 0 & k_{y\theta_1} & k_z \hat{y} \\ -k_z \hat{x} \hat{y} & k_{\theta_2} + k_z \hat{x}^2 & k_{x\theta_2} \hat{y} & -k_{x\theta_2} & 0 & -k_z \hat{x} \\ k_{y\theta_1} \hat{x} & k_{x\theta_2} \hat{y} & k_{\theta_3} + k_y \tilde{x}^2 + k_x \tilde{y}^2 & -k_x \tilde{y} & k_y \tilde{x} & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Avec :

$$k_x = \sum_{i=1}^p k_{ix} \quad k_y = \sum_{i=1}^p k_{iy} \quad k_z = \sum_{i=1}^p k_{iz} \quad k_{\theta_1} = \sum_{i=1}^p k'_{i\theta_1} \quad k_{\theta_2} = \sum_{i=1}^p k'_{i\theta_2} \quad k_{\theta_3} = \sum_{i=1}^p k_{i\theta_3}$$

$$k_{x\theta_2} = \sum_{i=1}^p k'_{ix\theta_2} \quad k_{y\theta_1} = \sum_{i=1}^p k'_{iy\theta_1} \quad \tilde{x} = \frac{\sum_{i=1}^p x_i k_{iy}}{k_y} \quad \tilde{y} = \frac{\sum_{i=1}^p y_i k_{ix}}{k_x}$$

$$\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^p x_i k_{iz}}{k_z} \quad \hat{y} = \frac{\sum_{i=1}^p y_i k_{iz}}{k_z} \quad \hat{xy} = \frac{\sum_{i=1}^p x_i y_i k_{iz}}{k_z} \quad \dot{x} = \frac{\sum_{i=1}^p x_i k'_{iy\theta_1}}{k_{y\theta_1}} \quad \dot{y} = \frac{\sum_{i=1}^p y_i k'_{ix\theta_2}}{k_{x\theta_2}}$$

## 5-2-MATRICE MASSE

Elle se déduit de l'équation notée (9) écrite dans la base centrale. La matrice totale d'un étage est la somme de la matrice masse du plancher et les moitiés des matrices de masse du système de contreventement inférieur et du système de contreventement supérieur.

### 5-2-1-Matrice masse d'un élément de contreventement i

La matrice masse d'une poutre i écrite dans la base locale liée à l'élément s'exprime comme suit :

$$M_i = m_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ r_{x_i}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{y_i}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{z_i}^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

la matrice masse de l'élément  $i$  dans la base centrale liée au plancher est :

$$\tilde{M}_i = D'_i M_i D_i'^{-1} \quad (35)$$

De (27), (34) et (35) on écrit:

$$\tilde{M}_i = m_i \begin{bmatrix} 0 & z_i & -y_i & 1 & 0 & 0 \\ -z_i & 0 & x_i & 0 & 1 & 0 \\ y_i & -x_i & 0 & 0 & 0 & 1 \\ r_{x_i}^2 + z_i^2 + y_i^2 & -y_i x_i & -z_i x_i & 0 & -z_i & y_i \\ -y_i x_i & r_{y_i}^2 + z_i^2 + x_i^2 & -z_i y_i & z_i & 0 & -x_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & r_{z_i}^2 + y_i^2 + x_i^2 & -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix}$$

où  $r_{x_i}$ ,  $r_{y_i}$  et  $r_{z_i}$  sont les rayons de giration de la poutre  $i$ .

#### a) Matrice masse d'un élément du système de contreventement supérieur

Pour l'étage supérieur  $z_i = \frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}$

$$\tilde{M}_i = m_i \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) & -y_i & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) & 0 & x_i & 0 & 1 & 0 \\ y_i & -x_i & 0 & 0 & 0 & 1 \\ r_{x_i}^2 + \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right)^2 + y_i^2 & -x_i y_i & -\left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) x_i & 0 & -\left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) & y_i \\ -x_i y_i & r_{y_i}^2 + \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right)^2 + x_i^2 & -\left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) y_i & \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) & 0 & -x_i \\ -\left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) x_i & -\left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) y_i & r_{z_i}^2 + x_i^2 + y_i^2 & -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix}$$

### b) Matrice masse d'un élément du système de contreventement inférieur

Pour l'étage inférieur  $z_i = -\left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right)$

$$\tilde{M}_i = m_i \begin{bmatrix} 0 & -\left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) & -y_i & 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) & 0 & x_i & 0 & 1 & 0 \\ y_i & -x_i & 0 & 0 & 0 & 1 \\ r_{x_i}^2 + \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right)^2 + y_i^2 & -x_i y_i & \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) x_i & 0 & \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) y_i & \\ -x_i y_i & r_{y_i}^2 + \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right)^2 + x_i^2 & \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) y_i & -\left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) & 0 & -x_i \\ \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) x_i & \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) y_i & r_{z_i}^2 + x_i^2 + y_i^2 & -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix}$$

### 5-2-2-Matrice masse du plancher

La matrice masse du plancher dans la base centrale liée au plancher s'écrit :

$$\tilde{M}_{pl} = m_{pl} \begin{bmatrix} 0 & -z & -y & 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ y & -x & 0 & 0 & 0 & 1 \\ r_x^2 + y^2 + z^2 & -xy & zx & 0 & z & y \\ -xy & r_y^2 + x^2 + z^2 & zy & -z & 0 & -x \\ zx & zy & r_z^2 + x^2 + y^2 & -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

Dans le cas où l'origine est confondu avec le centre de masse on aura :  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ , ce qui est généralement le cas.

## 6-EQUATIONS DE LA DYNAMIQUE SISMIQUE

Les matrices rigidités et masses sont calculées dans des bases liées aux planchers pour chaque étage, et qui sont différentes, un changement de base assure le passage d'un étage à un autre.

### 6-1-déplacements relatifs

Soient  $B_n$  une base de Eq relative à repère orthonormé  $R_n$  lié au solide  $S_n$  et  $H_n$  la matrice de passage dans Eq de la base  $B_{n-1}$  à la base  $B_n$ , et soit  $x_n$  le déplacement de solide  $S_n$  dans la base  $B_n$ . Le déplacement relatif de  $S_{n-1}$  par rapport à  $S_n$  dans la base  $B_n$  est :

$$\delta_n = x_n - H_n^{-1} x_{n-1}$$

Il est de même pour le déplacement relatif de  $S_{n+1}$  par rapport à  $S_n$  dans la base  $B_n$  qui est :

$$\delta_{n+1} = x_n - H_{n+1} x_{n+1}$$

La matrice de rigidité associée à  $\delta_n$  dans la base  $B_n$  est  $K_n$ , celle associée à  $\delta_{n+1}$  dans la base  $B_{n+1}$  est  $K_{n+1}$  donc  $H_{n+1} K_{n+1} H_{n+1}^{-1}$  dans la base  $B_n$ .

Ci-dessous la figure 5 représentant les différents déplacements.

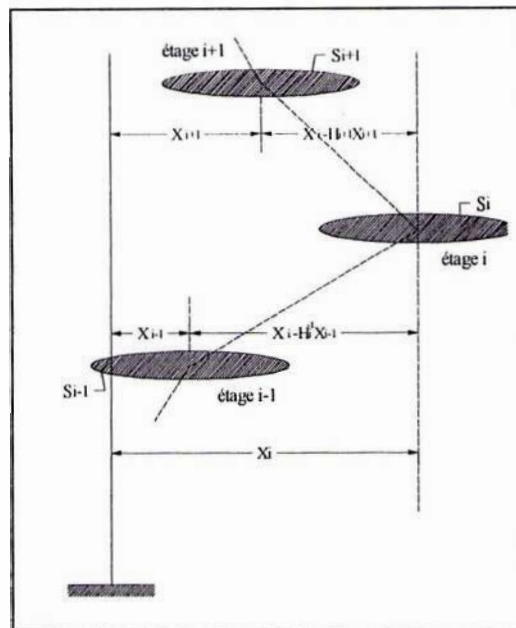


Figure 5 : Le déplacement relatif de deux étages

### 6-2-FORCE DE RAPPEL

La force de rappel agissant sur le solide  $S_n$  est alors :

$$\begin{aligned} F_n &= -K_n \delta_n - H_{n+1} K_{n+1} H_{n+1}^{-1} \delta_{n+1} \\ &= +(K_n H_n^{-1}) x_{n-1} - K_n x_n - (H_{n+1} K_{n+1} H_{n+1}^{-1}) x_n + H_{n+1} K_{n+1} H_{n+1}^{-1} H_{n+1} x_{n+1} \\ &= +(K_n H_n^{-1}) x_{n-1} - (H_{n+1} K_{n+1} H_{n+1}^{-1} + K_n) x_n + H_{n+1} K_{n+1} x_{n+1} \end{aligned}$$

sur la figure 5,  $x_i$  représente le déplacement du solide  $S_i$ , qui a en fait six degrés de liberté. Les déplacements n'appartiennent pas à la même base d'où l'intervention des matrices  $H_i$ , quand il s'agit de comparer deux déplacements consécutifs.

### 6-3-EXPRESSION DE LA MATRICE DE PASSAGE

Si les deux repères liés aux deux solides consécutifs sont choisis de telle sorte que l'on puisse passer d'un repère à l'autre par une translation alors la matrice de changement de base hexadimensionnelle est :

$$H_i = \begin{bmatrix} P & 0 \\ \vec{h}_i \wedge & P \end{bmatrix}$$

où  $\vec{h}_i = -h_i \vec{k}$  ( $h_i$  hauteur de l'étage) est le vecteur de translation du repère  $R_{i-1}$  au repère  $R_i$ .

où encore :

$$H_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -h & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 6-4-APPLICATION DU PRINCIPE FONDAMENTAL

Soient  $u_g$  le déplacement du sol,  $x_i$  celui de  $S_i$ , par rapport au sol et  $\chi_i$  le déplacement total de  $S_i$ , le principe fondamental de la dynamique, s'écrit alors :

$$\begin{aligned} M_i \gamma_i &= M_i \frac{d^2 \chi_i}{dt^2} + \left[ \frac{d\chi_i}{dt}, M_i \frac{d\chi_i}{dt} \right]; \text{ avec : } \chi_i \approx x_i + u_g \\ &= M_i \frac{d^2(x_i + u_g)}{dt^2} + \left[ \frac{d(x_i + u_g)}{dt}, M_i \frac{d(x_i + u_g)}{dt} \right] \\ &= M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + M_i \frac{d^2 u_g}{dt^2} + \left[ \frac{dx_i}{dt}, M_i \frac{dx_i}{dt} \right] + \left[ \frac{du_g}{dt}, M_i \frac{dx_i}{dt} \right] + \left[ \frac{dx_i}{dt}, M_i \frac{du_g}{dt} \right] \end{aligned}$$



### 6-5-SYSTEME DIFFERENTIEL

L'équation différentielle du 2<sup>ème</sup> ordre obtenue, qui se ramène à un système du premier ordre en le vecteur  $\left[ X, \frac{dX}{dt} \right]$ , peut être résolue par la méthode numérique de Runge-Kutta à quatre pas.

Nous pouvons écrire donc le système différentiel de  $2x(6N)$  équations hexadimensionnelles comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i \\ \frac{dv_i}{dt} = -M_i^{-1} \left( [v_i, M_i v_i] + [\dot{u}_g, M_i v_i] - [M_i \dot{u}_g, v_i] - (K_i H_i^{-1}) x_{i-1} + (\tilde{K}_{i+1} + K_i) x_i - (H_{i+1} K_{i+1}) x_{i+1} + M_i \ddot{u}_g \right) \end{cases} \\ i = 1, 2, \dots, N$$

si on pose pour chaque étage  $i$  :  $v_i = \begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ v(3) \\ v(4) \\ v(5) \\ v(6) \end{bmatrix}$  tel que :  $\overline{\omega}_v = \begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ v(3) \end{bmatrix}$  et  $\overline{v} = \begin{bmatrix} v(4) \\ v(5) \\ v(6) \end{bmatrix}$

et  $M_i v_i = \begin{bmatrix} mv(1) \\ mv(2) \\ mv(3) \\ mv(4) \\ mv(5) \\ mv(6) \end{bmatrix}$  tel que :  $\overline{\omega}_{mv} = \begin{bmatrix} mv(1) \\ mv(2) \\ mv(3) \end{bmatrix}$  et  $\overline{mv} = \begin{bmatrix} mv(4) \\ mv(5) \\ mv(6) \end{bmatrix}$

alors et d'après la définition du produit vectoriel dans Eq :

$$[v_i, M_i v_i] = \begin{pmatrix} \vec{\omega}_v \wedge \vec{\omega}_{mv} \\ \vec{\omega}_v \wedge \vec{mv} - \vec{\omega}_{mv} \wedge \vec{v} \end{pmatrix}$$

on aura donc sous forme vectoriel :

$$[v_i, M_i v_i] = \begin{pmatrix} v(2) \cdot mv(3) - v(3) \cdot mv(2) \\ v(3) \cdot mv(1) - v(1) \cdot mv(3) \\ v(1) \cdot mv(2) - v(2) \cdot mv(1) \\ v(2) \cdot mv(6) - v(3) \cdot mv(5) - mv(2) \cdot v(6) + mv(3) \cdot v(5) \\ v(3) \cdot mv(4) - v(1) \cdot mv(6) - mv(3) \cdot v(4) + mv(1) \cdot v(6) \\ v(1) \cdot mv(5) - v(2) \cdot mv(4) - mv(1) \cdot v(5) + mv(2) \cdot v(4) \end{pmatrix}$$

de la même manière et d'une façon pratique on peut avoir les crochets de l'équation de la dynamique.

### 6-6-AMORTISSEMENT DE RAYLEIGH[23,24]

L'amortissement de Rayleigh est pris en compte par l'ajout d'un terme **combinaison linéaire des opérateurs de masse et de raideur**:

$$C = \alpha M + \beta K$$

L'équation du mouvement (sans termes complémentaires) s'écrit :

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} + C \frac{dX}{dt} + KX = 0$$

soit, en projetant sur la base des modes propres :

$$m_i \ddot{\phi}_i + (\alpha m_i + \beta k_i) \dot{\phi}_i + k_i \phi_i = 0$$

les amortissements modaux réduits sont donc donnés par:

$$\xi_i = \frac{\alpha + \beta \omega_i^2}{2\omega_i}$$

Le couple  $(\alpha, \beta)$  peut être ajusté pour que les  $\xi_i$  soient à peu près constants dans la gamme de fréquence considérée.

Pratiquement, on procède la manière suivante:

- on commence par calculer les fréquences propres du système non amorti;
- pour  $n$  modes, on se fixe un coefficient d'amortissement, en l'occurrence 5% pour le premier et le dernier mode;
- on calcule  $\alpha$  et  $\beta$  par la formule suivante:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{2}{\omega_2 - \omega_1} \begin{bmatrix} \omega_2 & -\omega_1 \\ -\frac{1}{\omega_2} & \frac{1}{\omega_1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

## 7-METHODE DE RUNGE-KUTTA[25,26]

Soit  $f$  une fonction continue et lipschitzienne de  $[a,b] \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha & \text{réel} \end{cases}$$

Il existe une fonction  $y$  de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  solution unique du problème.

La résolution du problème peut se faire à l'aide de la méthode itérative Runge-Kutta à quatre pas.

La méthode de Runge-Kutta classique est donnée par le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n, h) \\ y_0 = \alpha \\ \text{avec } F(x, y, h) = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \\ k_1 = f(x, y) \\ k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 = f(x + h, y + hk_3) \end{array} \right.$$

où  $F$  est une fonction de  $[a, b] \times \mathbb{R} \times [0, h]$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $h$  est le pas tel que  $h = \frac{b-a}{N}$ .

## 8-CONCLUSION

La théorie développée ci-dessus, s'applique aux structures de bâtiments soumis à une excitation sismique. Elle est puissante et permet de déterminer les six composantes du mouvement de la structure à chaque étage. De ce fait le mouvement de torsion pour les constructions asymétriques sera mis en évidence ainsi que son influence.

Dans cette formulation, la prise en compte de l'effet de l'interaction sol-structure n'est pas considéré. Nous nous proposons de le faire dans une prochaine étape (voir chapitre 4).

## **CHAPITRE 3**

### **MISE EN ŒUVRE NUMERIQUE**

#### **1-INTRODUCTION**

La théorie présentée dans le chapitre précédent a été programmé et mise en œuvre sur quelques exemples tirés de la bibliographie. Deux exemples d'application seront aussi traités. Dans ce chapitre nous donnerons :

- Les caractéristiques des bâtiments utilisés pour la validation ainsi que les principaux résultats de simulation.
- Les caractéristiques des structures étudiées en exemples d'application ainsi que les résultats obtenus.
- Et bien sûr les conclusions qui en découlent.

## 2-PROGRAMMATION

La méthode présentée dans le chapitre 2 a été programmé en langage Fortran sous Visual Fortran. Nous donnons ci-après l'organigramme du programme :

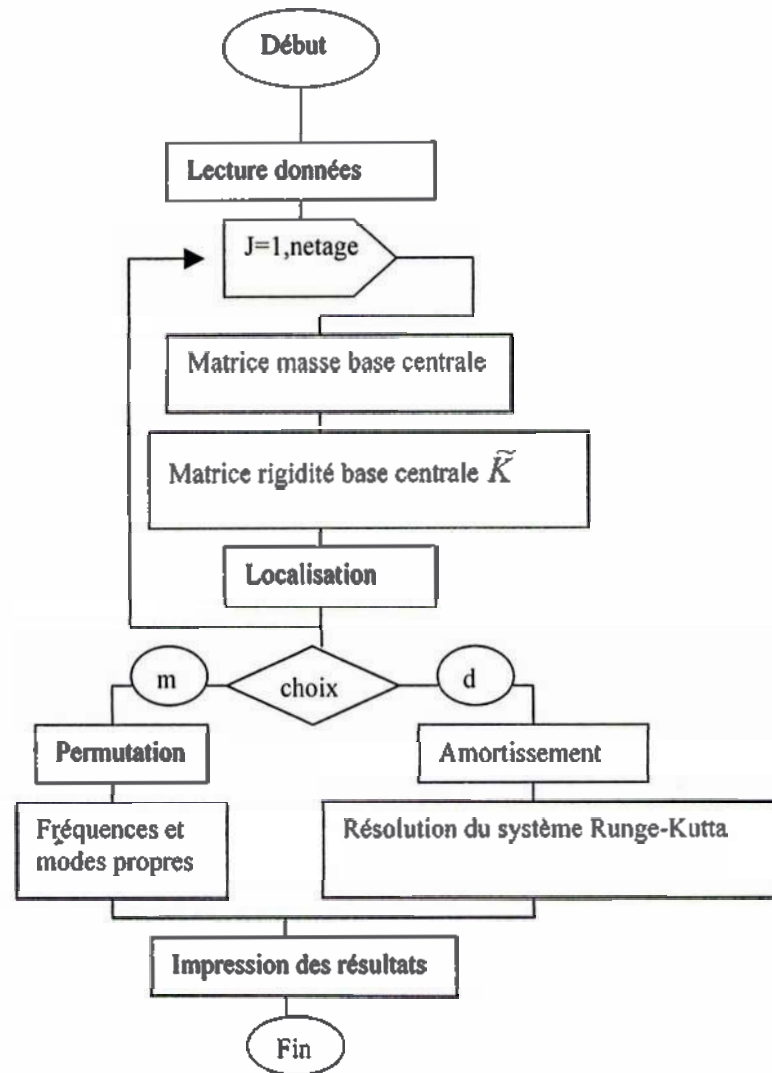


Schéma 1 : Organigramme du programme

Cet organigramme présente le calcul des matrices masse et rigidité globales d'une structure et la détermination des fréquences et modes propres ainsi que des déplacements.

### 3-EXEMPLES DE VALIDATION

Les exemples traités sont des exemples tirés de la littérature. Il s'agit pour le premier exemple d'un bâtiment construit par la société Electricité de France (EDF) pour une centrale nucléaire. Le second exemple est un bâtiment du centre de recherche ISPRA en France. Enfin le troisième exemple est une couverture champignon. Ces structures seront excitées par l'accélérogramme du séisme de Morgan Hill. Les caractéristiques de chacune de ces structures sont données ci-après :

#### 3-1-BATIMENT EDF

Ce bâtiment est de forme rectangulaire. Il est constitué d'un radier, de quatre planchers identiques, de voiles périphériques, d'un voile central et suivant les étages d'autres voiles secondaires (voir figure 1). L'épaisseur des planchers est  $e=0.80\text{m}$ , l'épaisseur du radier est  $e'=1.5\text{ m}$ , la hauteur entre deux planchers est  $h=3\text{m}$ , la longueur du bâtiment est  $L=30\text{m}$ . la masse volumique du béton  $\rho = 2500\text{ kg/m}^3$ , le module d'Young  $E=4.1 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$  et le coefficient de Poisson vaut :  $\nu = 0.2$

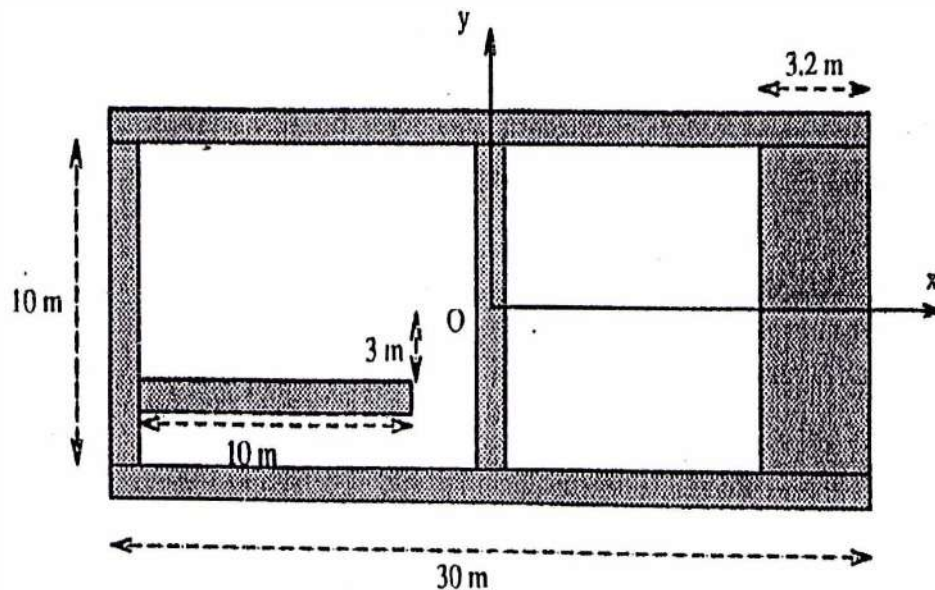


Fig.1.a. Vue en plan du 1<sup>er</sup> étage

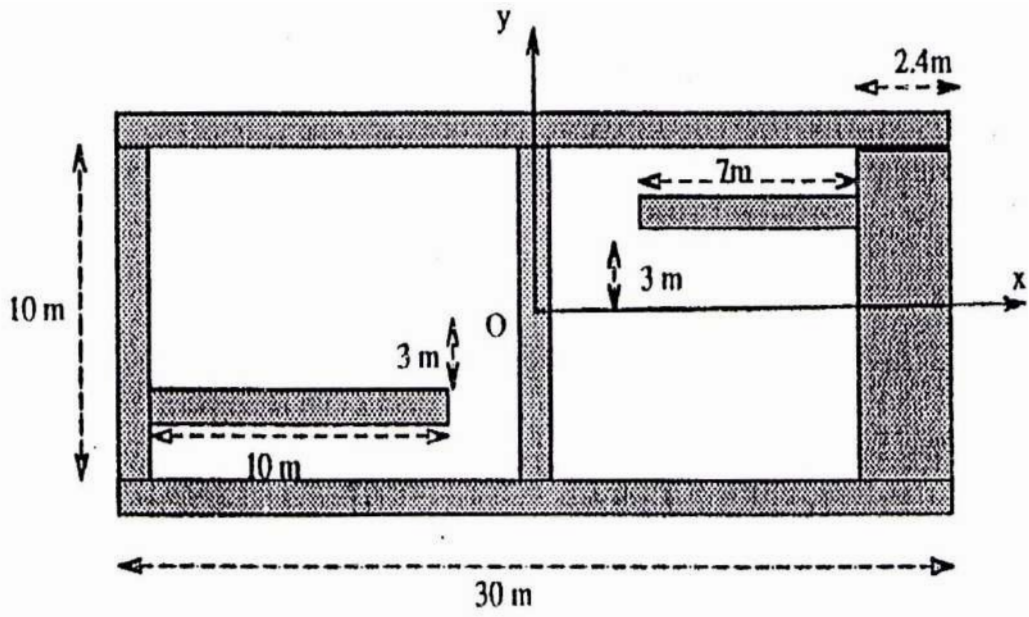


Fig.1.b. Vue en plan du 2<sup>ème</sup> étage

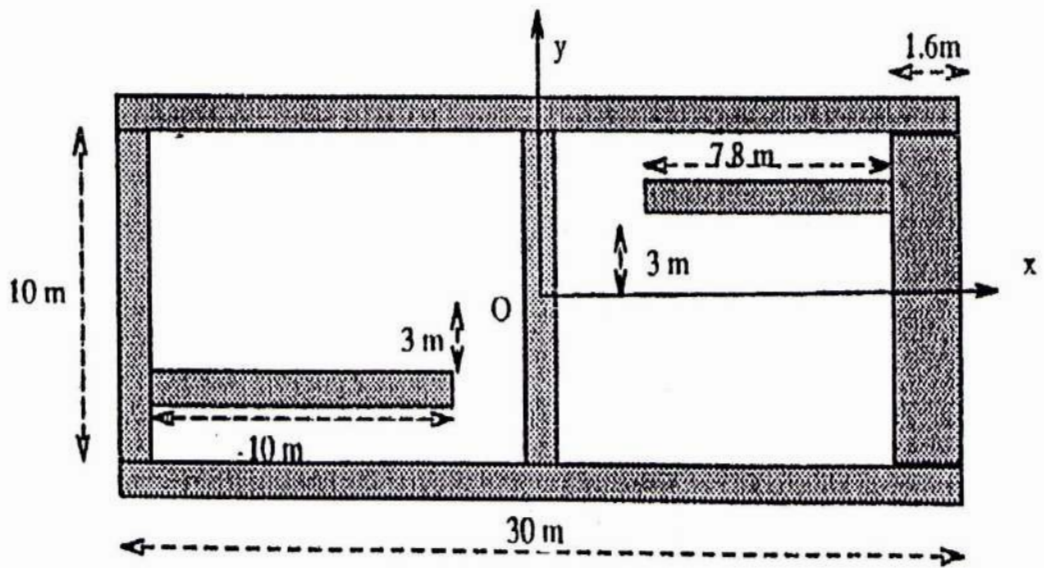
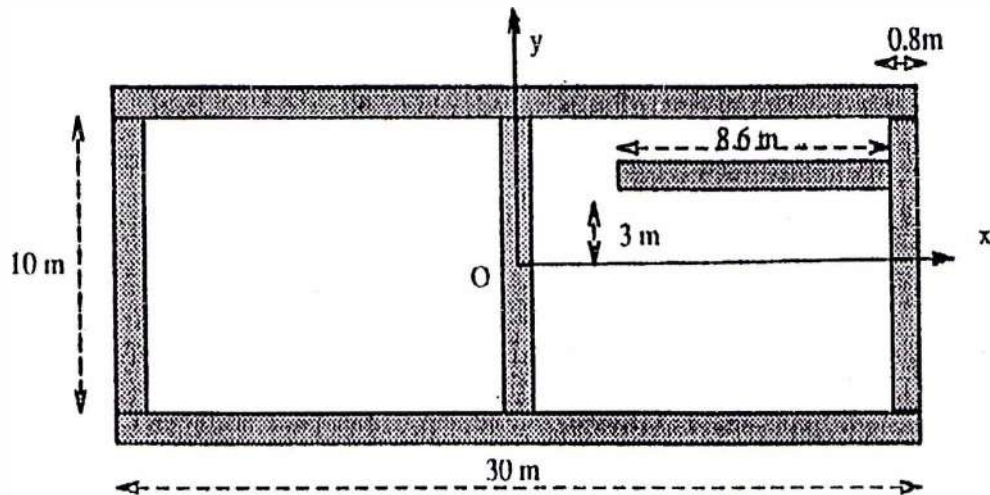


Fig.1.c. Vue en plan du 3<sup>ème</sup> étage

Fig.1.d. Vue en plan du 4<sup>ème</sup> étage

### 3-2-BATIMENT ISPRA

C'est un bâtiment de base carré (10m x 10m) à quatre étages, constitué : d'un radier d'épaisseur 0.75 m, de quatre planchers identiques et d'un système de contreventement par portiques formés de poutres et de poteaux. Les planchers sont constitués de dalles de 0.15 m d'épaisseur reposant sur le réseau de poutres croisés (voir figure 2). Les autres caractéristiques sont: module d'Elasticité  $E=3.05 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ , coefficient de Poisson :  $\nu = 0.2$  et masse volumique du béton  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$

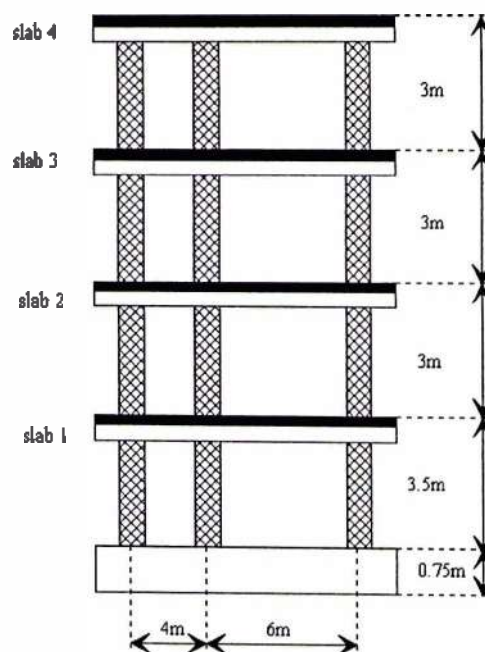


Figure 2 : Bâtiment ISPRA 4 étages

### 3-3-COUVERTURE CHAMPIGNON

Un projet d'architecte prévoit une couverture exécutée par un ensemble d'éléments de type champignon, réalisés en béton armé. Chaque champignon est constitué par quatre paraboloides hyperboliques surbaissés. Le calcul statique ayant été effectué on cherche à savoir si ce type de couverture peut être détruit par un individu malveillant, utilisant le phénomène de résonance pour arriver à ses fins. On schématise ce champignon par une console circulaire creuse de hauteur  $h$ , de diamètres extérieur  $2R$  et intérieur  $2r$ , surmontée d'une plaque carrée de côté  $2a$  et d'épaisseur  $e$  (fig.3).

Données géométriques :

$e=0.10$  m ;  $2a=12.00$  m ;  $h=9.00$  m ;  $2R=0.45$  m ;  $2r=0.10$  m

Données physiques :

$\rho=2500$  kg/m<sup>3</sup> ;  $G=1.3 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>,  $E=3.0 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>

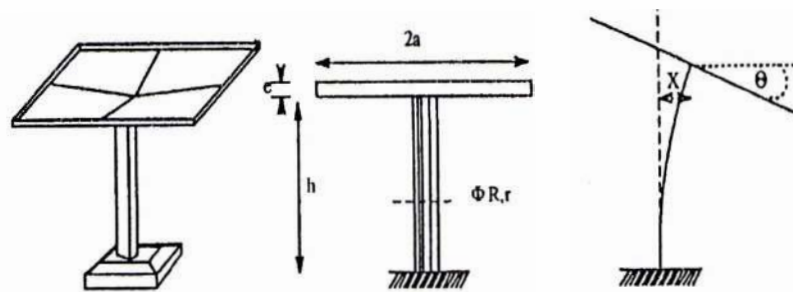


Figure 3 : Le modèle couverture champignon

## 4-EXEMPLES D'APPLICATION

Sur le même modèle que le paragraphe précédent, nous allons donner les caractéristiques des deux exemples traités dans le cadre de la présente étude. Le premier exemple sera excité par le séisme de Morgan Hill, quant au second exemple, il sera soumis à l'accélerogramme du séisme de Aïn Temouchent.

### 4-1-PLANCHER SUR TROIS POTEAUX

La structure est un plancher carré de côté  $L=10$  m, et d'épaisseur 0.40 m, reposant sur trois colonnes identiques en trois points (voir fig.4). Les caractéristiques de chaque colonne sont :

Longueur  $L'=10\text{m}$ , section transversale carrée d'arête  $a=0.39\text{m}$ , masse volumique  $\rho=2500\text{kg/m}^3$ , module d'Young  $E=4.0 \times 10^{10}\text{N/m}^2$ , coefficient de Poisson  $\nu=0.2$

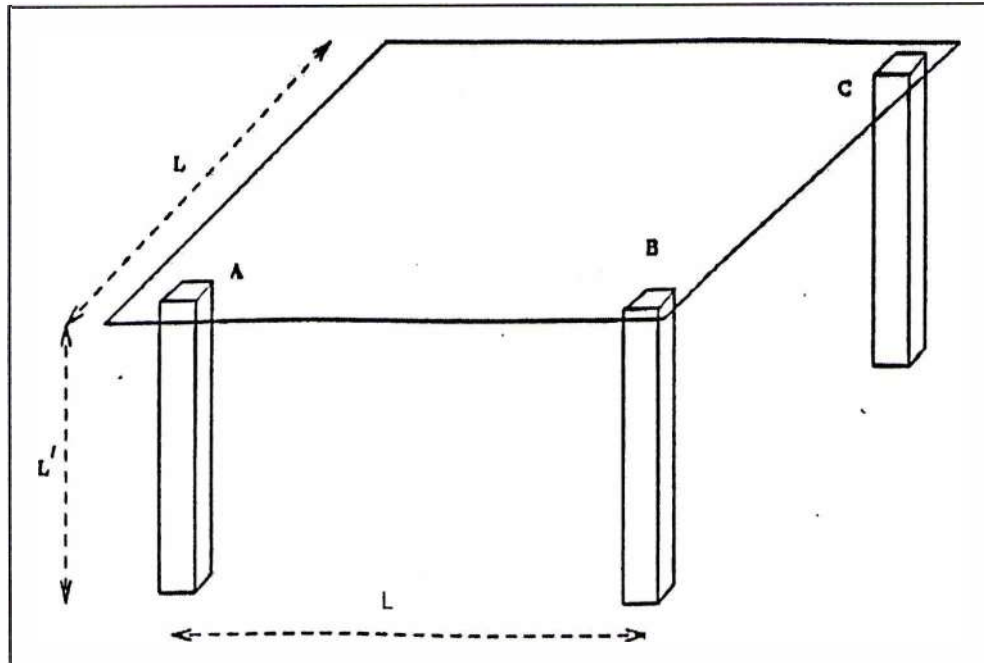


Figure 4 : Plancher sur trois poteaux

#### 4-2-BATIMENT LOGEMENTS DE FONCTION LYCEE BACHIR EL IBRAHIMI DE AIN TEMOUCHENT

C'est un bâtiment en s/sol et R+4 constitué : d'un radier d'épaisseur 0.75 m, de six planchers identiques et d'un système de contreventement par portiques formés de poutres et de poteaux. Les planchers sont constitués de dalles de 0.20 m d'épaisseur reposant sur le réseau de poutres croisés (voir figure 5). La structure est excitée par les enregistrements du séisme de Ain Témouchent. Les autres caractéristiques sont:

- module d'Elasticité  $E=3.216 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
- coefficient de Poisson :  $\nu = 0.2$
- masse volumique du béton  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$

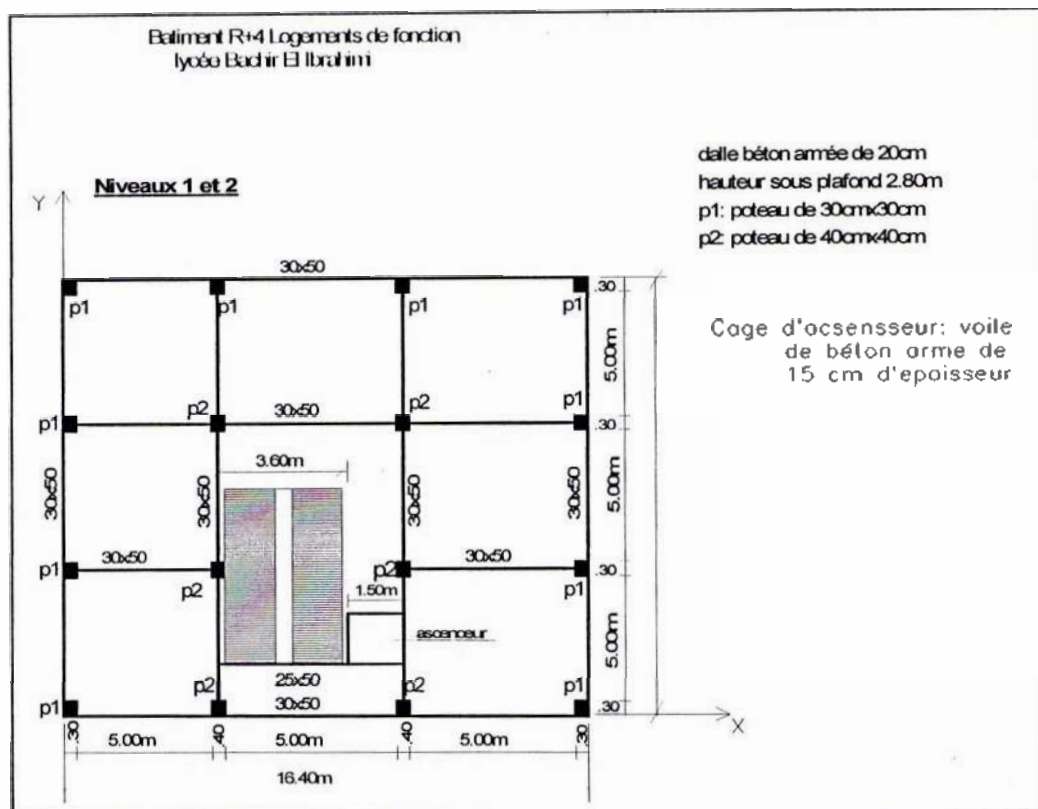


Fig. 5.a. Vue en plan des niveaux 1 et 2

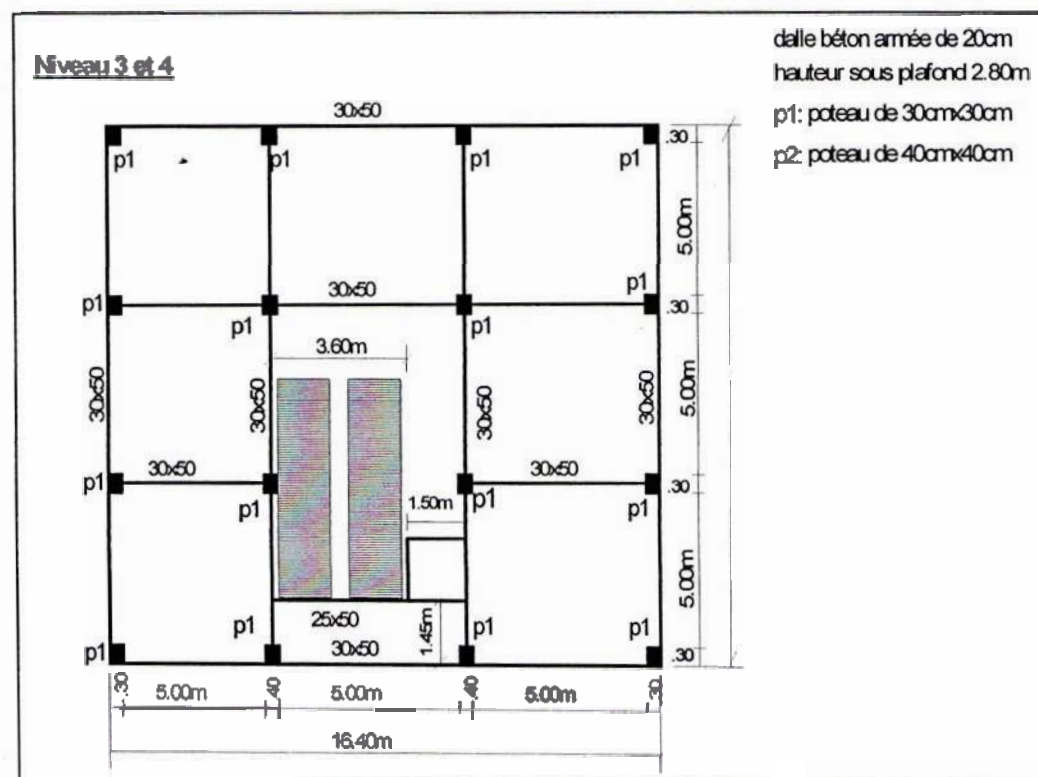


Fig. 5.b. Vue en plan des niveaux 3 et 4

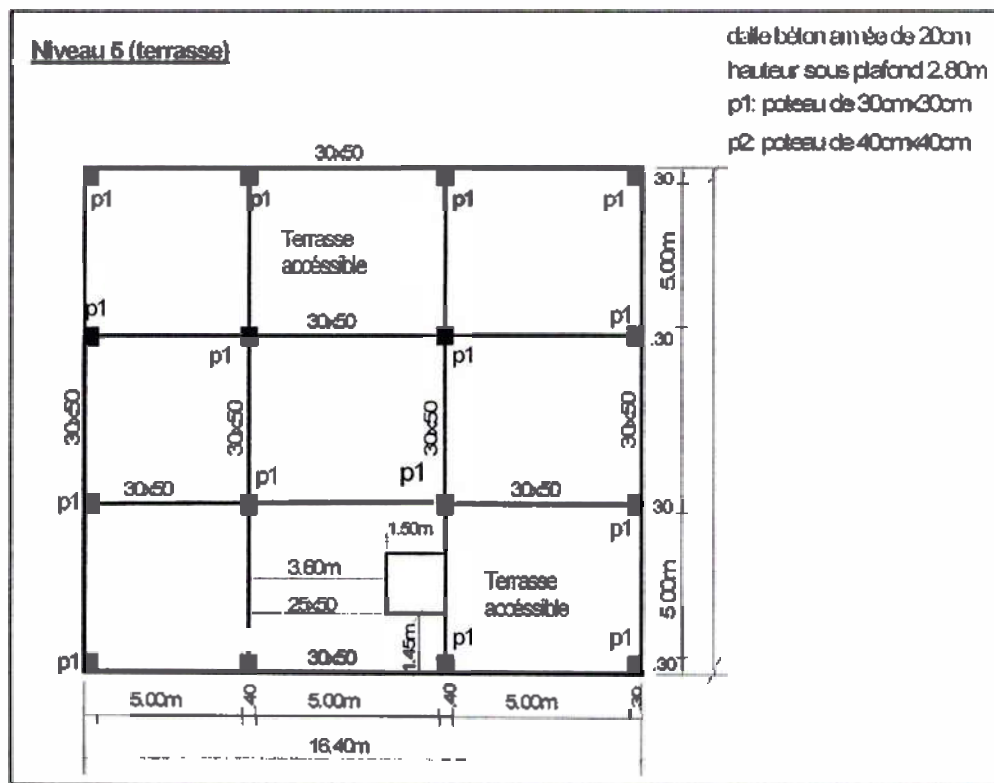


Fig. 5.c. Vue en plan du niveau 5

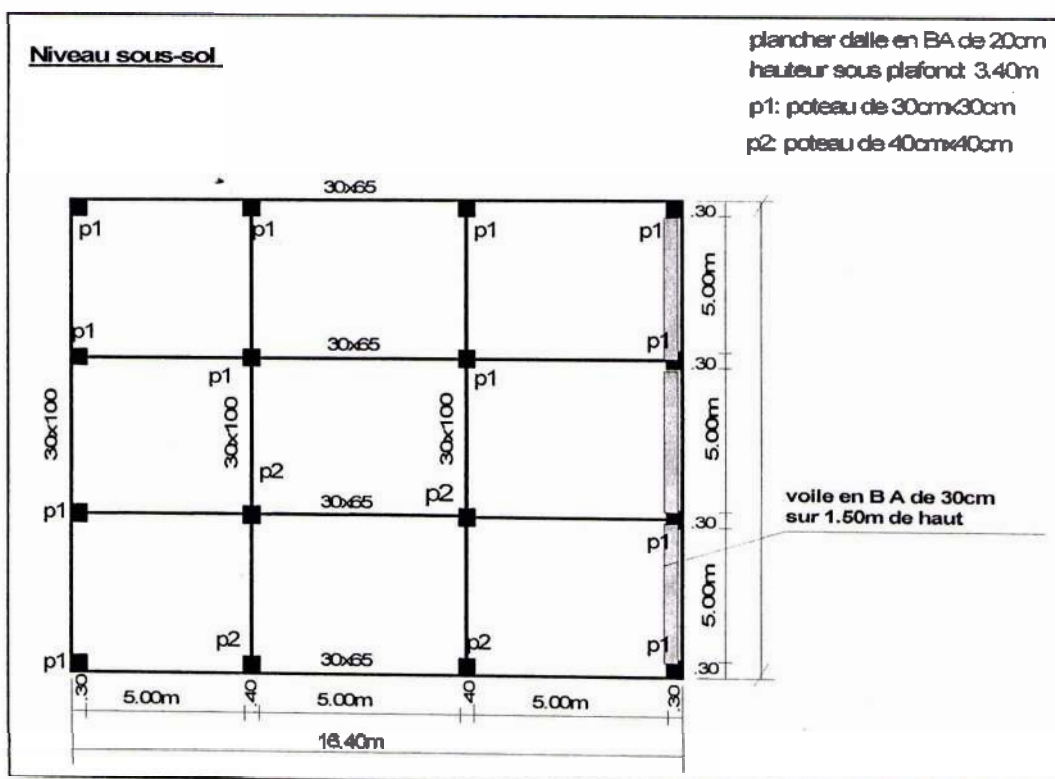


Fig. 5.d. Vue en plan du sous-sol

## 5-RESULTATS

Dans ce qui suit, nous allons donner les résultats obtenus par le modèle développé dans le chapitre deux, cela pour chacun des exemples de validation et d'application présentés auparavant.

### 5-1-BATIMENT EDF

Il s'agit du premier exemple de validation de notre étude les résultats obtenus se résument comme suit :

#### a) Fréquences propres

Les fréquences propres ont été déterminées en utilisant trois méthodes : a) par instrumentation, b) par éléments finis (MEF) et c) par le modèle utilisé. Le tableau ci-dessous illustre les résultats obtenus :

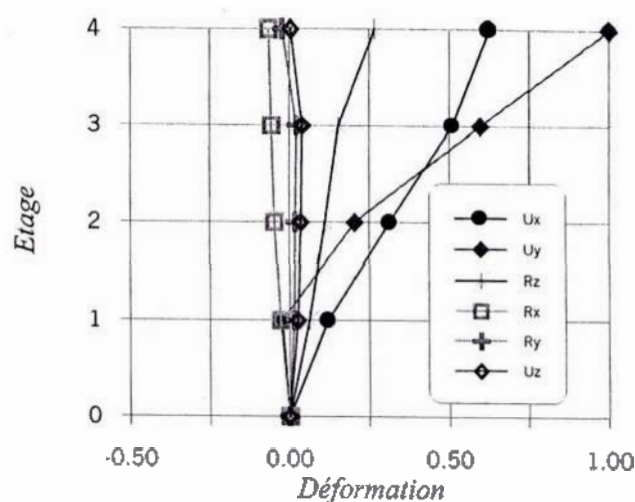
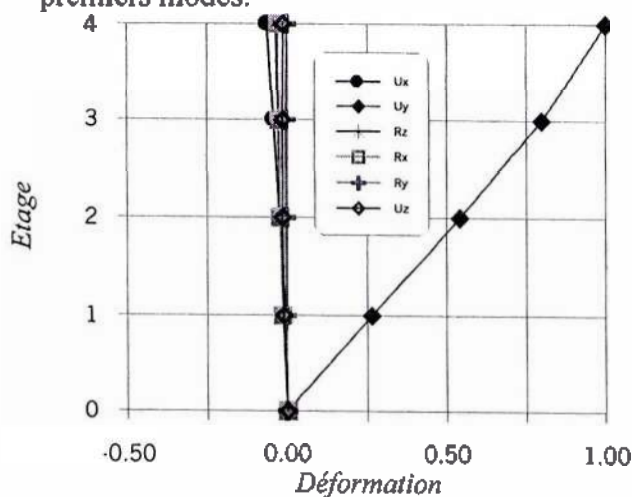
Numéro du mode	Modèle mis en œuvre	MEF (Castem 2000)*	Instrumentation EDF*
1	17.35 Hz	15.82 Hz	17.48 Hz
2	26.45 Hz	23.49 Hz	27.40 Hz
3	28.82 Hz	25.85 Hz	27.81 Hz

Tableau 1 : Fréquences obtenues pour le bâtiment EDF

\* Ces valeurs sont tirées d'un rapport interne EDF

#### b) Déformations

Nous présentons ci-après, les six déformations de chaque étage et ceci pour les trois premiers modes.



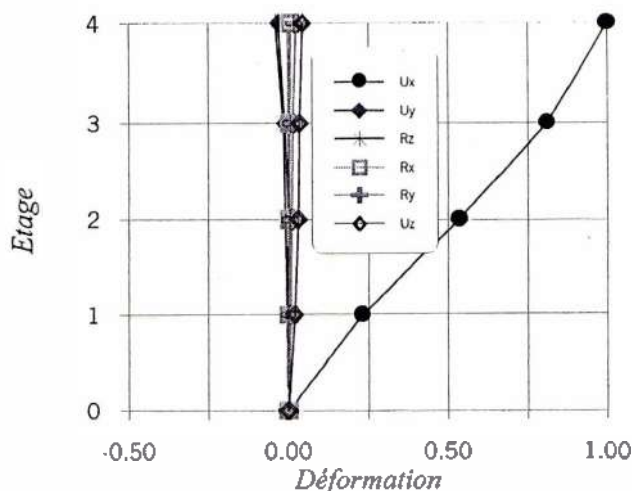


Figure 8 : 3<sup>ème</sup> mode  $f=28.82$  Hz

**c) Déplacements**

Nous allons donner quelques déplacements obtenus pour les deux cas de système amorti et non amorti.

Nous présentons la translation selon l'axe y au deuxième étage ainsi que la torsion au niveau du quatrième étage, ceci pour les deux cas de figure : système non amorti et système amorti. Sachant qu'on peut obtenir n'importe quel déplacement pour n'importe quel étage.

La transformée de Fourier des déplacements obtenus, permet de mettre en évidence la fréquence du mode dominant.

**Le déplacement en y de 2<sup>ème</sup> étage**

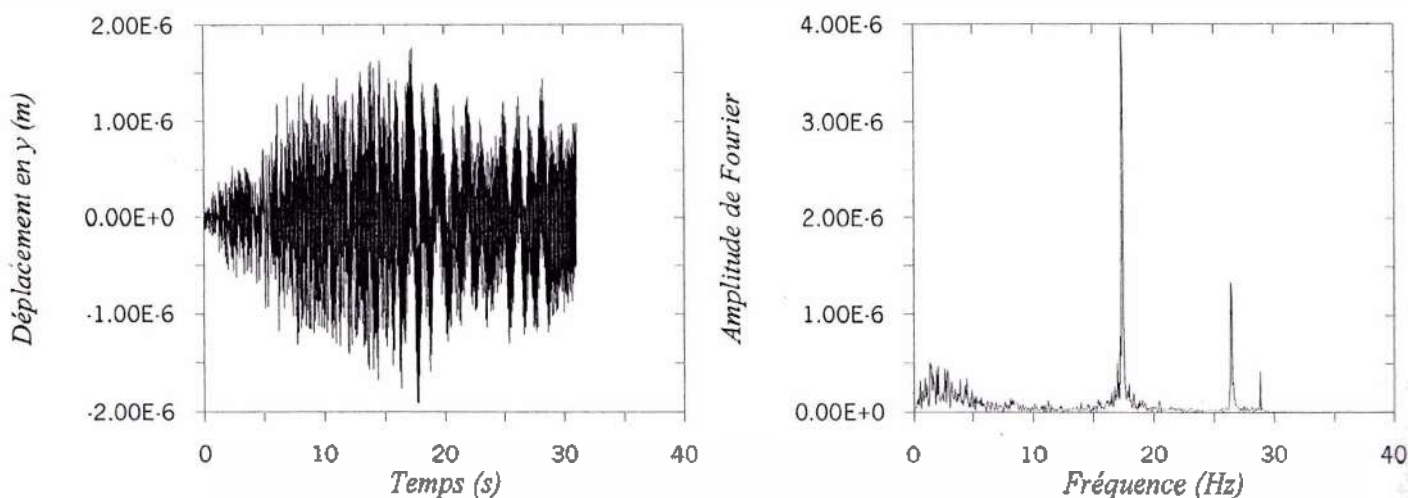


Figure 9 : Le déplacement en y 2<sup>ème</sup> étage (système non amorti)

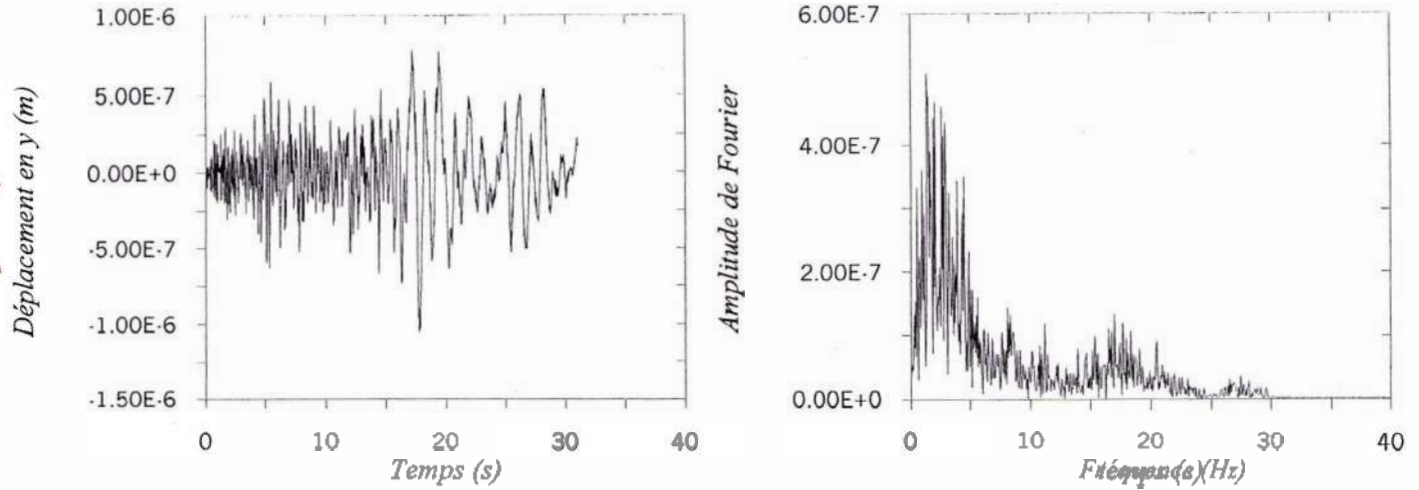


Figure 10 : Le déplacement en y 2<sup>ème</sup> étage (système amorti  $\xi=5\%$ )

**La torsion en 4<sup>ème</sup> étage**

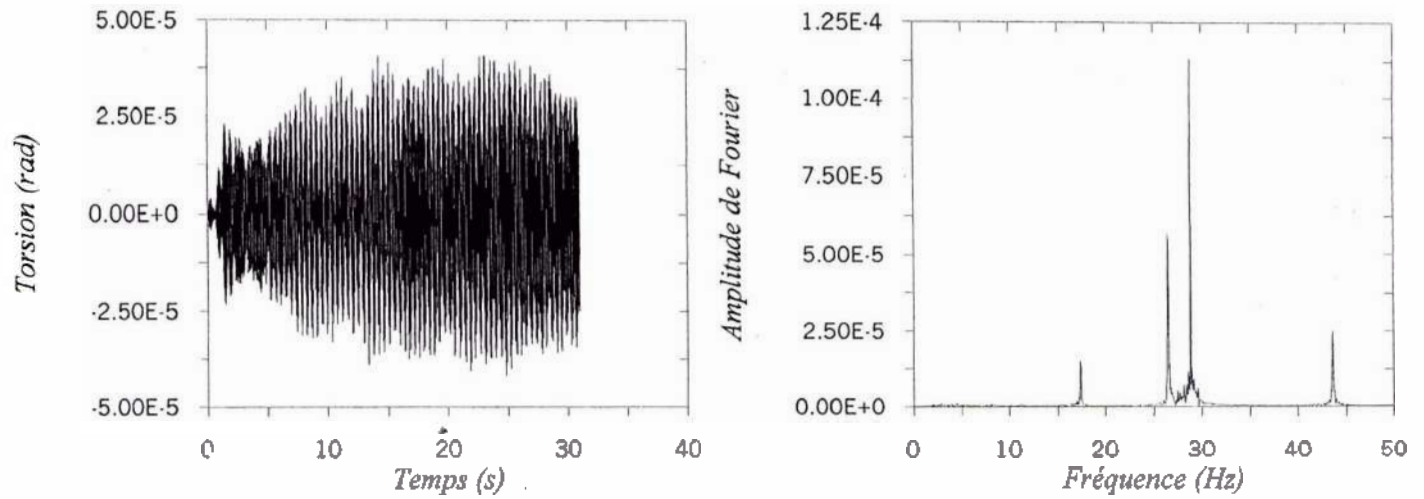


Figure 11 : La torsion 4<sup>ème</sup> étage (système non amorti)

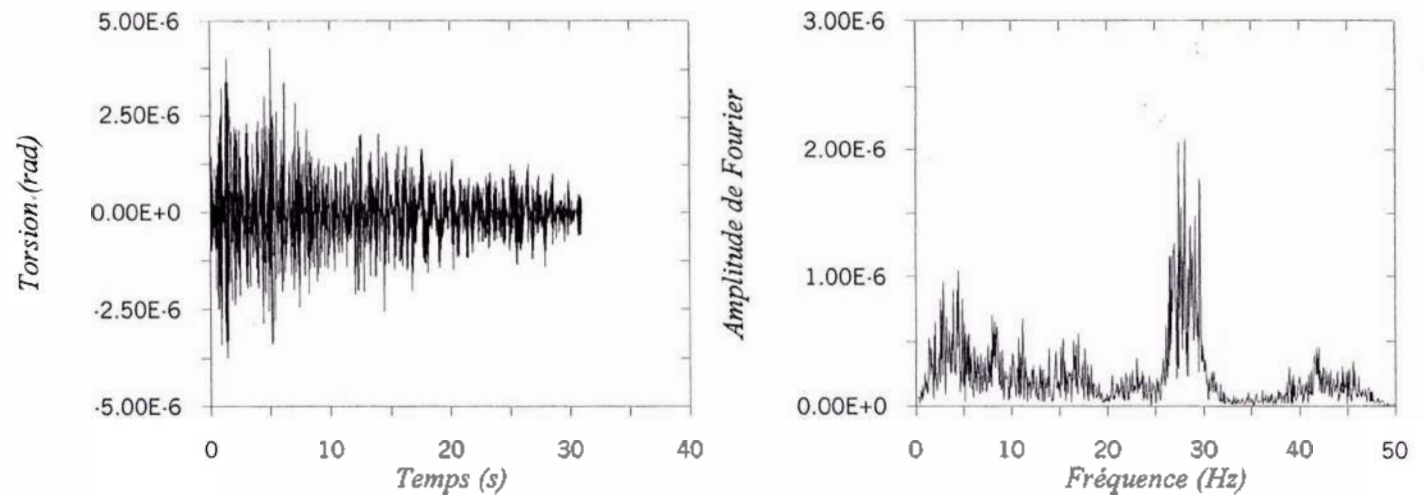


Figure 12 : La torsion 4<sup>ème</sup> étage (système amorti  $\xi=5\%$ )

#### d) Conclusions

Nous remarquons que les fréquences identifiées par le modèle proposé sont plus proches de celles obtenues par instrumentation du bâtiment, que de celles obtenues par le Castem2000. Castem2000 étant un logiciel d'éléments finis développé par le Commissariat à l'énergie Atomique (CEA) en France. Les résultats obtenus dans ce cas sont plus proche de la réalité que ceux obtenus par un logiciel d'éléments finis.

On remarque que pour le cas de la fréquence fondamentale, la déformée selon l'axe y est prépondérante par rapport aux autres déformées.

Pour la deuxième fréquence, la déformée selon y, y est aussi prépondérante pour le troisième et le quatrième étage, pour le deuxième et le premier étage c'est la déformée selon x qui est prépondérante. On constate aussi que l'effet de la torsion n'est pas négligeable pour ce deuxième mode de vibration, cet effet augmente au fur et à mesure que l'on monte dans les étages.

Enfin, nous pouvons obtenir les six déplacements de notre bâtiment à chacun de ses étages, ceci aussi bien pour un système amorti que pour un système non amorti. La transformée de Fourier de ces déplacements montre que nos résultats sont justes, puisque nous retrouvons les fréquences du système.

### 5-2-BATIMENT ISPRA

C'est le deuxième exemple de validation de notre étude. Les résultats obtenus seront présentés selon le même schéma que pour le bâtiment EDF.

#### a) Fréquences propres

Ce bâtiment a été testé par deux autres codes de calcul : CESAR (LCPC) et CASTEM 2000 (CEA). Nous donnons dans le tableau 2 les fréquences obtenues par ces deux méthodes ainsi par le modèle proposé.

CESAR*	CASTEM 1*	CASTEM 2*	Modèle proposé
1.69 Hz	1.42 Hz	4.065 Hz	3.53 Hz
1.70 Hz	1.44 Hz	4.067 Hz	3.57 Hz
2.08 Hz	1.76 Hz	5.11 Hz	5.65 Hz
5.67 Hz	5.84 Hz	12.37 Hz	10.60 Hz
5.71 Hz	5.90 Hz	12.39 Hz	10.73 Hz
7.00 Hz	7.30 Hz	15.72 Hz	16.80 Hz

Tableau 2 : Fréquences propres obtenues pour le bâtiment ISPRA

CASTEM 1 : Correspond à un calcul avec planchers déformables

CASTEM 2 : Correspond à un calcul avec planchers rigides

\* Ces valeurs sont données dans un rapport interne du LCPC

**b) Déformations**

Nous avons représenté sur les courbes suivantes des déformations obtenues par notre calcul pour les six premiers modes.

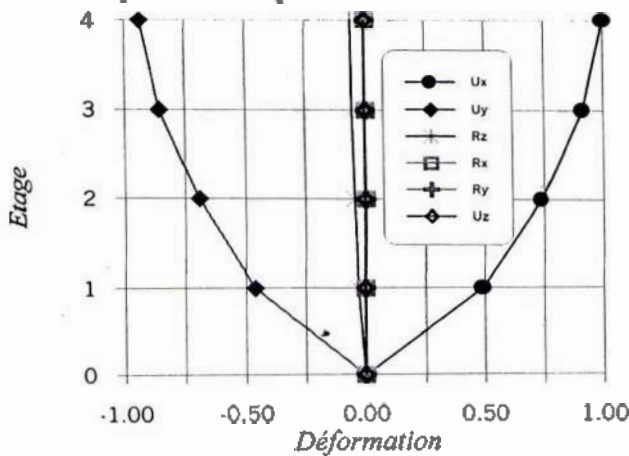


Figure 13 : 1<sup>er</sup> mode  $f=3.53$  Hz

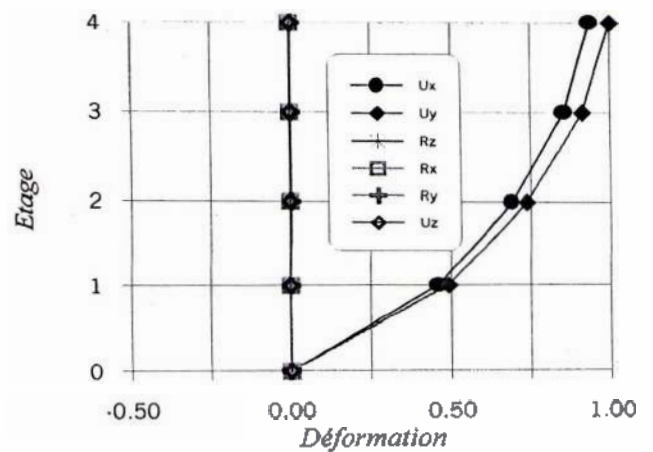


Figure 14 : 2<sup>ème</sup> mode  $f=3.57$  Hz

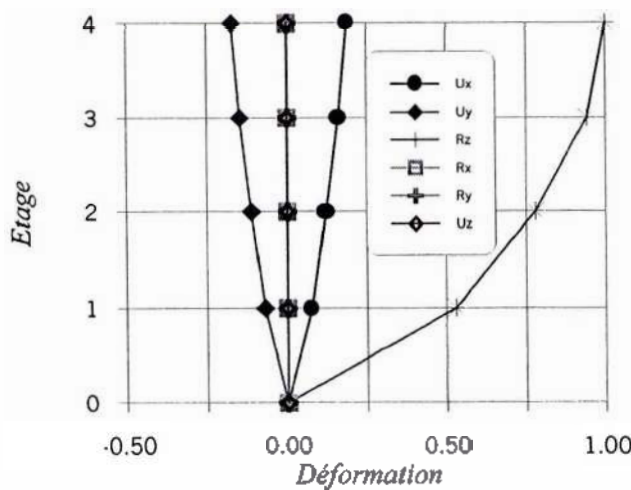


Figure 15 : 3<sup>ème</sup> mode  $f=5.66$  Hz

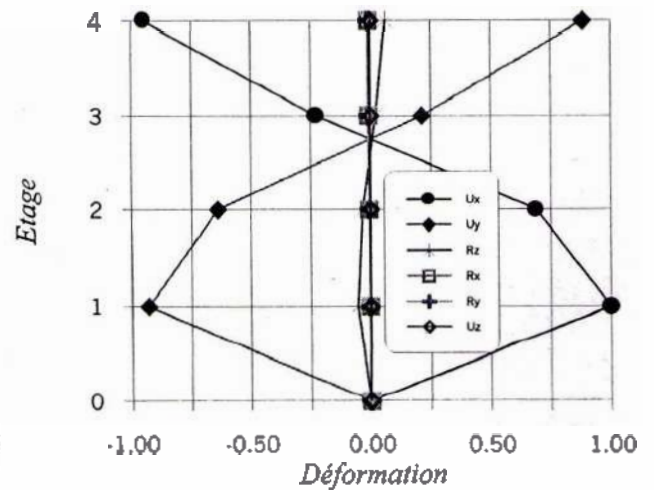


Figure 16 : 4<sup>ème</sup> mode  $f=10.60$  Hz

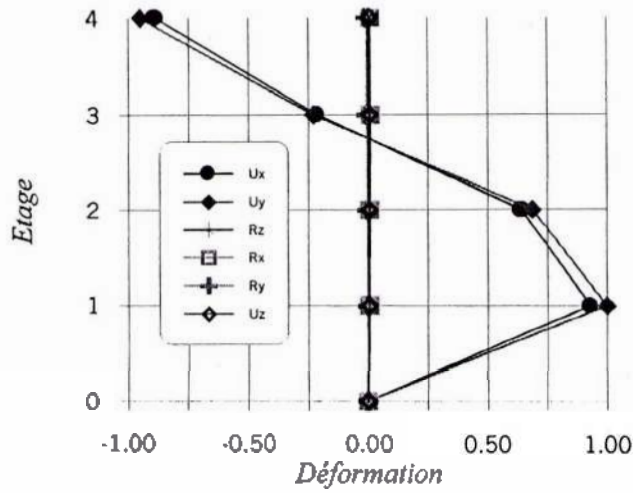


Figure 17 : 5<sup>ème</sup> mode  $f=10.73$  Hz

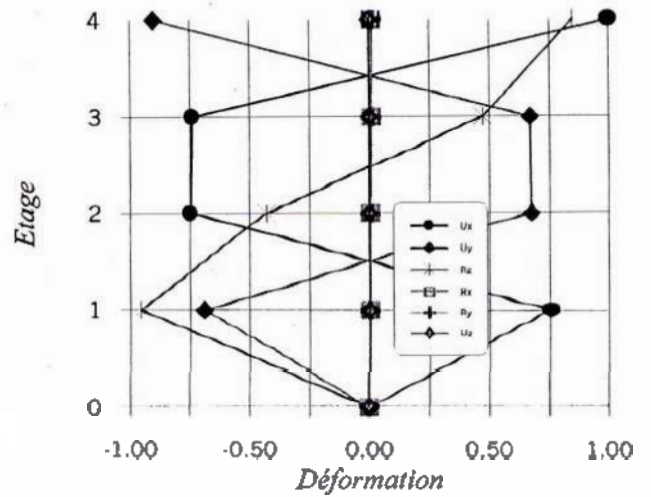


Figure 18 : 6<sup>ème</sup> mode  $f=16.80$  Hz

**c) Déplacements**

Deux déplacements dans le temps et pour les deux cas amorti et non amorti, ainsi que leurs transformées de fourrier, sont présentés ci-dessous :

**Le déplacement en x du 1<sup>er</sup> étage**

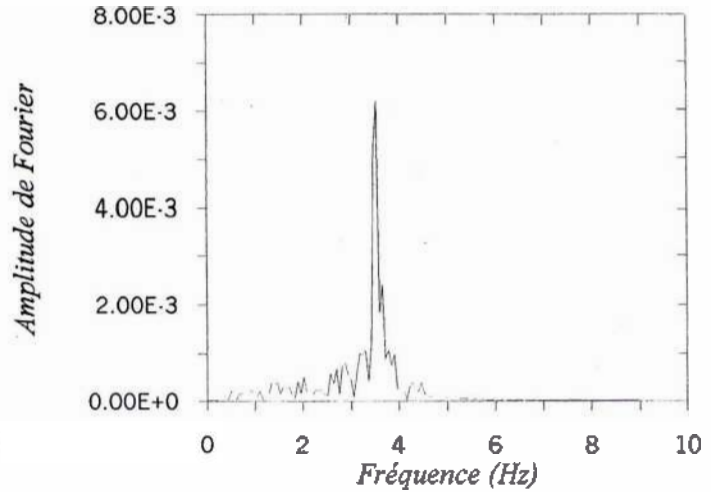
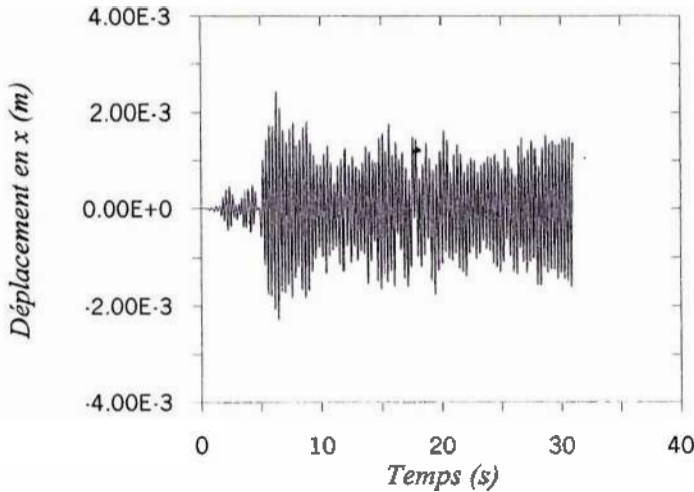


Figure 19 : Le déplacement en x du 1<sup>er</sup> étage (système non amorti)

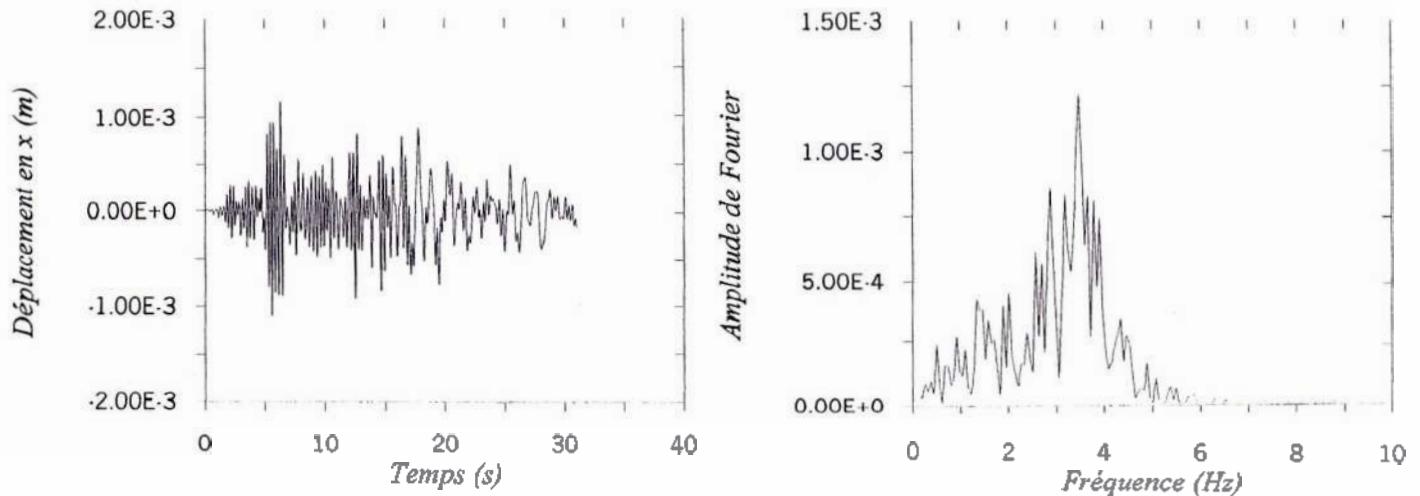


Figure 20 : Le déplacement en x du 1<sup>er</sup> étage (système amorti  $\xi=5\%$ )

**La torsion au 4<sup>ème</sup> étage**

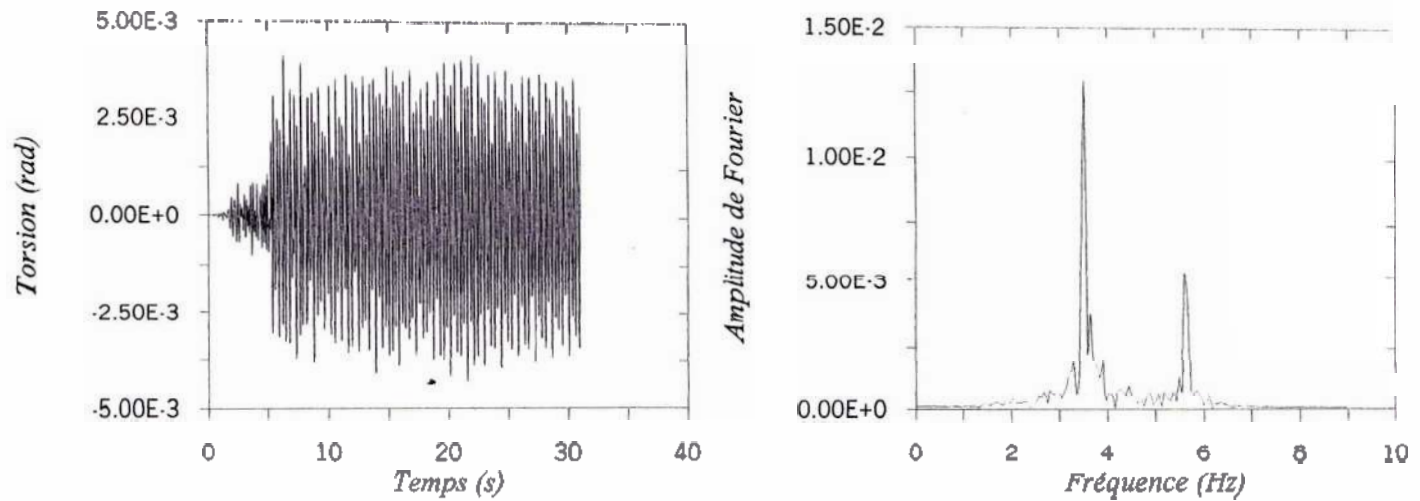


Figure 21 : La torsion au 4<sup>ème</sup> étage (système non amorti)

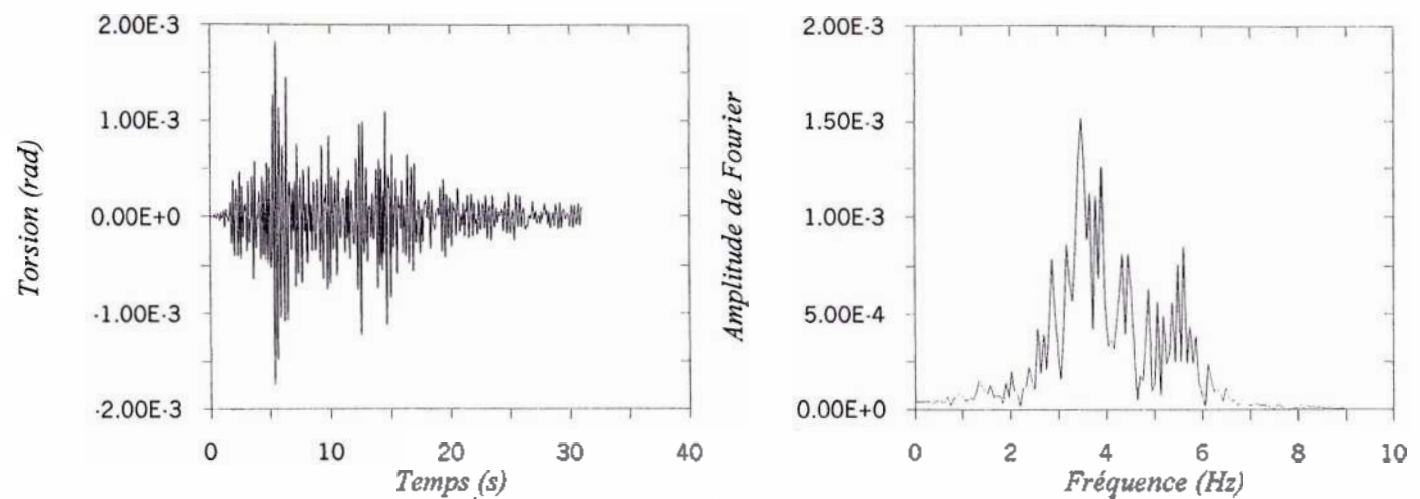


Figure 22 : La torsion au 4<sup>ème</sup> étage (système amorti  $\xi=5\%$ )

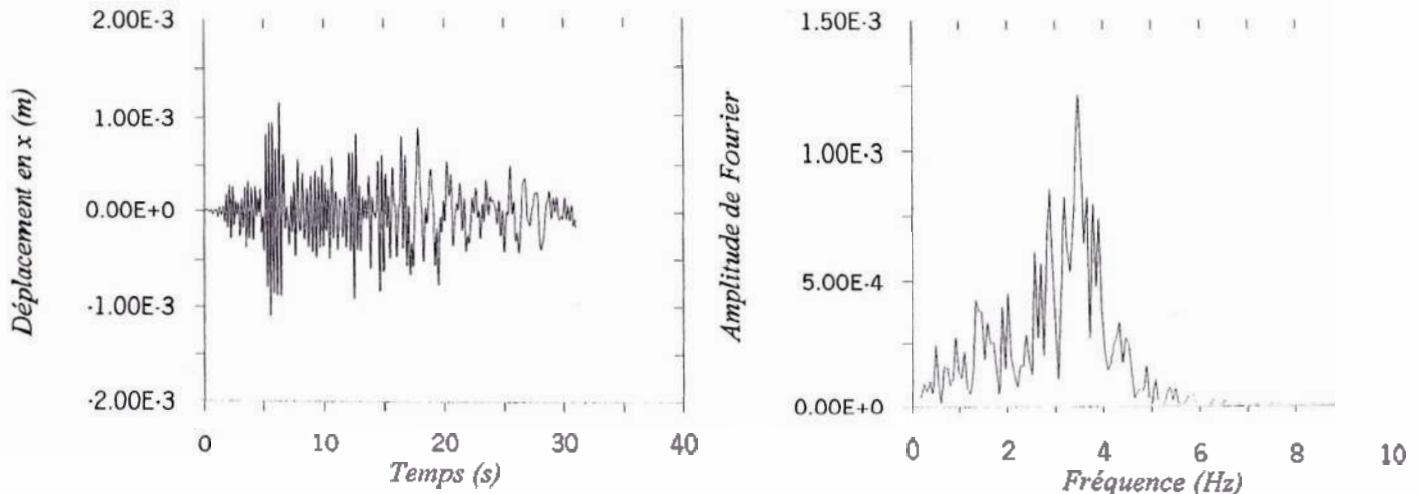


Figure 20 : Le déplacement en x du 1<sup>er</sup> étage (système amorti  $\xi=5\%$ )

**La torsion au 4<sup>ème</sup> étage**

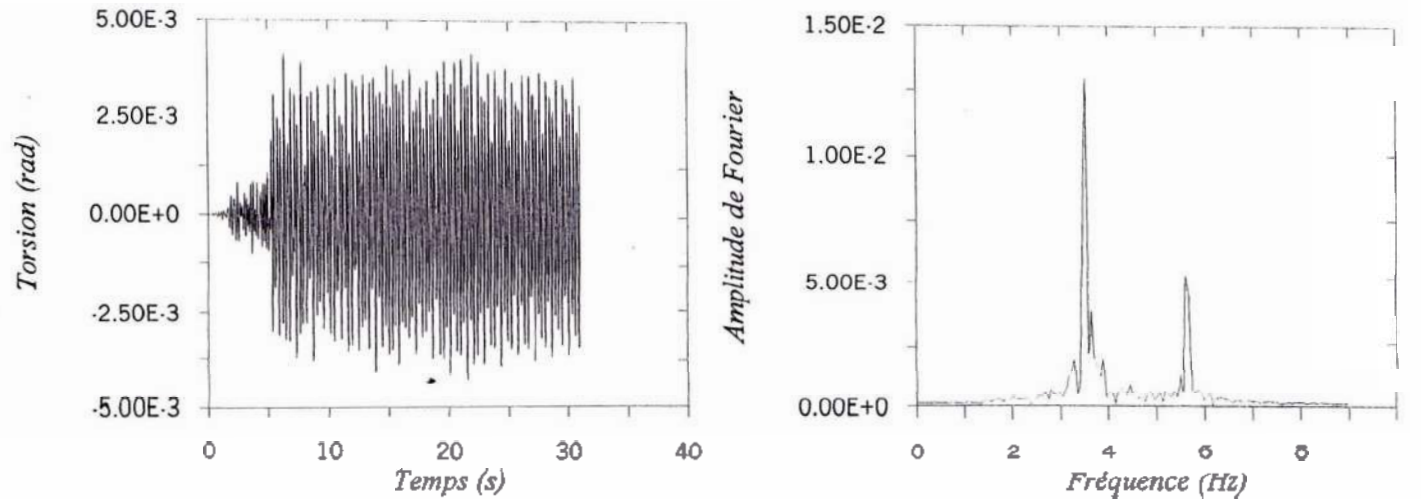


Figure 21 : La torsion au 4<sup>ème</sup> étage (système non amorti)

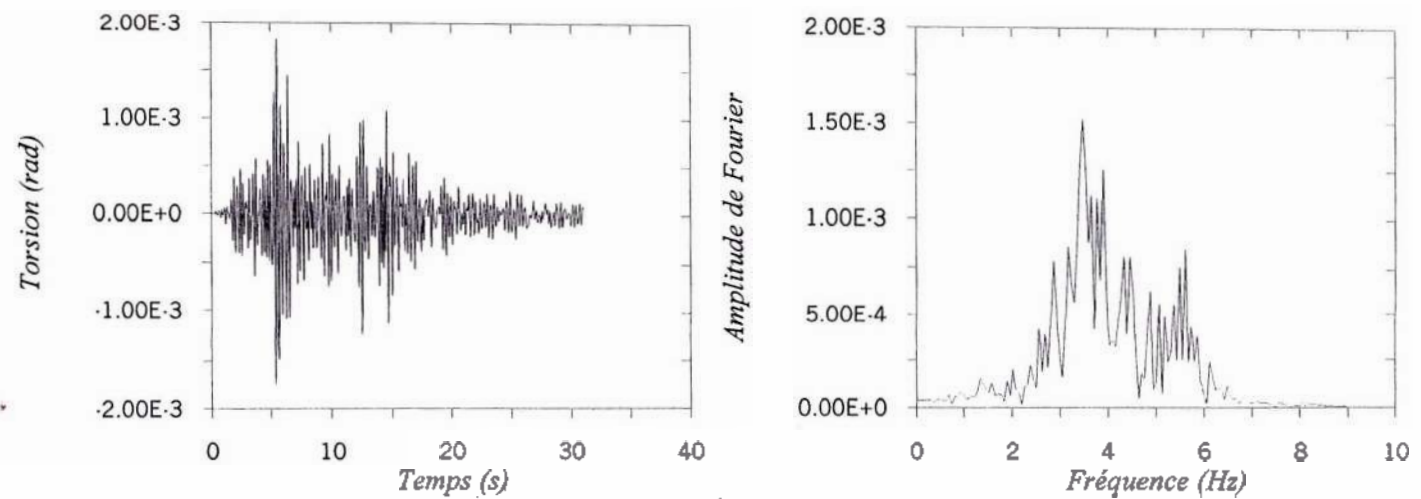


Figure 22 : La torsion au 4<sup>ème</sup> étage (système amorti  $\xi=5\%$ )

#### d) Conclusions

Nous voyons dans le tableau 2 que les fréquences obtenues par CESAR et CASTEM 1 sont assez proches, par contre celles obtenues par CASTEM 2 et le modèle proposé sont elles aussi assez proches entre elles. Ceci s'explique par le fait que si on considère que le bâtiment ISPRA possède des planchers rigides (ce qui est une hypothèse du modèle proposé) et bien le calcul éléments finis doit en tenir compte et le modèle CASTEM 2 est le plus adéquat. Par contre si les planchers sont flexibles ça sera le cas CASTEM 1 qui sera le plus adéquat. Vu le bâtiment et ses caractéristiques nous penchons pour des planchers rigides, et les fréquences que nous obtenons nous semblent conformes à la réalité.

Nous constatons aussi que le 3<sup>ème</sup> et le 6<sup>ème</sup> modes sont des modes de torsions avec, pour le mode 6, un fort couplage avec les translations horizontales. Les autres modes sont des modes de translations horizontales, couplés dans certains cas.

Le contenu fréquentiel tracé pour quelques déplacements lorsque les modes sont amortis ou pas est conforme à ce qu'on s'attendait à trouver.

### 5-3-COUVERTURE CHAMPIGNON

Il s'agit du dernier exemple de validation, nous permettant de vérifier l'exactitude de la méthode numérique utilisée.

#### a) Fréquences propres

Ce bâtiment a fait l'objet d'une analyse modale effectuée par M. Laredo [3]. Nous l'avons donc étudié par le modèle proposé et nous donnons ci-après les résultats obtenus:

Numéro du mode	Analyse modale	Modèle proposé
1 et 2	0.354 Hz	0.352 Hz
3	0.408 Hz	0.412 Hz
4 et 5	1.448 Hz	1.416 Hz

Tableau 3 : Fréquences propres obtenues pour la couverture champignon

#### b) Déformations

Les déformations pour les cinq premiers modes sont comme suit :

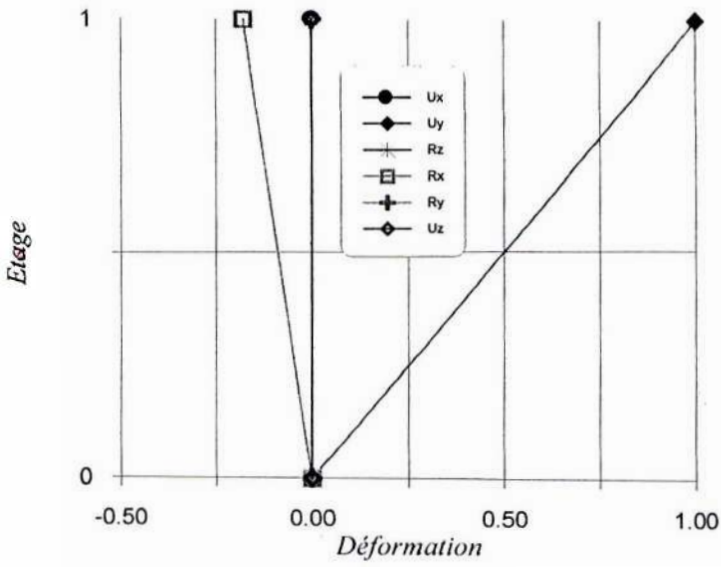


Figure 23 : 1<sup>er</sup> mode  $f=0.352$  Hz

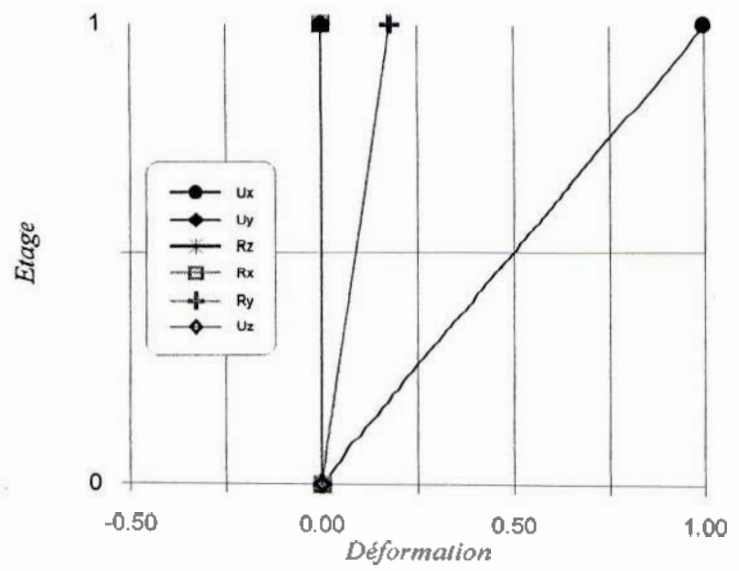


Figure 24 : 2<sup>ème</sup> mode  $f=0.352$  Hz

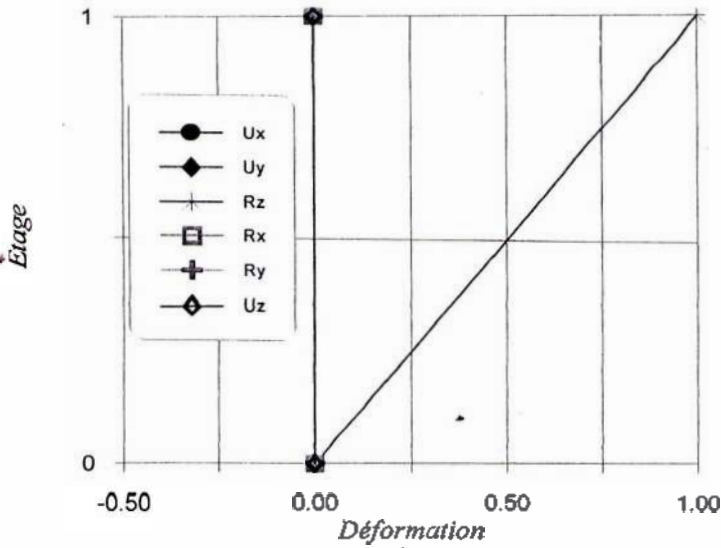


Figure 25 : 3<sup>ème</sup> mode  $f=0.412$  Hz

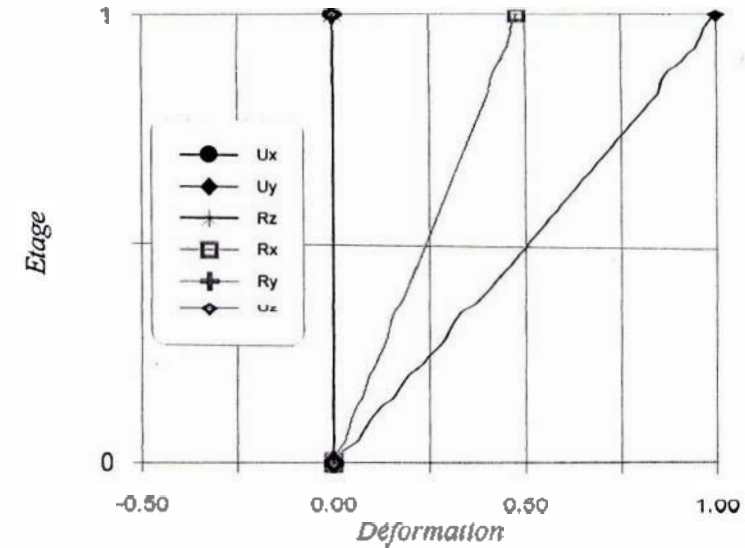


Figure 26 : 4<sup>ème</sup> mode  $f=1.416$  Hz

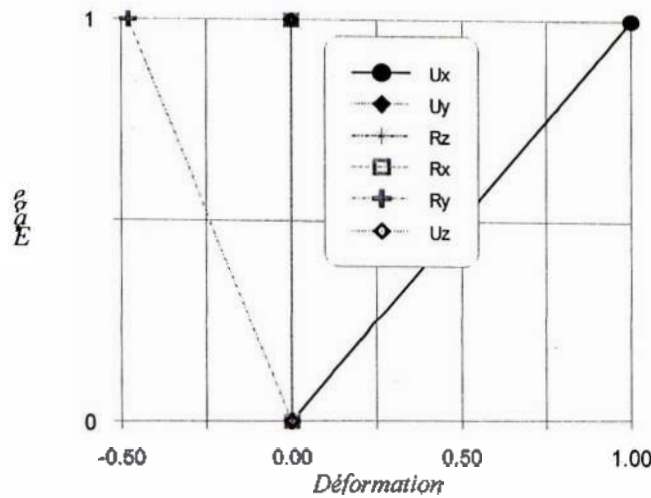


Figure 27 : 5<sup>ème</sup> mode  $f=1.416$  Hz

### c) Déplacements

Le calcul de déplacement a été effectué dans le sens x et y et autour de Oy et Oz pour le cas amorti et non amorti.

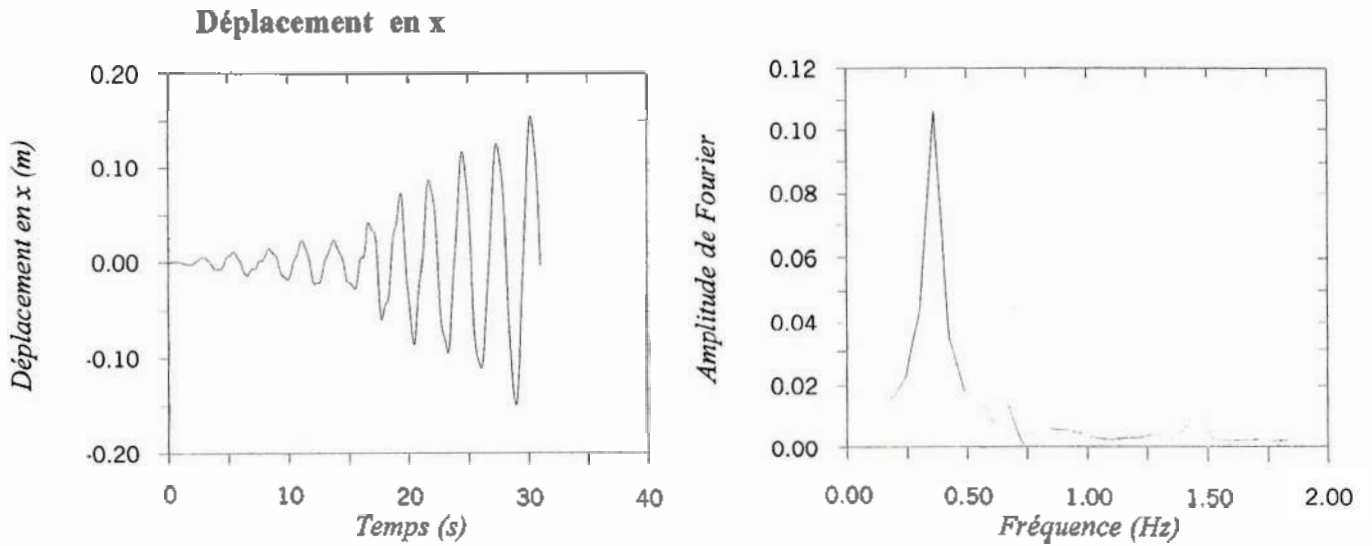


Figure 28 : Le déplacement en x (système non amorti)

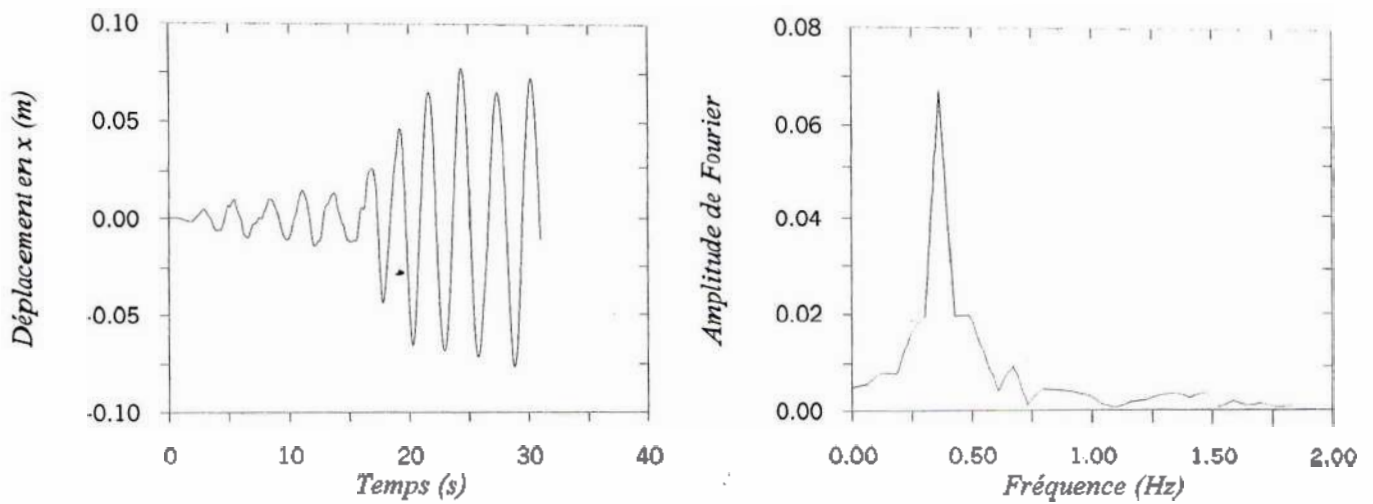


Figure 29 : Le déplacement en x (système amorti  $\xi=5\%$ )

**Rotation autour de l'axe Oy**

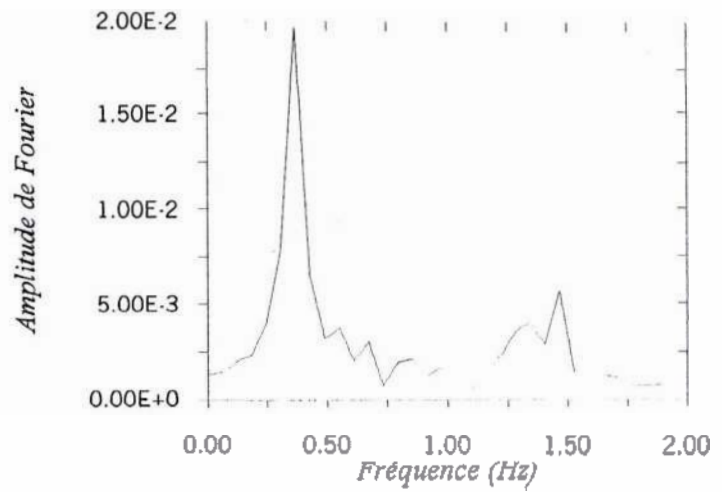
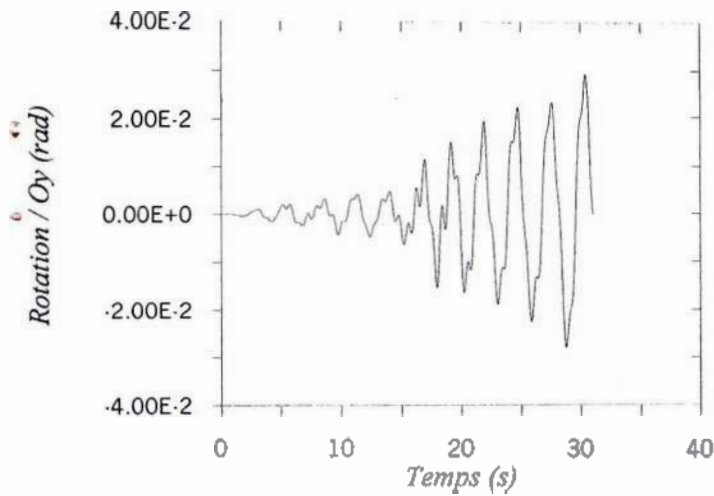


Figure 30 : La rotation / Oy (système non amorti)

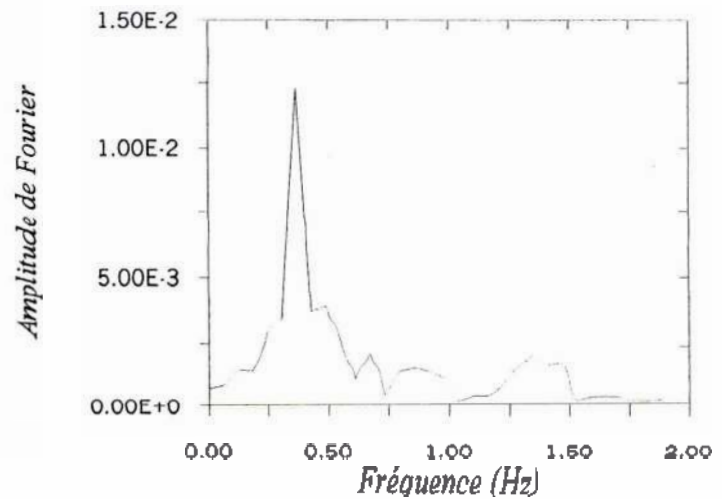
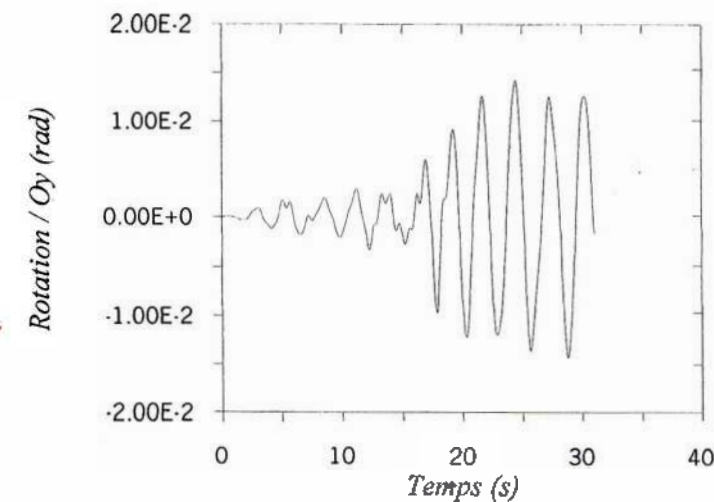


Figure 31 : La rotation / Oy (système amorti  $\xi=5\%$ )

**La torsion et le déplacement en y**

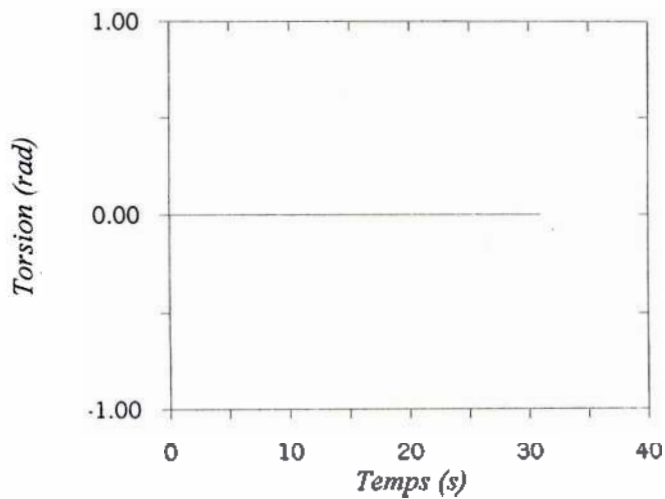


Figure 32 : La torsion

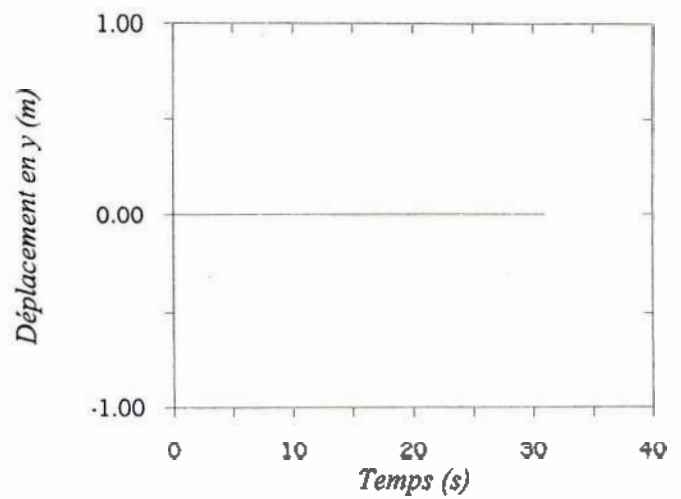


Figure 33 : Le déplacement en y

#### d) Conclusions

Les fréquences identifiées par le modèle sont pratiquement les mêmes que celles obtenues par l'analyse modale. Pour le 1<sup>er</sup> mode on a 0.6 % d'écart et pour le second 1 % et pour le troisième environ 2.2 % d'incertitude, ce qui est admissible.

On remarque que le mode correspondant à la fréquence 0.412 Hz est un mode de torsion, les modes correspondant à 0.352 Hz sont des modes de translation, et ceux correspondant à 1.416 Hz sont des modes de rotation, ce qui est confirmé par Laredo.

Le développement effectué par Laredo pour les fréquences et les déformées modales est comparé aux résultats obtenus par notre programme dans le tableau suivant :

Paramètres\Méthode		Modèle mis en œuvre		Laredo	
Fréquence (Hz)		0.352	1.416	0.354	1.448
Formes propres	Translation	0.442	-0.278	0.442	-0.278
	Rotation	0.079	0.133	0.080	0.127

Tableau 4 : Les déformations du couverture champignon

Les formes trouvées par les deux méthodes sont presque confondues, le pourcentage d'écart est inférieur à 5 %, d'où il vient que les résultats obtenus sont satisfaisants. Concernant les déplacements mis à part le déplacement dans la direction du séisme et la rotation autour de l'axe perpendiculaire à cette dernière, les autres déplacements sont pratiquement nuls, ceci est dû à la répartition symétrique des masses et des rigidités qui amène à un net découplage entre les différents types de modes. Le contenu fréquentiel des déplacements non nuls nous a permis d'y retrouver les fréquences propres de la structure.

#### 5-4-PLANCHER SUR TROIS POTEAUX

Cette structure est analysée par le modèle proposé. Elle constitue le premier cas d'application de notre étude. Elle est soumise à l'accélérogramme de Morgan Hill. Nous donnons ci-après les résultats obtenus en terme de fréquences propres, déformations et déplacements.

a) Fréquences propres

Numéro du mode	Modèle proposé
1	0.80 Hz
2	0.87 Hz
3	1.55 Hz
4	16.19 Hz
5	34.44 Hz
6	43.93 Hz

Tableau 5 : Fréquences modales du plancher sur trois poteaux

b) Déformations

Nous présentons les déformations des trois premiers modes:

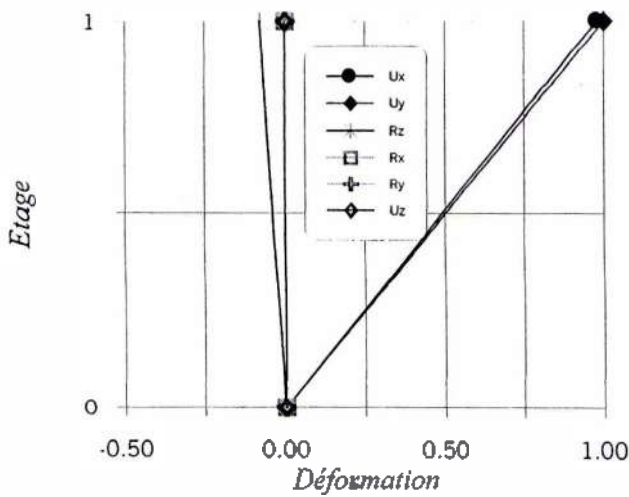


Figure 34 : 1<sup>er</sup> mode  $f=0.80$  Hz

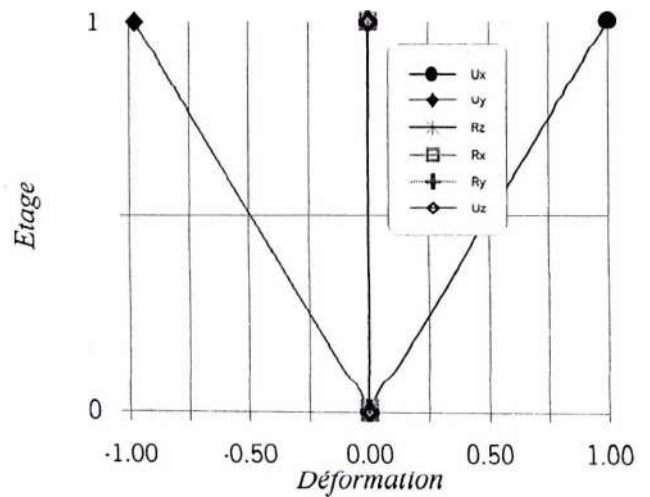


Figure 35 : 2<sup>ème</sup> mode  $f=0.87$  Hz

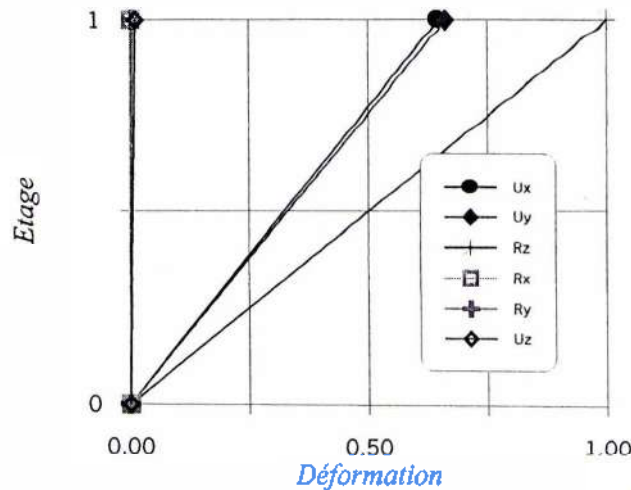


Figure 36 : 3<sup>ème</sup> mode  $f=1.55$  Hz



**c) Déplacement**

Nous donnons ci-après le déplacement selon x, y et la torsion du plancher sur trois pieds soumis à une excitation sismique.

**Le déplacement en x**

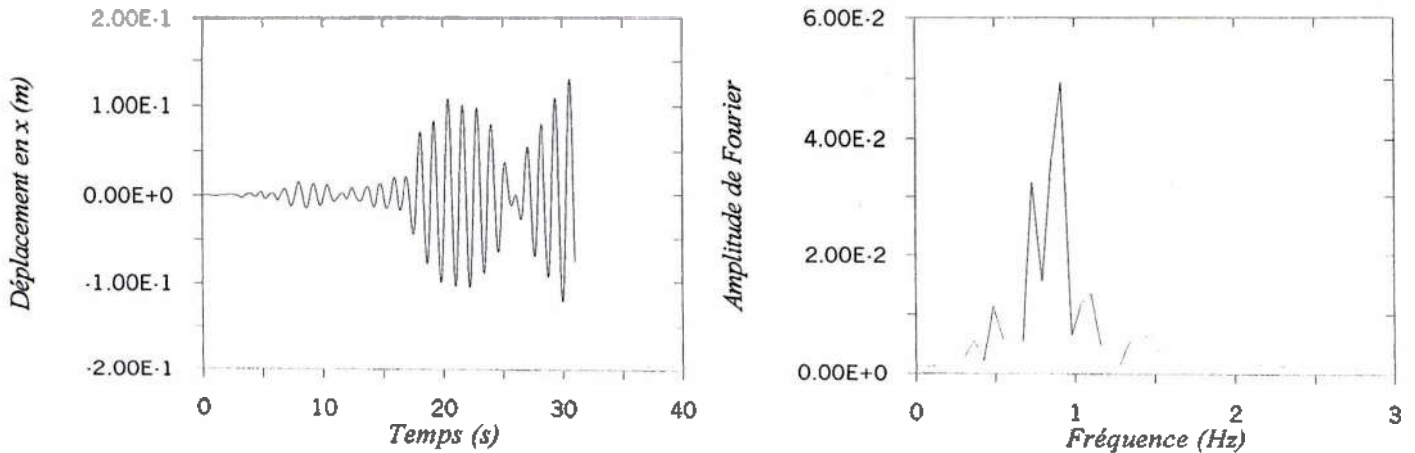


Figure 37 : Le déplacement en x (système non amorti )

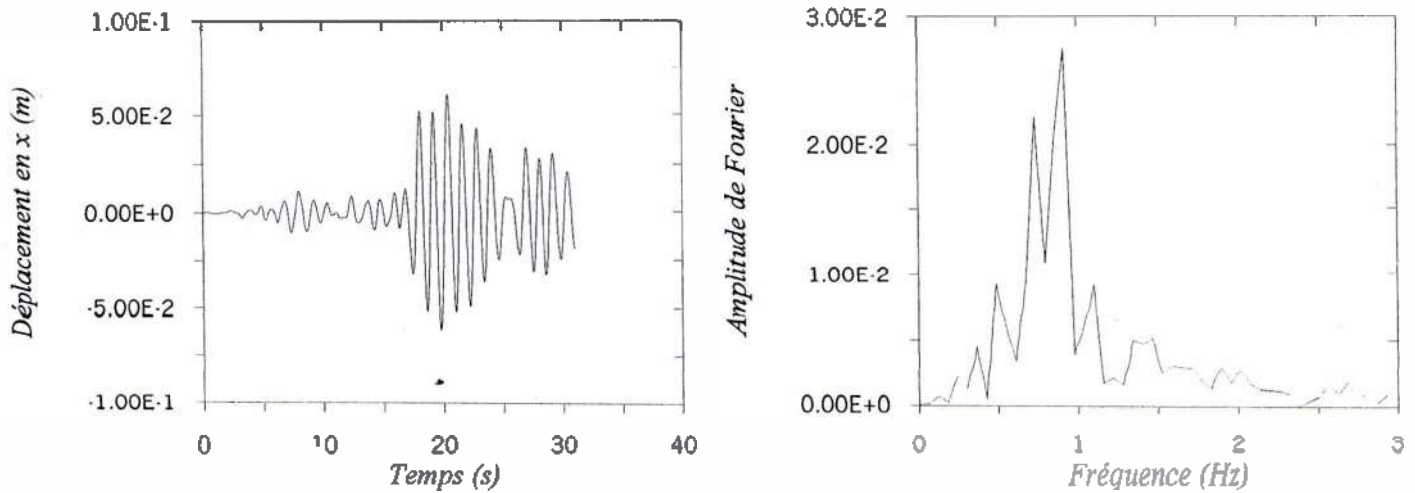


Figure 38 : Le déplacement en x (système amorti  $\xi=5\%$ )

**Le déplacement en y**

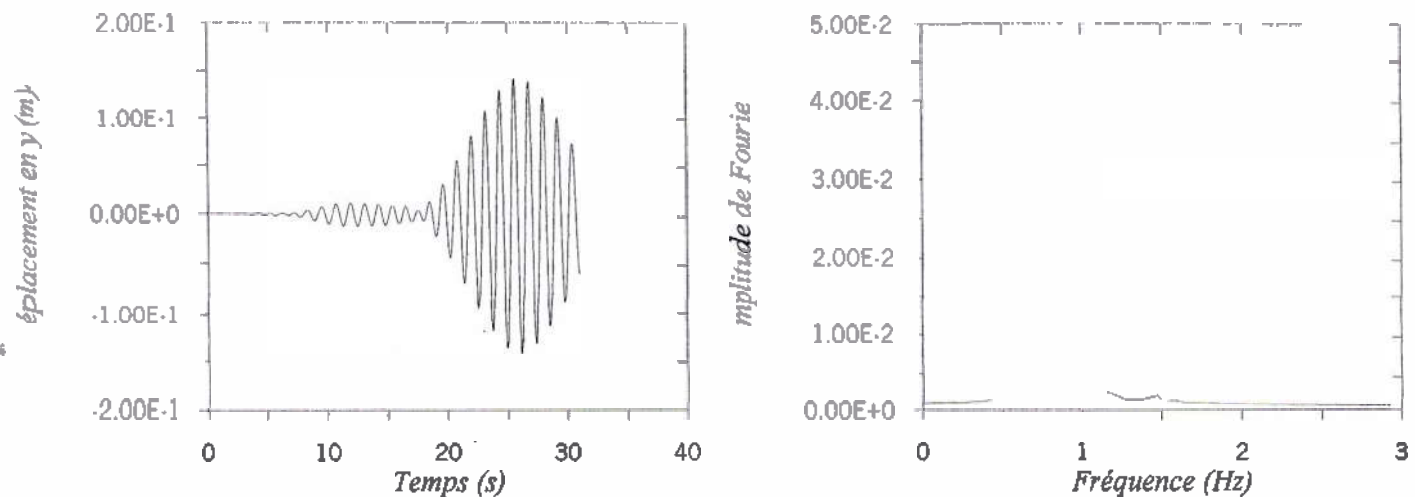


Figure 39 :Le déplacement en y (système non amorti )

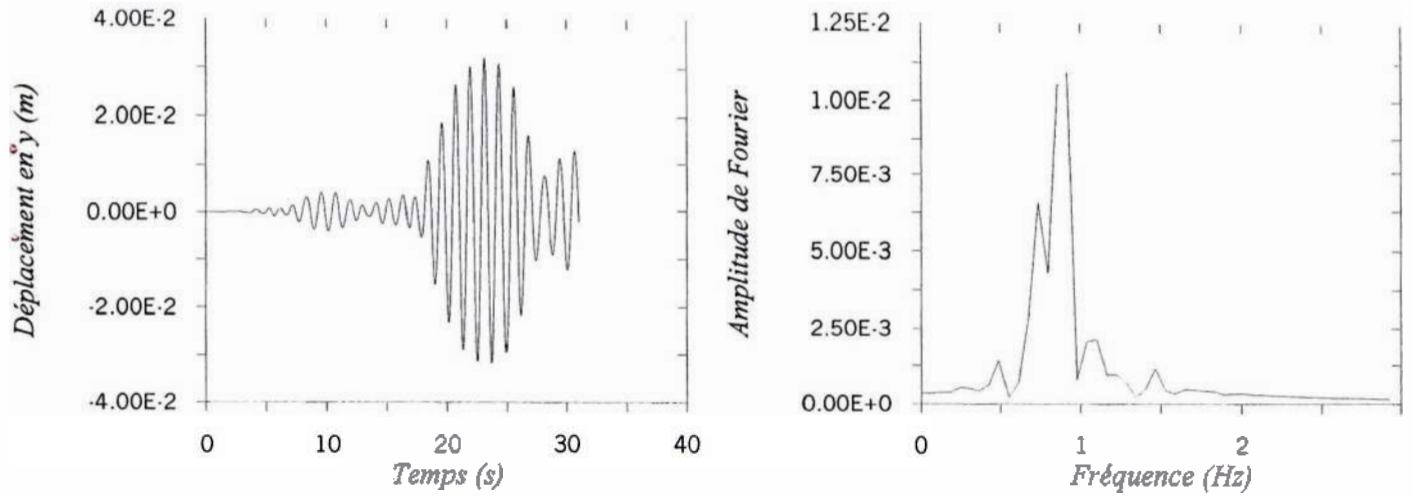


Figure 40 : Le déplacement en y (système amorti  $\xi=5\%$ )

**La torsion**

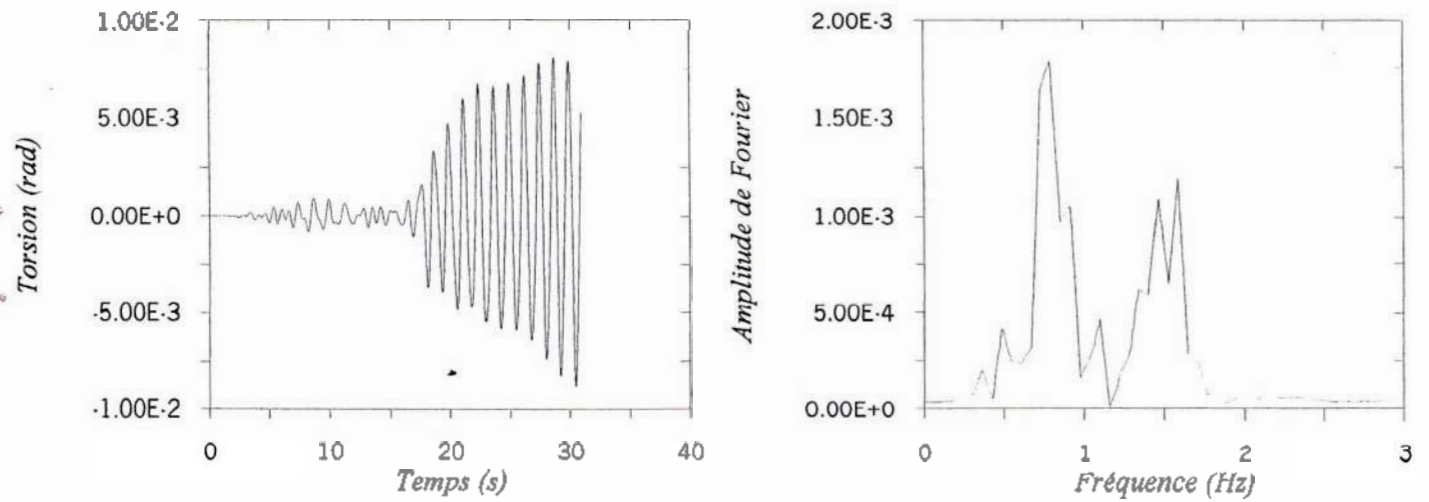


Figure 41 : La torsion (système non amorti)

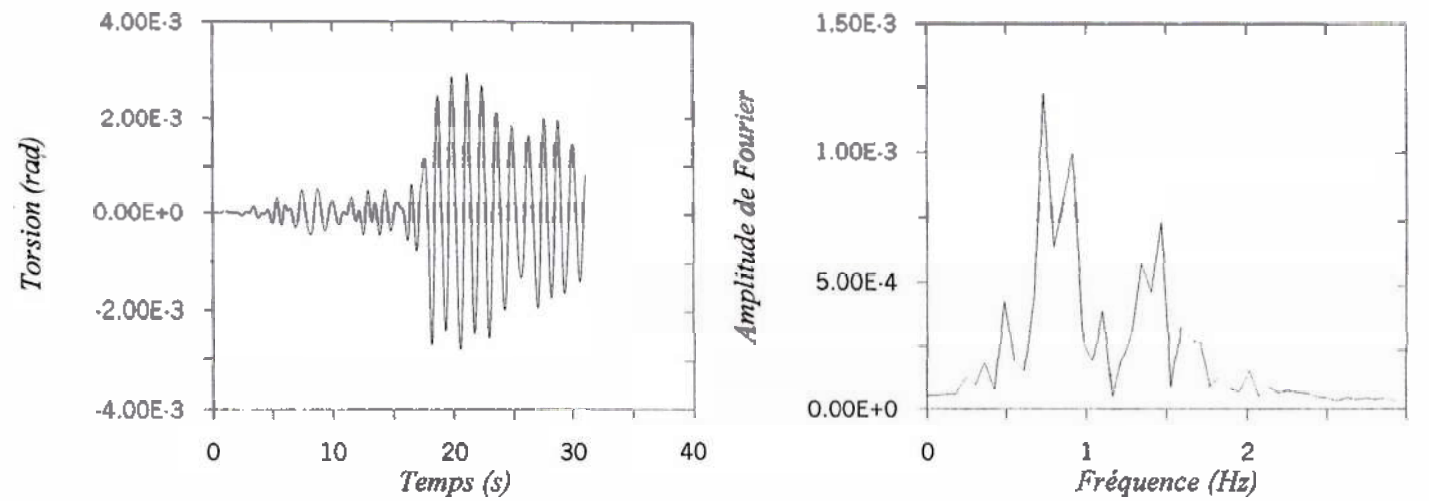


Figure 42 : La torsion (système amorti  $\xi=5\%$ )

### c) Conclusions

Un étage du plancher sur trois poteaux répond de manière privilégiée selon sa deuxième fréquence propre et un peu selon la première.

## 5-5-BATIMENT LOGEMENTS DE FONCTION LYCEE BACHIR EL IBRAHIMI DE AIN TEMOUCHENT

Le bâtiment logements de fonction lycée Bachir El Ibrahimy de Aïn Témouchent a fait l'objet d'une étude par le modèle proposé (l'excitation sismique utilisée étant le séisme de Aïn Temouchent), et un calcul des fréquences propres par le SAP 2000 [26], par la méthode de Holzer [23], et enfin par la formule définie par le RPA 99 [14]. Nous donnons ici les principaux résultats obtenus.

### a) Fréquences propres

Le tableau ci-après illustre les résultats en terme de fréquences propres :

Numéro du mode	Modèle proposé	SAP 2000	Méthode de Holzer	Formule empirique (RPA 99)
1	1.39 Hz	1.41 Hz	1.91 Hz	1.40 Hz
2	1.78 Hz	1.94 Hz	8.50 Hz	
3	2.13 Hz	2.25 Hz	15.85 Hz	
4	4.00 Hz	4.13 Hz	21.98 Hz	
5	6.46 Hz	7.07 Hz	26.90 Hz	
6	6.82 Hz	8.98 Hz		
7	8.03 Hz	9.42 Hz		
8	9.08 Hz	10.60 Hz		
9	10.87 Hz	11.35 Hz		
10	12.37 Hz	12.85 Hz		

Tableau 6 : Fréquences obtenues pour le bâtiment

### b) Déformations

Nous présentons pour les six premiers modes, les six déformations pour chaque étage :

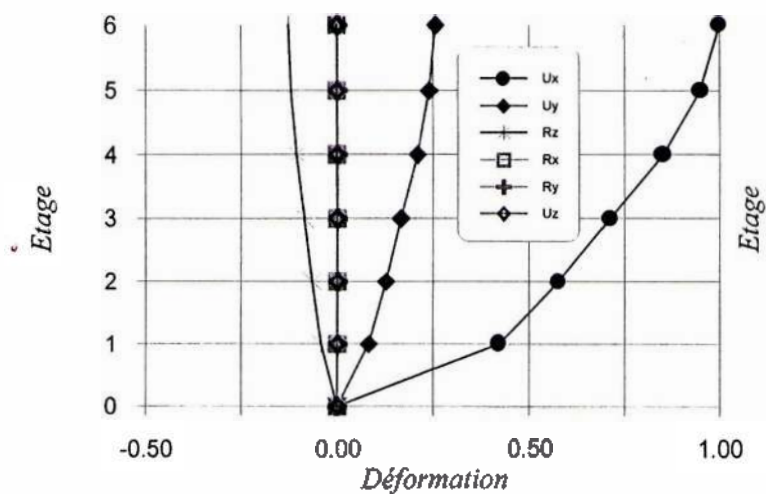


Figure 43 : 1<sup>er</sup> mode  $f=1.39$  Hz

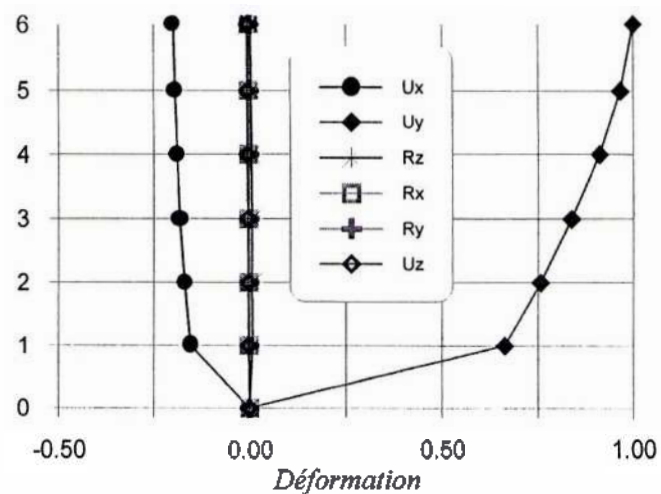


Figure 44 : 2<sup>ème</sup> mode  $f=1.78$  Hz

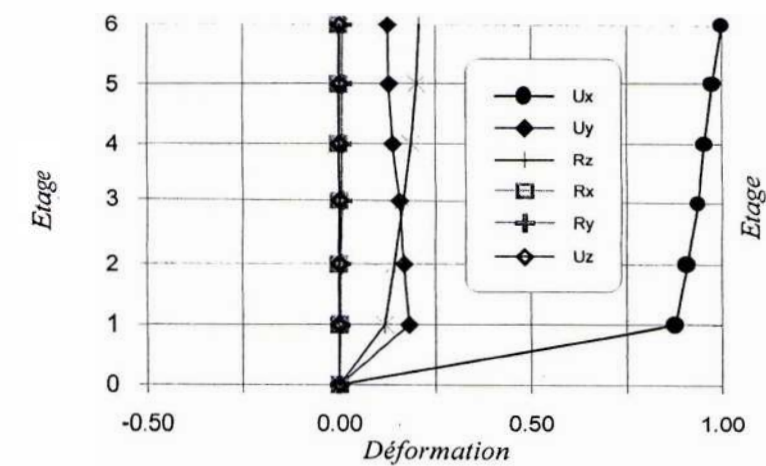


Figure 45 : 3<sup>ème</sup> mode  $f=2.13$  Hz

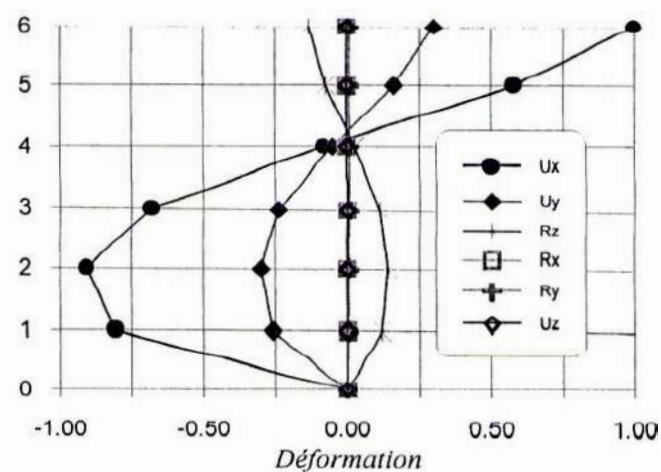


Figure 46 : 4<sup>ème</sup> mode  $f=4.00$  Hz

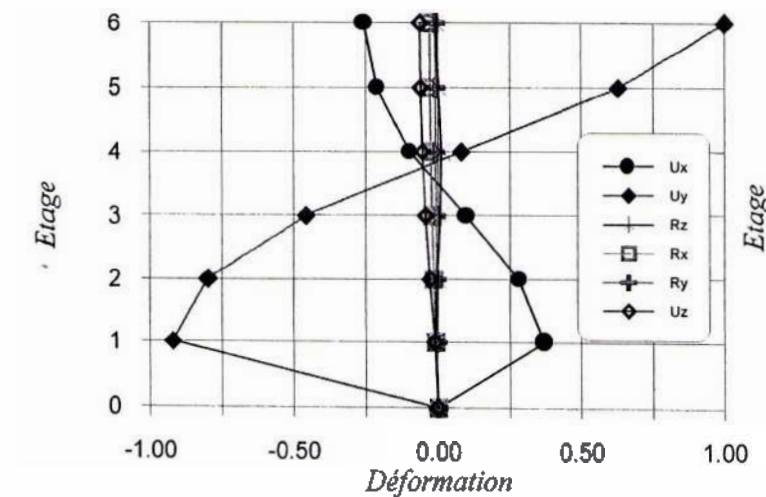


Figure 47 : 5<sup>ème</sup> mode  $f=6.46$  Hz

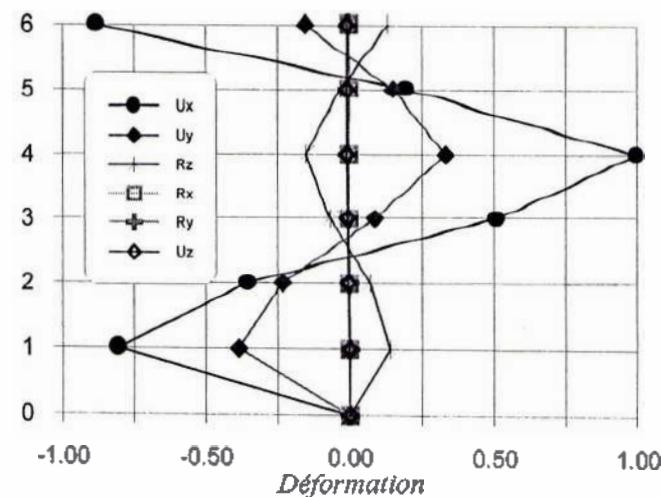
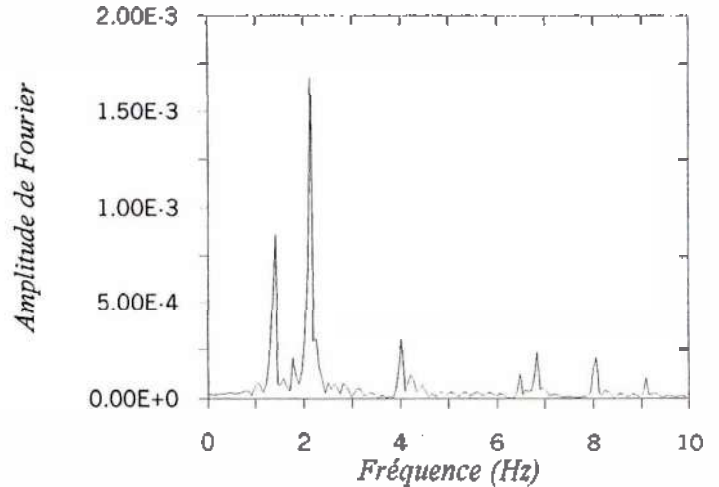
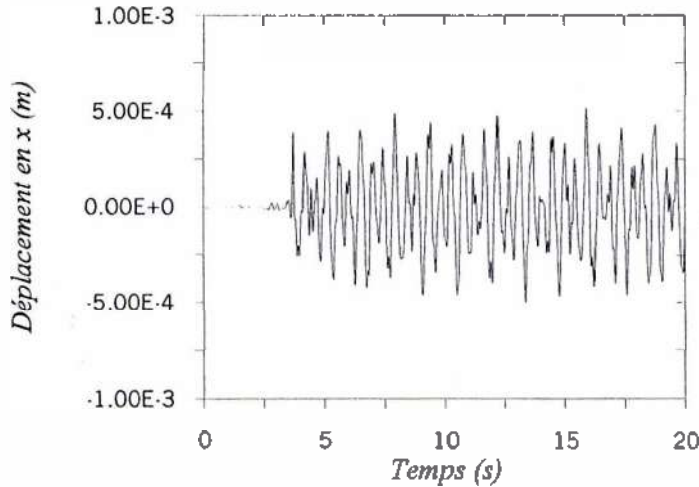


Figure 48 : 6<sup>ème</sup> mode  $f=6.82$  Hz

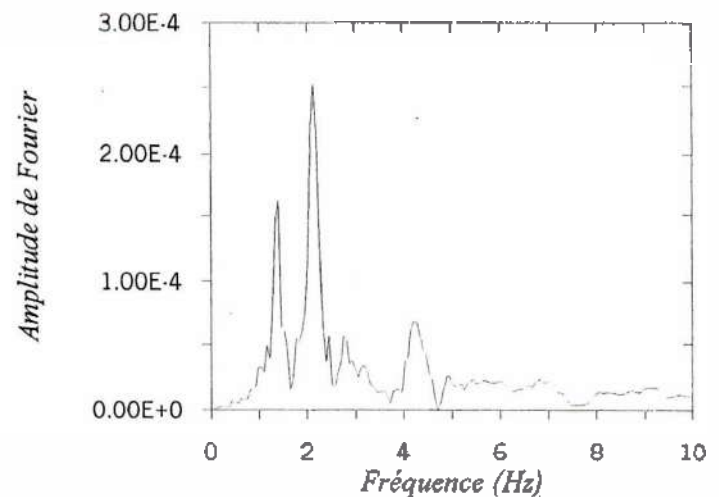
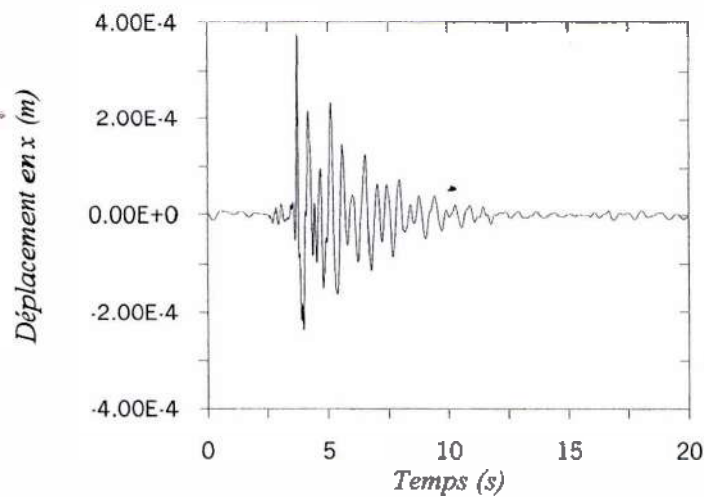
**c) Déplacements**

Tous les déplacements des étages peuvent être déterminés (six déplacements pour chaque étage). Nous donnons quelques résultats obtenus par le modèle proposé dans les deux cas du système amorti et du système non amorti.

**Le déplacement en x au 1<sup>er</sup> étage**



**Figure 49 : Le déplacement en x au 1<sup>er</sup> étage (système non amorti)**



**Figure 50 : Le déplacement en x au 1<sup>er</sup> étage (système amorti  $\xi=5\%$ )**

La torsion au 6<sup>ème</sup> étage

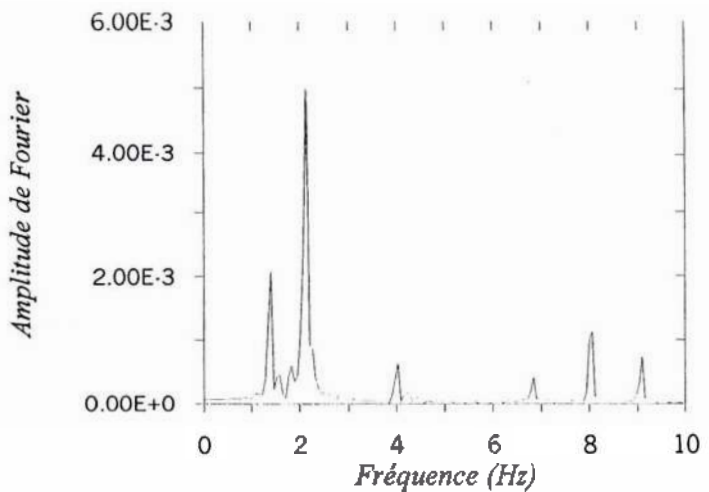
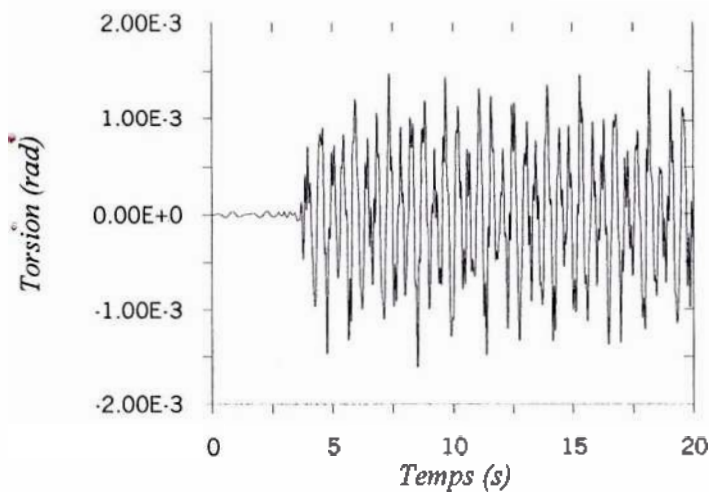


Figure 51 : La torsion au 6<sup>ème</sup> étage (système non amorti)

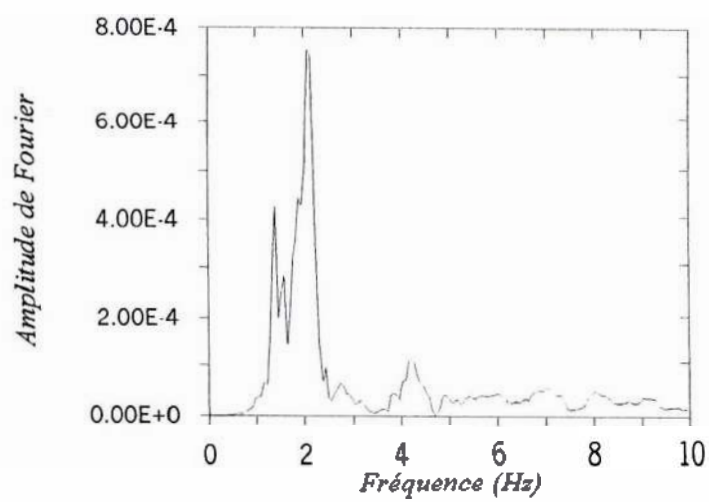
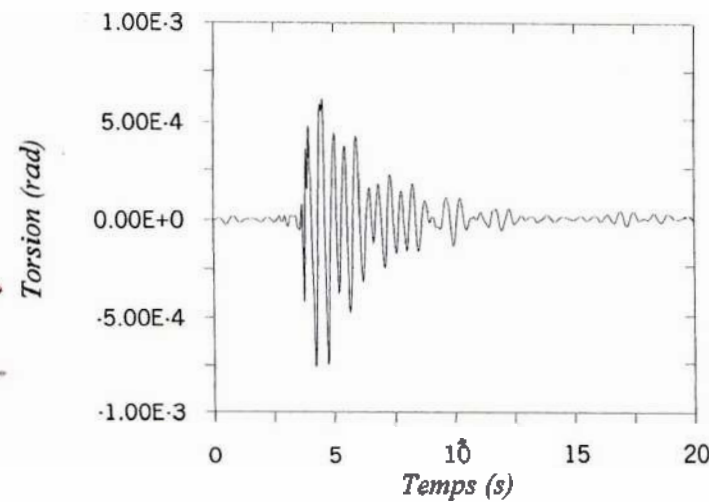


Figure 52 : La torsion au 6<sup>ème</sup> étage (système amorti  $\xi=5\%$ )

Le déplacement en x du 6<sup>ème</sup> étage

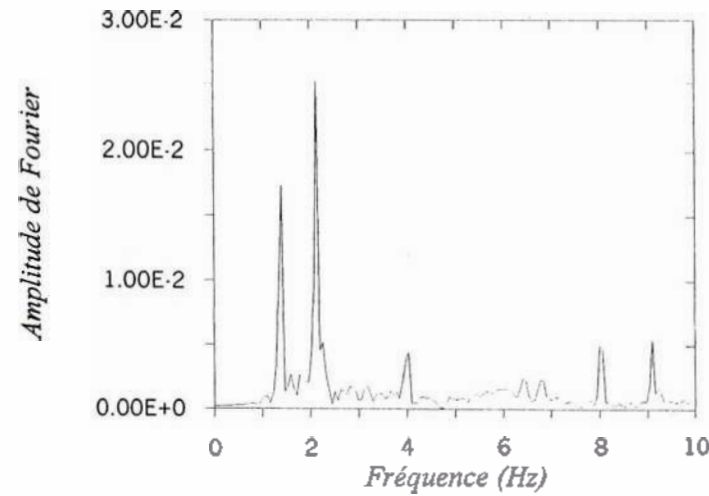
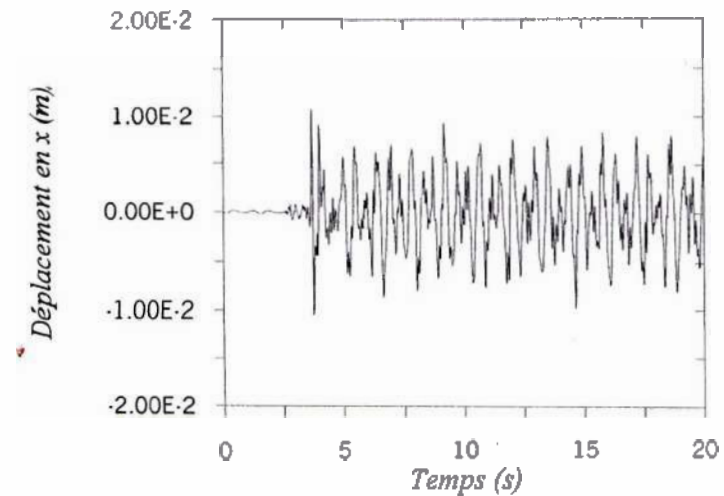


Figure 53 : Le déplacement en x du 6<sup>ème</sup> étage (système non amorti)

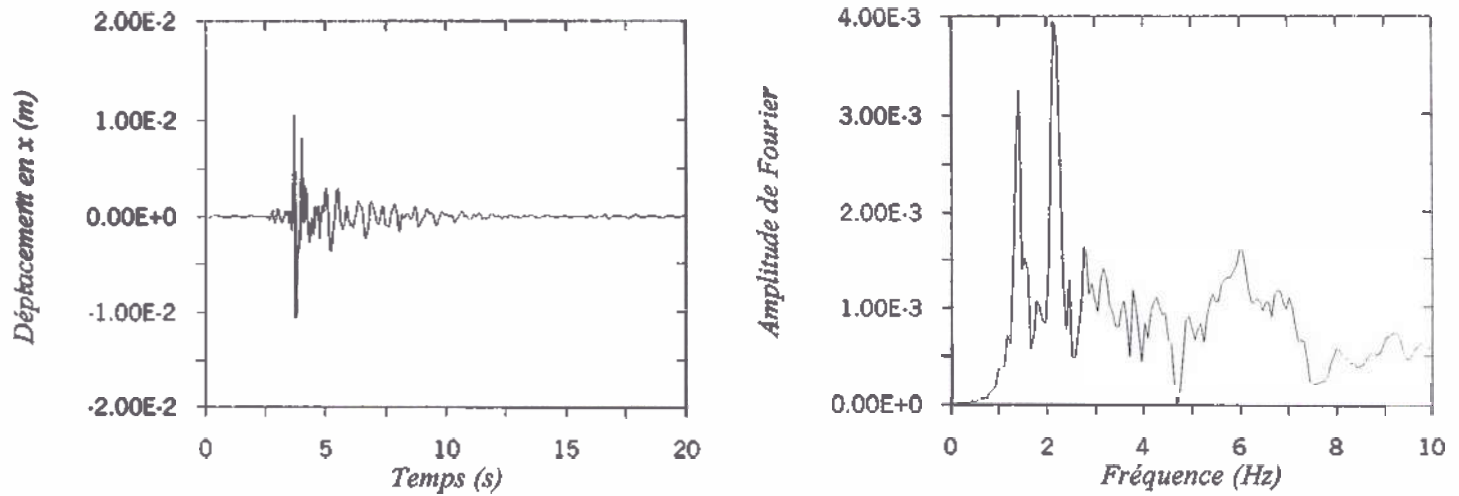


Figure 54 : Le déplacement en x du 6<sup>ème</sup> étage (système amorti  $\xi=5\%$ )

#### d) Conclusions

L'analyse faite par le modèle proposé et le SAP 2000 prend les six DDL en considération, mais pour la méthode de Holzer un seul DDL. Concernant les fréquences fondamentales, on constate que pour le modèle proposé, le SAP 2000 et la formule de RPA 99, sont proches. Par contre la valeur trouvée par la méthode de Holzer est divergente.

On remarque que pour les six premiers modes la translation horizontale prime, avec la présence apparente de la torsion dans le premier, le troisième, le quatrième et le sixième mode avec un couplage avec les translations horizontales.

Dans les fig. 49 à 54, nous avons représenté quelques déplacements trouvés de quelques étages, ceci dans le domaine temporel puis dans le domaine fréquentiel (le passage du temporel au fréquentiel par la transformée de Fourier). Nous constatons que les pics obtenus correspondent aux fréquences de notre structure, et l'amplitude de la fréquence  $f=2.13$  Hz est la plus grande du moins pour les déplacements présentés.

## 6-CONCLUSIONS

Dans ce chapitre nous avons traité dans un premier temps trois exemples de validation. Ces exemples de validation ont été tirés de la bibliographie. En comparant les résultats donnés dans les références bibliographiques et ceux obtenus par notre programme, nous constatons une bonne correspondance. Aussi bien sur les fréquences modales que sur les déformées modales. Ayant soumis ces structures à l'accélérogramme de Morgan Hill, nous avons tracé

dans le temps quelques déplacements induits par ce séisme. La transformée de Fourier de ces déplacements a confirmé les résultats obtenus auparavant.

Nous avons ainsi montré que notre programme donne des résultats satisfaisants.

Dans un second temps nous avons appliqué notre modèle pour l'étude de deux exemples d'application. Le premier nous l'avons soumis à l'accélérogramme de Morgan Hill ; Quant au deuxième nous l'avons soumis à l'accélérogramme de Aïn Temouchent. Ce dernier a été choisi afin de se placer dans des conditions réelles. Les résultats obtenus sont très satisfaisants, surtout pour l'exemple du bâtiment logements de fonction du lycée Bachir El Ibrahimy à Aïn Temouchent, qui a été endommagé lors du dernier séisme du 22 Décembre 1999.

L'amortissement utilisé vise à mettre des amortissements modaux réduits valant 5 % sur l'ensemble des modes. Par conséquent, un mode propre excité sera amorti en quelques périodes. Cela a tendance, par rapport au système non amorti, de privilégier les composantes basses fréquences de la réponse qui s'amortiront moins vite que les composantes hautes fréquences. Constats que nous retrouvons.

En conclusion, nous pouvons dire que le modèle présenté nous donne entière satisfaction quant à la précision et à richesse des résultats obtenus.

## **CHAPITRE 4**

### **INTERACTION SOL-STRUCTURE**

#### **1-INTRODUCTION**

L'influence du sol sur le comportement sismique d'un bâtiment est importante et revêt plusieurs aspects tels que le type de sol (granite, argile, alluvion, etc.), ou les conditions aux limites etc. [28]. Des lors la prise en compte de l'interaction sol-structure devient impérative pour tout ouvrage devant être dimensionné aux séismes. Ceci a fait l'objet de plusieurs études, entre autres les travaux de Meek J. et Wolf J. dans ce domaine sont important [29]. L'utilisation de la méthode des éléments finis pour la modélisation de l'interaction sol-structure est aussi très largement répandue, mais dans certains cas s'avère trop lourde à cause du grand nombre de degrés de liberté à considérer.

Dans le cadre du présent travail, nous nous sommes intéressés à cet aspect du problème et nous avons inclus dans notre modèle de calcul (présenté au chapitre 2) un module permettant la prise en compte des caractéristiques du sol tout en conservant un petit nombre de degrés de liberté. Nous avons traité le cas de fondations superficielles, ceci est un choix et notre modèle est ouvert pour d'autres types de fondation, qui feront l'objet d'études à venir.

## **2-FONDATION SUPERFICIELLE**

L'interaction cinématique d'une fondation superficielle, reposant sur une stratigraphie horizontale excitée par un champ incident composé d'onde de cisaillement ou de compression à propagation verticale est nulle; le mouvement de la fondation sans masse est celui de la surface du sol en l'absence d'ouvrage. L'approche intuitive, consistant à calculer la réponse du bâtiment posé sur des ressorts de sol dont la base est excitée par un accélérogramme, est donc exacte dans ce cas particulier à condition que l'impédance, le «ressort» de sol, soit déterminé correctement.

### **2-1-IMPEDANCE D'UNE FONDATION RIGIDE SUPERFICIELLE**

L'impédance est donnée au centre de gravité de la surface de contact dans un repère lié aux axes principaux d'inertie de la surface. Elle s'exprime sous la forme d'une matrice  $6 \times 6$  contenant de nombreux termes nuls. Les termes de cette matrice dépendent généralement de la fréquence. Il est plus pratique et souvent plus commode d'utiliser dans les calculs dynamiques des valeurs constantes.

L'usage de coefficients d'impédance constants donne des résultats satisfaisants et est largement répandu.

Les coefficients donnés par Richart et al. pour les fondations circulaires et rectangulaires sont les plus couramment utilisés. Elles sont rappelées dans la figure 1.

La matrice de raideur intervenant dans le calcul des modes propres avec prise en compte de l'interaction sol-fondation est de la forme :



- Le deuxième est le bâtiment logements de fonction du lycée Bachir El Ibrahimy de Aïn Temouchent présenté aussi au chapitre précédent. Ayant l'étude de sol, nous en avons déduit les caractéristiques nécessaires au modèle, puis nous avons soumis le bâtiment au séisme de Aïn Temouchent afin de comparer aux résultats du chapitre précédent.

## 4-RESULTATS

Les résultats obtenus pour les deux cas étudiés sont présentés ci après :

### 4-1-BATIMENT EDF

Cette application est effectuée en considérant le bâtiment reposant sur trois types de sol différents. Leurs caractéristiques sont données dans le tableau suivant :

	$\nu$	G (MN/m <sup>2</sup> )	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Granite	0.38	11200	2640
Sable	0.38	110	1800
Argile	0.38	278	1558

Tableau 1 : Caractéristiques des sols considérés

Les fréquences propres obtenues avec le modèle mis en œuvre sont comme suit :

Numéro de mode	Granit	Argile	Sable
1	15.27 Hz	4.57 Hz	2.93 Hz
2	22.87 Hz	5.54 Hz	3.52 Hz
3	24.60 Hz	7.96 Hz	5.03 Hz
4	39.84 Hz	8.86 Hz	5.73 Hz
5	41.91 Hz	10.75 Hz	6.80 Hz
6	46.77 Hz	13.13 Hz	8.34 Hz
7	53.58 Hz	36.83 Hz	36.29 Hz
8	71.89 Hz	52.52 Hz	51.79 Hz
9	73.44 Hz	56.70 Hz	56.28 Hz
10	76.76 Hz	57.37 Hz	56.88 Hz

Tableau 2 : Fréquences propres obtenues dans le cas de l'ISS

Dans la figure ci-après on a représenté les fréquences identifiées avec et sans prise en compte de l'interaction sol-structure :

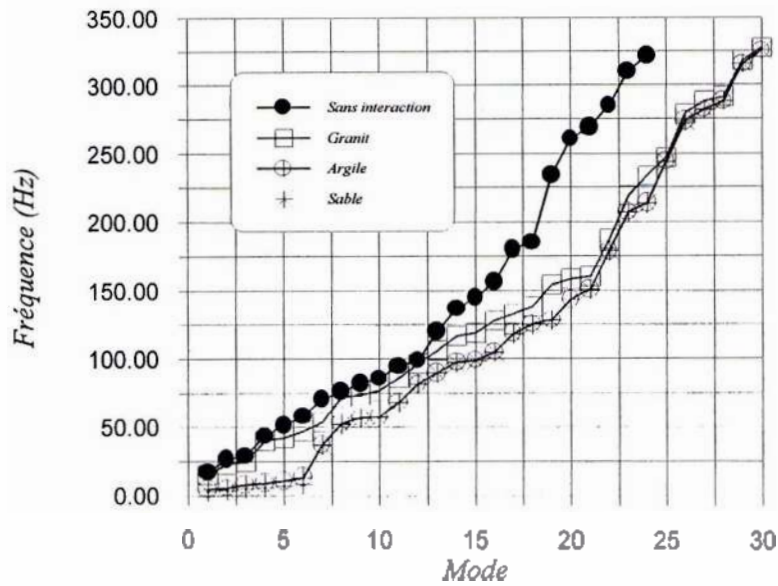


Figure2 : Comparaison entre les fréquences obtenues

On remarque un résultat bien connu, qui est que l'interaction sol-structure a tendance (en général) à baisser les fréquences de la structure. Aussi plus le sol est mou plus les fréquences propres diminuent, par contre dans le cas où le sol est ferme les fréquences se rapprochent de celles où la structure est encastree (aucun effet d'interaction). Les résultats obtenus sont donc conforme au principe général de l'effet de l'interaction sol-structure sur les fréquences modales. Fort de ce constat nous avons déterminé les modes propres de notre système sol-structure pour les différents types de sol considéré. Les courbes obtenues sont montrés ci-dessous :

**Cas du granite :**

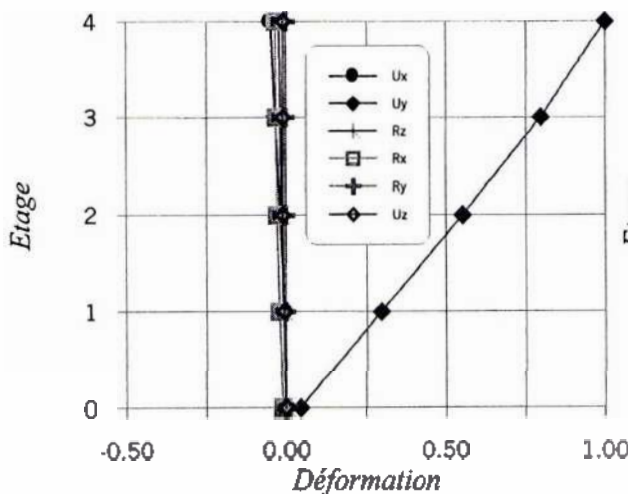


Figure 3 : 1<sup>er</sup> mode  $f=15.27$  Hz

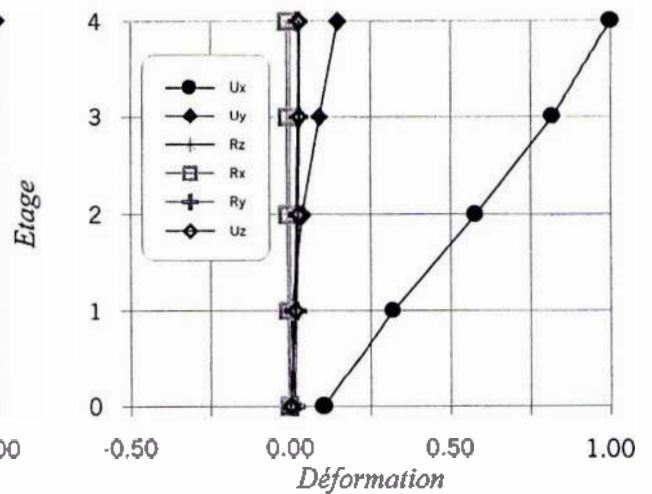


Figure 4 : 2<sup>ème</sup> mode  $f=22.87$  Hz

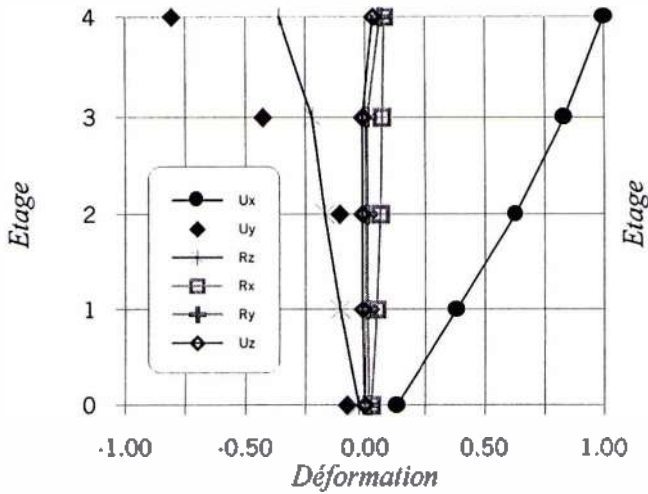


Figure 5 : 3<sup>ème</sup> mode f=24.60 Hz

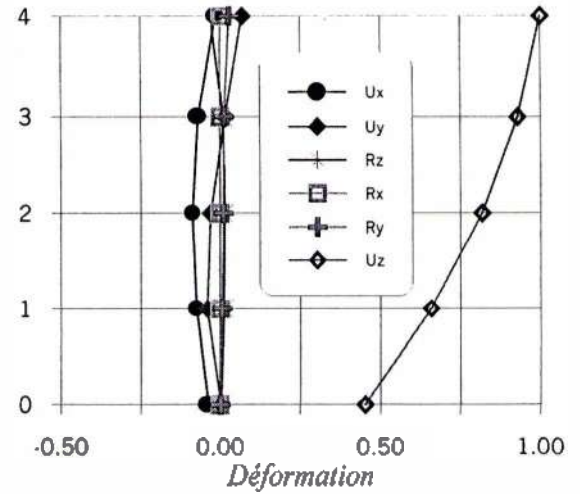


Figure 6 : 4<sup>ème</sup> mode f=39.84 Hz

En tenant compte de l'interaction sol - structure dans le cas où le sol est d'une nature granite la déformation existe dès la fondation.

Les trois premiers modes sont des modes de translation horizontale avec la présence de l'effet de torsion dans le troisième mode. Le quatrième mode est un mode de translation verticale.

**Cas de l'argile :**

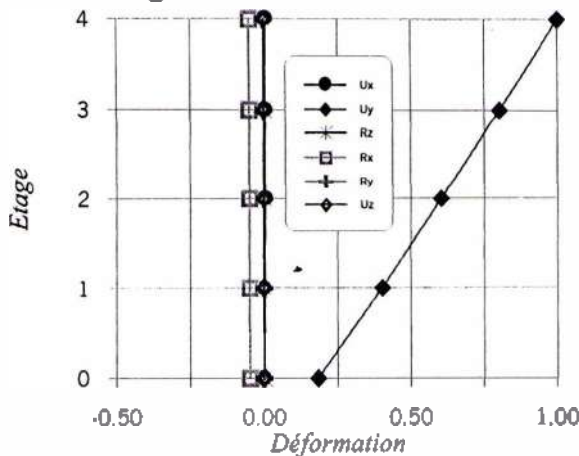


Figure 7 : 1<sup>er</sup> mode f=4.57 Hz

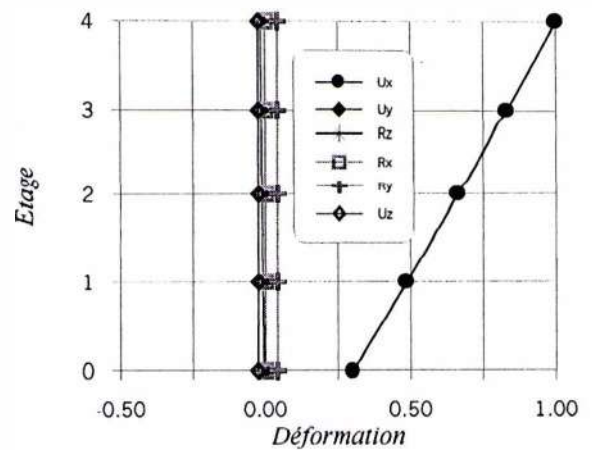


Figure 8 : 2<sup>ème</sup> mode f=5.54 Hz

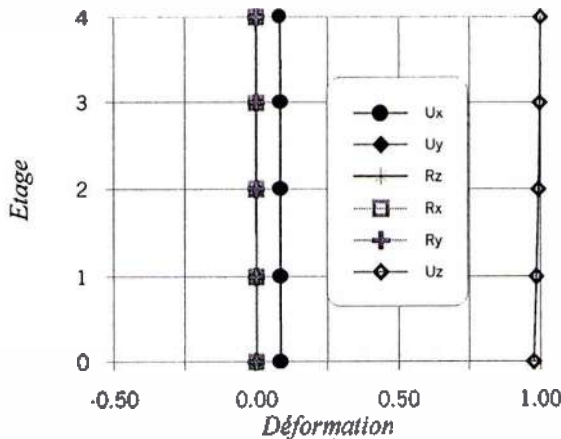


Figure 9 : 3<sup>ème</sup> mode f=7.96 Hz

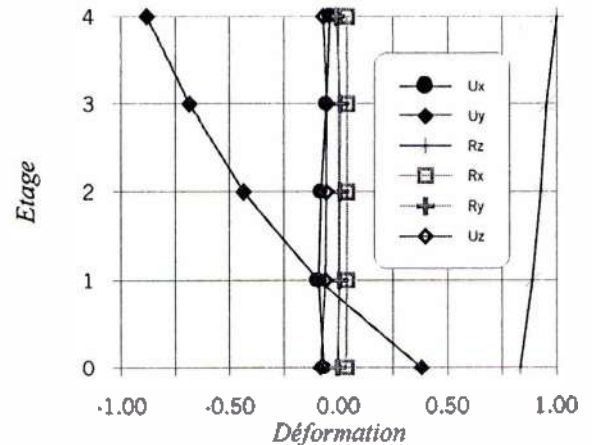


Figure 10 : 4<sup>ème</sup> mode f=8.86 Hz

Cas du sable :

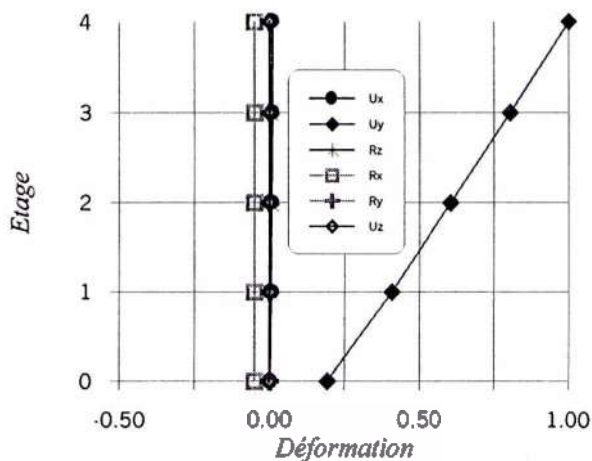


Figure 11 : 1<sup>er</sup> mode  $f=2.93$  Hz

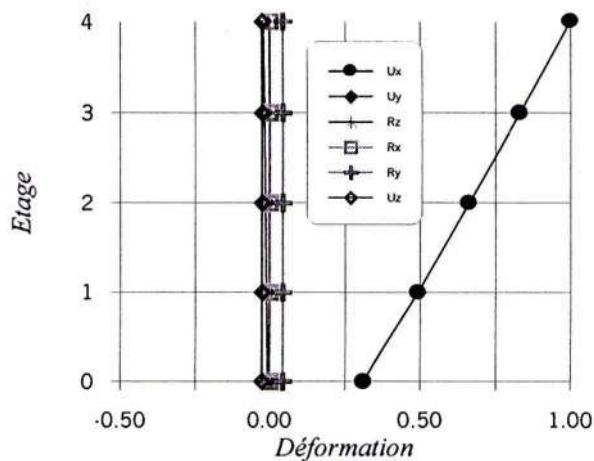


Figure 12 : 2<sup>ème</sup> mode  $f=3.52$  Hz

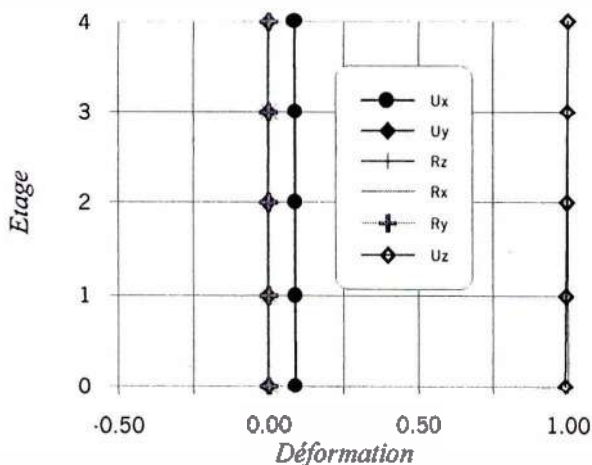


Figure 13 : 3<sup>ème</sup> mode  $f=5.03$  Hz

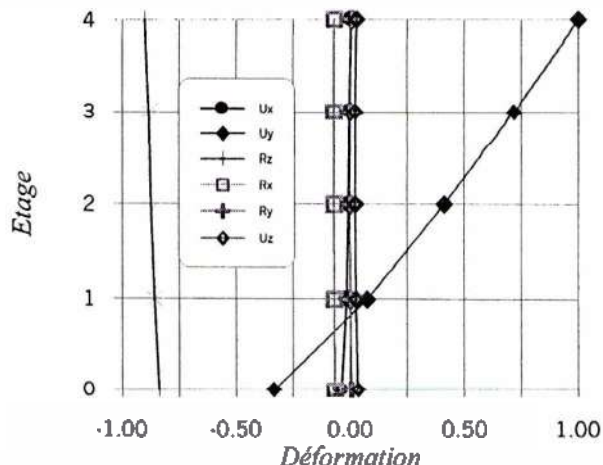


Figure 14 : 4<sup>ème</sup> mode  $f=5.73$  Hz

Dans le cas de l'argile ou du sable la déformée est plus importante à la base que celle du cas du sol en granite. La translation verticale est nettement plus prépondérante au troisième mode. La torsion est appréciable et dominante au quatrième mode. Le reste des modes sont des translations horizontales.

**4-2-BATIMENT LOGEMENTS DE FONCTION LYCEE BACHIR EL IBRAHIMI DE AIN TEMOUCHENT**

Le bâtiment logement de fonction lycée Bachir El Ibrahimy repose sur de la marne verdâtre dont les caractéristiques sont les suivantes [30] :

$$\nu=0.39 ; G=900 \times 10^6 \text{ N/m}^2 ; \rho=1800 \text{ kg/m}^3$$

Nous donnerons les résultats selon le schéma traditionnel :

### a) Fréquences propres

Les résultats obtenus en terme de fréquence sont les suivants :

Numéro de mode	Fréquence
1	1.39 Hz
2	1.77 Hz
3	2.12 Hz
4	4.00 Hz
5	6.43 Hz
6	6.82 Hz
7	7.99 Hz
8	9.08 Hz
9	10.87 Hz
10	12.37 Hz

Tableau 3 : Fréquences obtenues dans le cas de l'ISS

On remarque que les résultats obtenus sont presque confondus avec ceux où l'ISS n'est pas prise en compte (voir chap.3).

### b) Modes propres

Nous avons aussi tracé les déformations pour les quatre premiers modes.

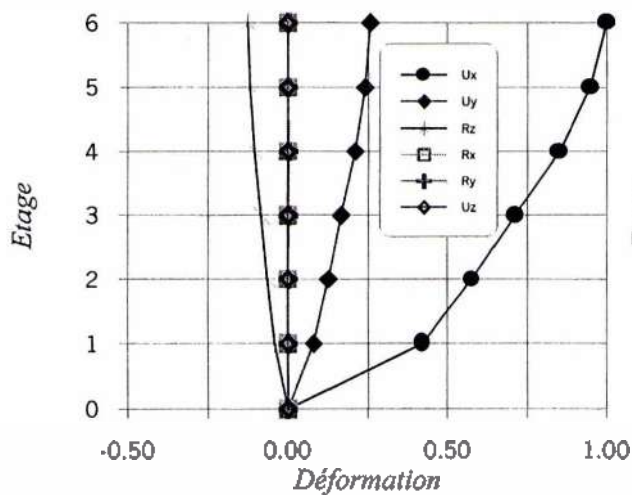


Figure 15 : 1<sup>er</sup> mode  $f=1.39$  Hz

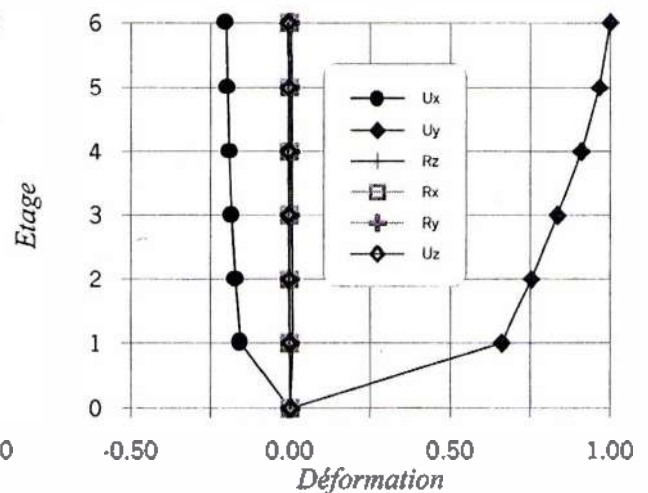


Figure 16 : 2<sup>ème</sup> mode  $f=1.77$  Hz

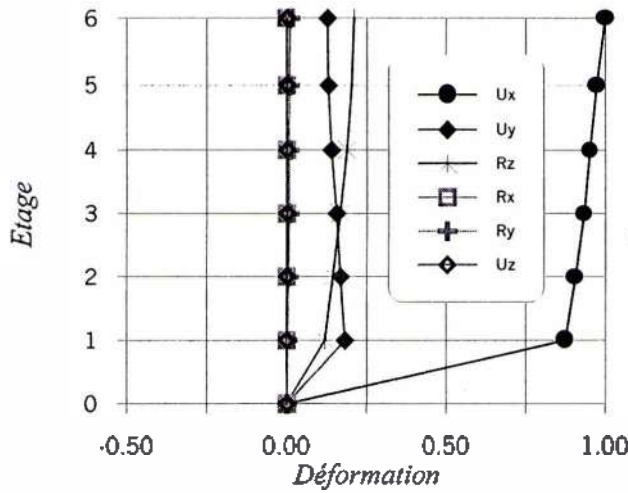


Figure 17 : 3<sup>ème</sup> mode  $f=2.12$  Hz

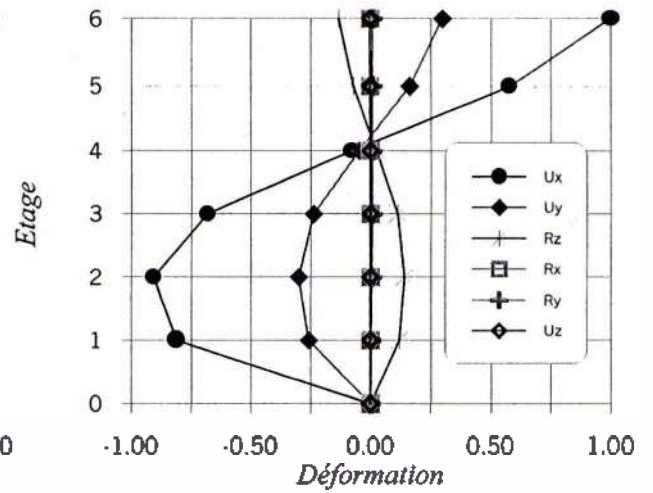


Figure 18 : 4<sup>ème</sup> mode  $f=4.00$  Hz

Les modes propres obtenus possèdent les mêmes allures que celles du cas où l'ISS n'est pas considérée (chap.3).

**c) Déplacements**

Nous traçons ci-après quelques déplacements au niveau du 6<sup>ème</sup> étage

**Déplacement en x 6<sup>ème</sup> étage**

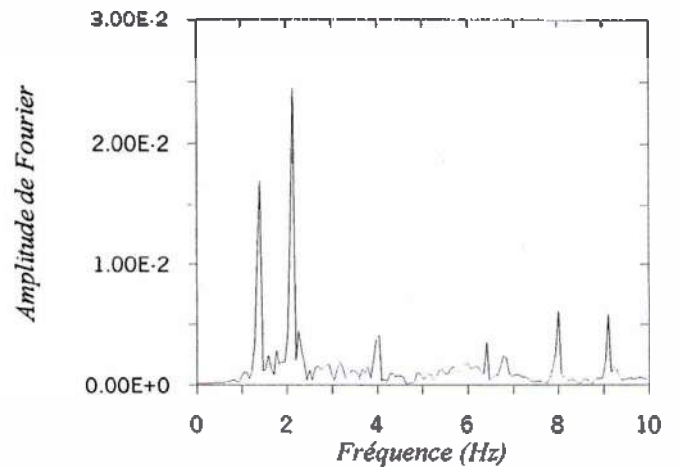
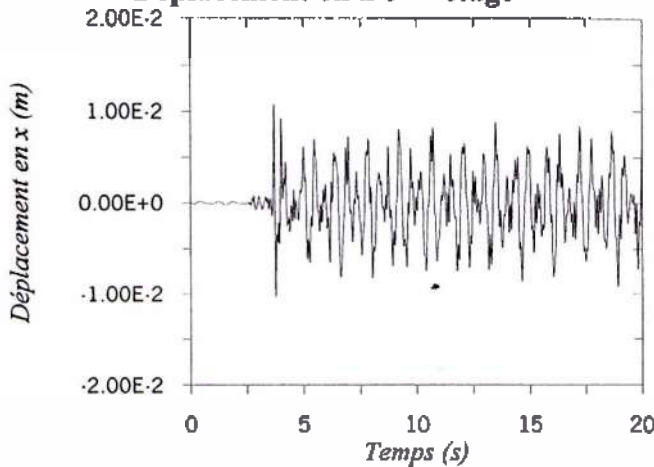


Figure 19 : Le déplacement en x 6<sup>ème</sup> étage (système non amorti)

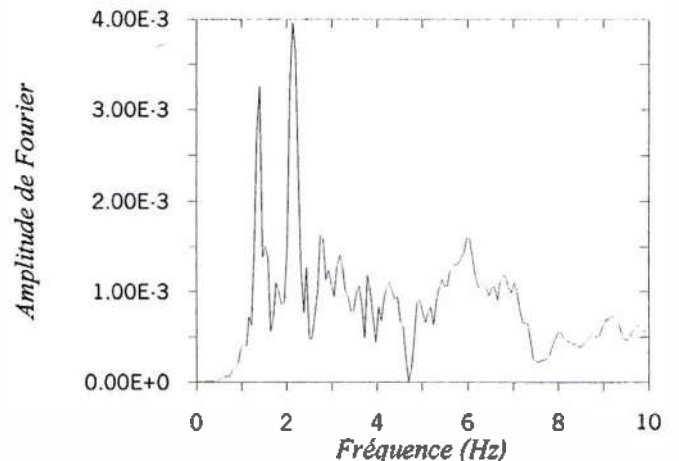
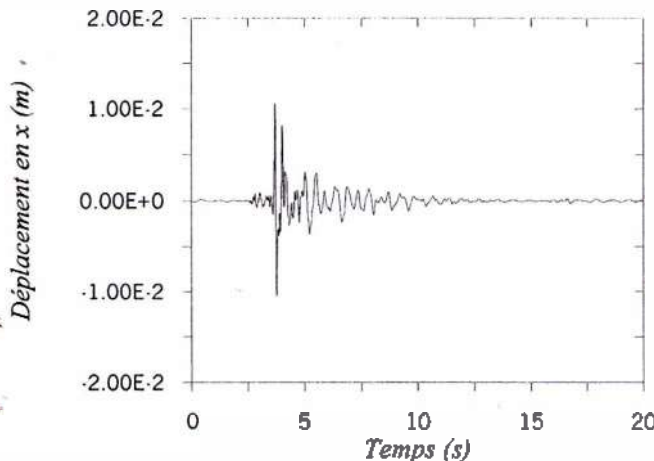


Figure 20 : Le déplacement en x 6<sup>ème</sup> étage (système amorti  $\xi=5\%$ )

### La torsion 6<sup>ème</sup> étage

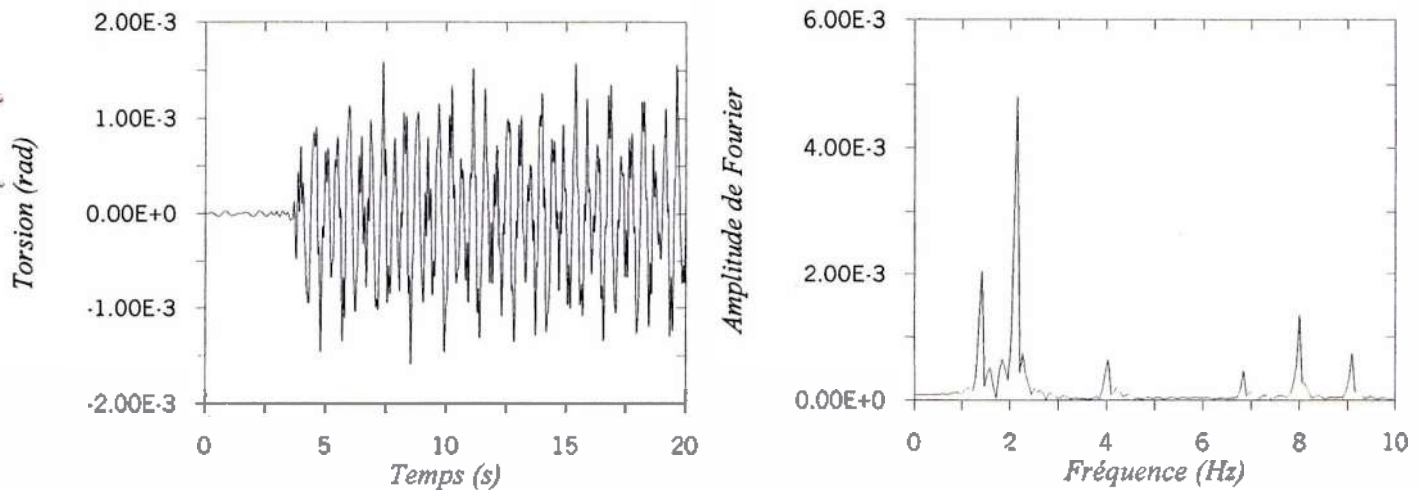


Figure 21 : La torsion 6<sup>ème</sup> étage (système non amorti)

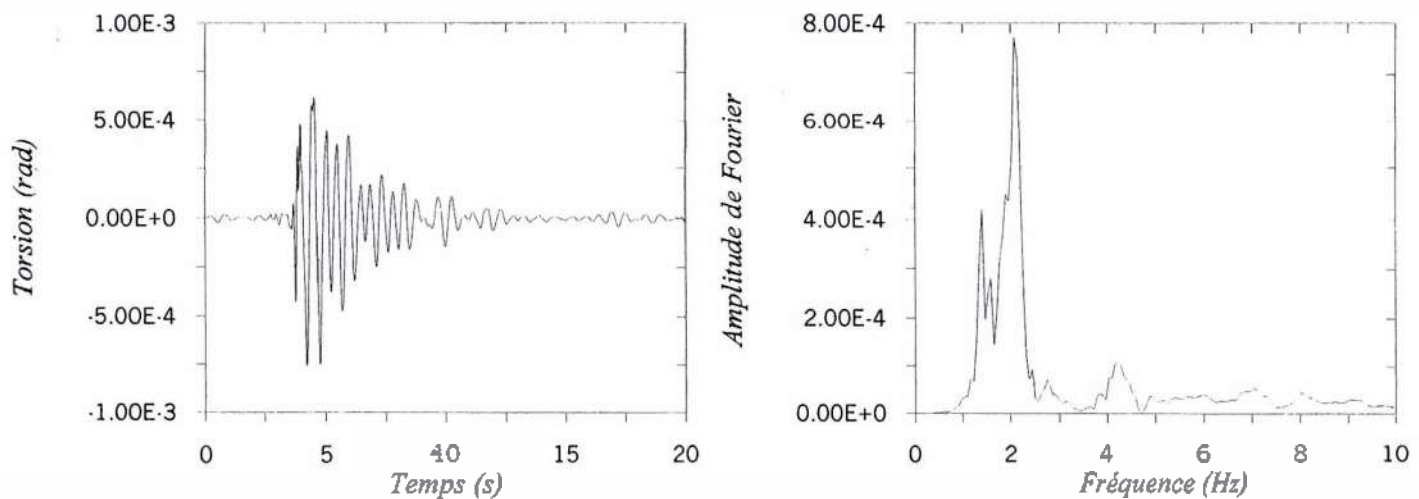


Figure 22 : La torsion 6<sup>ème</sup> étage (système amorti  $\xi_{sol}=5\%$ ,  $\xi_{struc.}=5\%$ )

Pour les déplacements la même remarque que précédemment est valable, les fréquences propres, les modes propres et les déplacements n'ont subi aucun changement.

#### d) Conclusions

Les résultats obtenus, fréquences propres, modes propres et déplacements en tenant compte des conditions de sol sont presque les mêmes avec ceux obtenus où la structure est considérée encastree à sa base (sans prise en compte l'effet de l'interaction sol – structure), ceci pour les trois valeurs de module de cisaillement  $G$ ,  $2G$  et  $1/2 G$

## 5-CONCLUSIONS

Deux exemples traités en Chap. 3 ont fait l'objet d'une analyse dans ce Chapitre, et ce en considérant l'effet de l'interaction sol-structure.

Le premier exemple est celui du bâtiment EDF et le deuxième est le bâtiment logements de fonction Lycée Bachir El Ibrahimi.

Pour le premier, les résultats tirés en termes de fréquences propres et modes propres montrent l'influence de sol, plus le sol est mou plus les fréquences diminuent, par contre dans le cas où le sol est ferme les fréquences se rapprochent de celles où la structure est encastree (aucun effet d'interaction). L'interaction sol-structure a fait apparaître aussi la translation verticale et la torsion ce qui est appréciable à partir du troisième mode, et qui deviennent nettement prépondérantes, dans le cas où le sol est mou.

Dans le deuxième exemple celui de logements de fonction lycée Bachir El Ibrahimi, les fréquences propres, modes propres et déplacements sont presque confondus avec ceux obtenus sans prise en compte de l'interaction sol-structure.

La conclusion qu'on peut tirer des exemples traités est qu'en présence de sol mou, l'effet d'interaction sol-structure ne peut être négligé, par contre dans le cas de sol ferme, ce dernier peut constituer dans certains cas une base fixe, et se comporter comme du rocher où nous n'avons aucun effet d'interaction.

## CONCLUSION GENERALE

Ces dernières années, les concepteurs de bâtiments et les architectes ont eu de plus en plus recours à des formes géométriques particulières, ceci afin d'assurer certaines fonctionnalités ou bien afin de donner un aspect esthétique particulier. Les bâtiments ainsi conçus ont des centres de rigidité et de torsion grandement excentrés, d'où la nécessité de tenir compte du phénomène de torsion particulièrement lors d'excitations sismiques.

La bibliographie, nous l'avons vu, offre un grand nombre de méthodes, permettant la prise en compte des effets de la torsion. La réglementation à travers le monde a tenté aussi d'y remédier.

Cependant aussi bien la réglementation qui n'est pas parfaite et qui ne prend pas en compte tous les effets de la torsion, que les différentes modélisations qui ne prennent pas en compte entièrement cet effet, ne suffisent pour répondre aux besoins des ingénieurs. A l'exception de la méthode des éléments finis tridimensionnels, mais cette dernière peut être fastidieuse à mettre en œuvre, les temps de calcul pouvant être longs et surtout la lecture des résultats peut prêter à confusion.

Nous avons donc cherché un compromis entre la fiabilité des résultats et la rapidité d'exécution. Nous l'avons trouvé à travers un modèle basé sur la théorie des groupes de Lie, cadre naturel de l'étude du groupe des rotations  $SO_3(\mathbb{R})$ ; ce modèle nous l'avons mis en œuvre.

Le modèle utilisé semble prometteur, vu son formalisme mathématique puissant et les résultats obtenus comparés avec ceux de l'analyse modale, des éléments finis et de la méthode expérimentale. Il est caractérisé par :

1/ une mise en œuvre facile.

2/ Un nombre de degrés de liberté réduit : le cas de lycée Bachir El Ibrahimy par exemple, le nombre de degrés de liberté est de 36 pour le modèle proposé, et de 1176 pour la modélisation en élément finis 3-D, ce qui ramène à des matrices de l'ordre de  $36 \times 36$  dans le premier cas, et de  $1176 \times 1176$  dans le deuxième cas.

- 3/ Un calcul de l'excentricité : il peut servir aux études paramétriques pour la réglementation. Par ce modèle le calcul de l'excentricité est aisé.
- 4/ Une prise en compte de l'excitation dans les trois directions.
- 5/ Le fait d'être un modèle ouvert : à l'aide de sa structure modulaire il peut prendre en considération plusieurs phénomènes ; l'interaction sol-structure, décollement de radier, dégradation des caractéristiques mécaniques des éléments.
- 6/ Un calcul des fréquences propres et modes propres rapides.
- 7/ Un calcul des six déplacements et des six efforts automatiquement
- 8/ Des résultats faciles à exploiter : la présentation du fichier résultat ne souffre d'aucune ambiguïté.
- 9/ Le fait qu'il élimine les possibilités de mise en vibration d'éléments très souples mettant en jeu des masses limitées, ceci en reposant ces masses aux nœuds des extrémités des éléments concernés.

Dans le cadre de l'interaction sol-structure que nous avons étudié sommairement, ceci afin de montrer les possibilités d'extension du programme développé. Nous avons considéré le cas des fondations rigides superficielles.

Pour la validation du programme avec ou sans interaction sol-structure, nous avons traité un certain nombre d'exemples tirés de la bibliographie. Nous avons aussi étudié des exemples concrets dont l'un fait référence au séisme de Ain Temouchent du 22 décembre 1999.

L'ensemble des investigations entreprises a donné des bons résultats corrects.

Bien entendu, l'ensemble de ces travaux ne sauraient être vus comme un travail achevé. Beaucoup de questions restent à approfondir, notamment pour l'interaction sol-structure où d'autres types de fondation peuvent être utilisés. La dégradation des caractéristiques mécaniques des matériaux est un autre axe intéressant à développer.

Nous retiendrons que ce travail nous a beaucoup apporté pour la connaissance de la torsion dans les bâtiments asymétriques lors d'une excitation sismique en particulier et du monde de la recherche plus généralement.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Bourahla N., 'Considération de la torsion dans les règlements parasismiques', Rapport de recherche, Université de Blida, Novembre, 1993
- [2] Chandler A.M. & Hutchinson G.L., 'Evaluation of code torsional provisions by a time history approach', Earthquake Engineering and structural dynamics, Vol. 15: 491-16, May, 1987.
- [3] Laredo M., 'Grand bâtiment-Contreventement-Dynamique des structures-calcul Automatique', Edition Eyrolles, 1977.
- [4] Davidovici D., 'La construction en zone sismique', Edition Le Moniteur, 1998
- [5] Alame I. & Argoul P., 'Approche hexadimensionnelle de la dynamique des bâtiments', 3<sup>ème</sup> Colloque National A.F.P.S. Génie Parasismique et Aspects Vibratoires dans le Génie Civil, Saint-Rémy-Les-Chevreuse, Vol. II, MC : 1-9, 1993.
- [6] Alame I. & Argoul P., 'Une nouvelle modélisation pour le comportement vibratoire des bâtiments', Rapport interne, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC), Noisy-Le Grand, Paris, France, 1993.
- [7] Touret J.P., 'Modélisation des bâtiments dissymétriques', 2<sup>ème</sup> colloque national AFPS Génie Parasismique et aspects vibrations dans le Génie civil, Saint Rémy-lés-chevreuse (France), 18-20 avril, 1989.
- [8] Alamé I. & Argoul P., 'Dynamic models for elastic coupled lateral and torsional response of asymmetric multistorey buildings', 10<sup>th</sup> European conference on Earthquake Engineering, Duma (ed.), 1995.
- [9] Kan C.L. & Chopra A.K., 'Coupled lateral torsional response of buildings to ground shaking', Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering university of California, May, 1976.
- [10] Chandler A.M. & Hutchinson G.L., ' Code design provisions for torsionally coupled buildings on elastic foundation', Earthquake Engineering and structural dynamics, Vol. 15 : 517-36, May, 1987.
- [11] Anniger S., Mital A.K. & Jain A.K., 'Uncoupled frequency ratio in assymetric buildings', Earthquake Engineering and structural dynamics, 1996.
- [12] Sikaroudi H. & Chandler A.M., 'Structure-foundation interaction in the earthquake response of torsionally asymmetric buildings', Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1-16, 11, 1992.

- [13] Anthony Harasimowicz P. & Goel R.K., 'Seismic code analysis of multi-storey asymmetric buildings', *Earthquake Engineering and structural dynamics*, vol.27,173-185,1998.
- [14] Règles Parasismiques Algériennes RPA 99, Document technique réglementaire D.T.R.-2.48, 2000.
- [15] Duan X.N. & Chandler A.M., 'Inelastic seismic response of code-designed multistorey frame buildings with regular asymmetry', *Earthquake Engineering and structural dynamics*, vol.22,431-445,1993.
- [16] Ghaffar-Zadeh M., 'Un modèle de fonctions d'impédance indépendantes de la fréquence d'excitation pour les systèmes sol-structure', 2ème colloque National AFPS, Génie parasismiques et aspects vibratoires dans le génie civil, Saint-Rémy-lès-Chevreuse (France), 18-20 avril, 1989.
- [17] Walter J.P.-, 'Méthodes de prise en compte de l'interaction sol-structure', Génie parasismique, sous la direction de V. Davidivici, Presses de l'école nationale des ponts et chaussées, 1985.
- [18] Humar J.L., Bagchi A. & Xia H., 'Frequency domain analysis of soil-structure interaction', *Computers & Structures*, vol.66, Nos 2-3, pp.337- 351,1998.
- [19] Pecker A., 'Dynamique des Sols', Presses de l'école nationale des ponts et chaussées, 1984.
- [20] Bayo E. & Wilson E.L., 'Numerical techniques for the evaluation of soil-structure interaction effects in the time domain', *Earthquake Engineering Research Center*, February,1983.
- [21] Lysmer J., 'Analytical procedures in soil dynamics', *Earthquake Engineering Research Center*, December, 1978.
- [22] Chambadal L., 'Dictionnaire de Mathématiques', Hachette, 1981.
- [23] Clough R.W. & Penzien J., 'Dynamique des structures, Tome 1 Principes fondamentaux', Editions Pluralis, 1980.
- [24] Tiliouine B., 'Dynamique des structures, Tome 1 : Aspects vibratoires', GECOTEC, Alger 2000.
- [25] Piskounov N., 'Calcul différentiel et intégral', Editions de Moscou, 1980
- [26] Press W.H. & al, 'Numerical recipes (Fortran)', Cambridge university Press, 1992.
- [27] Sap2000 manuals, *Integrated Finite Elements Analysis and Design of Structures*, Computers and structures, Inc. Berkeley, California, USA, June, 1998.

- [28] Riddell R., 'Inelastic design spectra accounting for soil conditions', Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol 24, pp 1491-1510, 1995.
- [29] Wolf J.P., 'Foundation vibration analysis using simple physical models', Printice Hall, 1994.
- [30] 'Etude de sol : zhun Nord Est/ Ilot F Ain Temouchent', Laboratoire National de l'Habitat et de la Construction, Mai, 1995.
- [31] Teyssier J.-L., Ducourtieux J.-P & Moliton J.-P, 'flash U,Mecanique', 1 Cinématique du point et du solide rigide', Armand Colin, Novembre, 1985.
- [32] Hani T., 'Mécanique Générale', Office des Publications Universitaires, Juin, 1983
- [33] Filiatrault A., 'Eléments de génie parasismique et de calcul dynamique des structures', Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal, 1996.
- [34] Caignaert G. & Henry J.-P, 'Exercices d'élasticité', dunod, Paris, 1976.
- [35] Séminaire animé par le centre national de recherche applique en génie parasismique (C.G.S), 'Exemples d'application avec les RPA 88 et les RPA 99', 18 et 19 Octobre, 1999.
- [36] Ewins D.J., 'Modal Testing :Theory and Practice', Research studies press LTD. London, September, 1984
- [37] Gibert R.J., ' vibrations des structures', CEA EDF-INRIA. Ecole d'été d'analyse numérique, 1988.
- [38] Goulet J., ' Aide-mémoire de résistance des matériaux, Paris, 1976.

