

Ecole Nationale des Travaux Publics



MEMOIRE DE MAGISTER

Option: structure et matériaux

Présenté par

GHERBOUDJ FAOUZI

Ingénieur d'Etat en travaux publics, Promotion 2005 (ENTP)

Pour obtenir le titre de

MAGISTER

en **GENIE CIVIL**



Sujet

**ETUDE DYNAMIQUE ET SISMIQUE DES FONDATIONS FILANTES
ENTERREES DANS UN DEMI-ESPACE PORO-ELASTIQUE PAR LA
METHODE DES ELEMENTS DE FRONTIERE**

Soutenu le 18/05/2008

Devant le jury composé de :

Président	M. K. BERRAH	Professeur	ENP
Directeur du Mémoire	M. HADID	Maître de conférences	ENTP
Examineurs	A. ZERZOUR	Maître de conférences	ENTP
	H. AFRA	Directeur de recherche	CNERIB
	M. BENZAIBI	Maître de conférences	USTB

To my family

REMERCEMENTS

J'exprime toute ma profonde reconnaissance à Monsieur HADID MOHAMED. Mon directeur de mémoire, qui m'a témoigné de sa confiance et de son aide scientifique et qui, par son expérience et sa compétence, m'a transmis, pas à pas, sa passion pour cette investigation de recherche. Qu'il trouve ici l'expression de ma sincère gratitude.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Président du jury le professeur M. K. BERRAH qui me fait l'honneur de présider le jury ; j'y suis d'autant plus sensible que j'ai suivi ses cours avec un grand intérêt.

Je tiens à remercier vivement A. ZERZOUR, H. AFRA et M. BENSAIBI pour l'intérêt qu'ils témoignent à mon travail en acceptant d'en être examinateurs, et pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury. Leurs avis me sont particulièrement importants.

Mes remerciements s'adressent également à M.Y. MEHIAOUI HADJEBAR pour son aide dans la théorie des milieux poreux, ainsi à F. GHERBOUDJ qui a contribué à me faciliter la tâche de la programmation.

J'adresse ma sincère gratitude à mes parents, mes frères et mes sœurs, je les remercie pour leur soutien qui n'a jamais cessé.

Merci aussi à tous ceux qui m'ont aidé ou soutenu d'une manière ou d'une autre, je pense notamment à mes meilleurs amis.

CHAPITRE 1 : INTRODUCTION GENERALE.....	2
CHAPITRE 2 : INTERACTION SOL-FONDATION : NOTIONS ESSENTIELLES ET ETAT D'ART.....	5
2.1 Introduction.....	5
2.2 Analyse de l'interaction Sol-Structure	6
2.2.1 Définition.....	6
2.2.2 Méthodes de prise en compte de l'interaction sol-fondation	6
a. Méthode globale	7
b. Méthode de sous structures	7
2.4. Introduction à la notion des fonctions d'impédance.....	8
2.4.1 Définition des fonctions d'impédance	8
2.4.1.1 Impédance d'un oscillateur simple à un degré de liberté.....	8
2.4.1.2 Forme générale de l'impédance d'une fondation	10
2.4.2 Méthodes de calcul des fonctions d'impédance	11
2.5 Etat d'art en matière d'analyse dynamique de l'interaction sol-fondation.....	12
2.5.1 Calcul de la fonction d'impédance.....	12
2.5.2 Estimation de l'interaction cinématique.....	14
2.5.3 Fondation reposant sur un sol poro-élastique	15
2.6 Conclusion	18
CHAPITRE 3 : GENERALITES SUR LES MILIEUX POREUX.....	19
3.1 Introduction	19
3.2 Historique	19
3.3 Equations du modèle poro-élastique de Biot	20
3.3.1 Lois de comportement.....	20
3.3.2 Equations du mouvement.....	23
3.3.3 Présentation des constantes matérielles	23

a. Les modules d'élasticité	23
b. Les coefficients dynamiques des masses	25
3.3.4 Cas limites des constantes matérielles	26
3.4 Propagation des ondes dans les milieux poreux	27
3.4.1 Introduction	27
3.4.2 Equation de mouvement	28
a) Solution pour les l'ondes P.....	29
b) Solution pour les l'ondes S	30
3.4.3 Conditions de frontière pour les milieux poreux.....	30
3.5 Méthodes d'analyse dynamique des milieux poreux	31
3.6 Conclusion.....	33

**CHAPITRE 4 : LA METHODE DES ELEMENTS DE FRONTIERE EN PORO-
ELASTODYNAMIQUE.....34**

4.1 Introduction et bibliographie	34
4.2 Principe de la méthode des éléments de frontière	35
4.3 Les équation d'équilibre	36
4.4 Théorème de réciprocité.....	38
4.5 Formulation intégrale.....	38
4.6 Solution fondamental.....	41
4.7 Formulation intégrale discrétisée.....	42
4.8 Evaluation des intégrales	43
4.9 Conclusion	45

CHAPITRE 5 : IMPEDANCE DYNAMIQUES DES FONDATIONS FILANTES....46

5.1 Introduction	46
5.2 Fonction d'impédance.....	47
5.3 Evaluation des fonctions d'impédance par la BEM.....	48
5.3.1 Formulation intégrale	48
5.3.2 Condition aux limites.....	49
5.3.2 Evaluation de la matrice d'impédance.....	51
5.4 Fondation filante reposant sur une couche de sol surmontant un substratum.....	53

5.4.1 Substratum élastique.....	53
5.4.1 Substratum rocheux.....	57
5.5 Présentation des résultats	58
5.6 Conclusion.....	64

CHAPITRE 6 : ANALYSE DE LA REPOSE SISMIQUE DES FONDATIONS

FILANTES.....	79
6.1 Introduction	79
6.2 Réflexion des Ondes Planes (P_1 et SV) de la surface d'un demi-espace	
Poro-élastique.....	80
6.2.1 Onde incidence P.....	80
6.2.2 Onde incidence SV.....	82
6.3 Calcul des contraintes et des déplacements en champ libre.....	83
6.3.1 Réponse d'un demi-espace poro-élastique.....	83
6.3.2 Calcul des amplitudes.....	85
Onde P_1	85
Onde SV	85
6.4 Détermination de la réponse sismique des fondations par la méthode des éléments de frontière	86
6.5 Présentation et-analyse des résultats.....	89
6.6 Conclusion	92

CHAPITRE 7 : CONCLUSION GENERALE ET RECOMMANDATIONS.....111

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....115

ANNEXE.....124

A1 La méthode des éléments de frontière en élastodynamique	124
A1.1 Les équations d'équilibre dynamique	124
A1.2 Théorème de réciprocité.....	125
A1.3 Equations intégrales régularisées.....	125

A1.4	Formulation intégrale discrétisée	126
A1.5	Fonction de Green du milieu infini en élastodynamique.....	126
A1.6	Traitement des Intégrales singulières.....	127
A2	La méthode des éléments de frontière en poro-élastodynamique	129
A2.1	Fonction de Green du milieu infini en poro-élastodynamique.....	129
A2.2	Traitement des Intégrales singulières.....	130
A3	Réponse d'un demi-espace poro-élastique	131
A3.1	Déplacements et contraintes pour une onde d'incidence P1.....	131
A3.2	Déplacements et contraintes pour une onde d'incidence SV.....	132

INTRODUCTION GENERALE

L'étude de la réponse dynamique des fondations rigides revêt une importance significative dans la conception des fondations supportant les machines vibrantes, ainsi que dans la conception d'ouvrages avec prise en compte de l'interaction sol-fondation. Le problème de l'interaction sol-fondation peut être résolu soit par l'approche directe qui analyse le système sol-structure dans son ensemble ou bien, si l'on se place dans l'hypothèse de l'élasticité linéaire, par l'approche des sous-structures qui le traite après sa décomposition en sous problèmes.

L'approche par sous-structures, quant à elle, est plus intéressante car elle permet de décomposer le problème global en plusieurs problèmes de taille réduite. La solution du problème globale est obtenue en superposant les solutions des problèmes partiels. Le problème de l'interaction sol-structure est généralement divisé par cette approche en deux parties : la première est l'interaction cinématique qui consiste à déterminer la réponse de la fondation sans masse à l'excitation externe, la seconde est l'interaction inertielle, qui calcule la réponse de la structure à partir des résultats de l'étape précédente.

Dans le cadre de l'interaction cinématique, l'évaluation de la rigidité dynamique des fondations rigides non pesantes est une étape fondamentale et fait l'objet des recherches soutenues. Plusieurs méthodes de résolution, ont été proposées afin d'évaluer l'impédance des fondations. Certaines de ces procédures étaient purement analytiques, alors que d'autres étaient numériques faisant appel à la méthode des éléments finis, à la méthode des couches minces, ou encore à la méthode des éléments de frontière. La difficulté majeure de ces problèmes a été la représentation de la radiation de l'énergie dans un domaine non borné. La BEM s'est avérée être une approche très efficace à cet égard, elle satisfait implicitement les conditions de radiation pour les domaines infinis ou semi-infinis.

L'étude d'un problème d'interaction sol-fondation peut se limiter à la détermination des fonctions d'impédance si les charges considérées sont extérieures (machine vibrante, vent...); or les charges les plus destructives pour des structures importantes restent les séismes (charge interne). De ce fait, le traitement de la réponse sismique des fondations

s'est imposé. La variabilité spatiale a été prise en compte dans ce volet (l'effet du passage d'ondes).

Bien que la plupart des traitements d'interaction dynamique sol- fondation sont basé sur un modèle monophasique élastique du sol, néanmoins il existe quelque études dans les deux dernières décennie portant sur la propagation des ondes dans les milieux poro-élastique basée sur la théorie de Biot. Dans ce travail, nous proposons d'étudier la réponse dynamique et sismique des fondations filante rigides bidimensionnelles enterrées dans un demi espace poro-élastique ou reposant sur un profil du sol surmontant un substratum, le modèle bi-phasique du sol présente un intérêt additionnel qui nous permet d'étudier l'effet de certains paramètres tels que la perméabilité, la porosité et le degré de saturation sur la réponse dynamique et sismique des fondations.

Le travail effectué dans le cadre de cette recherche a été organisé de la manière suivante :

- Notions essentielles de l'interaction sol-structure sont passées en revue dans le chapitre deux, il s'agit de présenter la définition de l'interaction sol-fondation et les différentes méthodes usuelle pour l'estimer ainsi que la définition de la fonction d'impédance et état d'art en matière de l'interaction sol-fondation.
- Le troisième chapitre est consacré à un exposé des généralités sur les milieux poreux. Nous présentons l'ensemble des équations du modèle de Biot ainsi qu'une étude de la propagation des ondes dans les milieux poro-élastique basée sur la théorie de Biot.
- Le quatrième chapitre est relatif au traitement des problèmes de la poro-élastodynamiques stationnaires par la méthode des équations intégral de frontière. Nous présentons quelques notions de la BEM notamment le théorème de réciprocité en dynamique, la solution fondamental, les équations intégrales régularisées et la formulation intégrale discrétisée.
- Le chapitre cinq constitue la première étape dans l'évaluation de la réponse dynamique de la structure. En effet il s'agit de déterminer les fonctions d'impédance des fondations filantes rigides superficielles et enterrées reposant sur un milieu poro-élastique. La transcriptions informatique de cette formulation est effectuée par l'élaboration d'un code de calcule. Ce code permet en premier lieu de calculer les

mouvements rigides de translation et de rotation de fondation filante reposant sur un demi-espace poro-viscoélastique et soumis à des excitations harmoniques. En deuxième lieu, la fondation reposant sur un profil de sol poro-viscoélastique surmontant un substratum. Nous fournissons également les résultats d'une étude paramétrique relative à l'influence des propriétés mécaniques du milieu poreux. L'effet de l'épaisseur de la couche du sol et de la rigidité du demi espace élastique est également étudié.

- Le chapitre six , après une présentation sommaire de la réponse du demi-espace poro-élastique soumis à des ondes incidentes P_1 et SV , nous étudions la réponse cinématique des fondations filantes rigides superficielles et enterrées soumis à différents types d'ondes. Les résultats obtenus nous permettent de distinguer l'effet du passage d'ondes sur les différents modes de vibrations.
- Enfin, le chapitre sept est consacré à une conclusion générale et recommandations pour les travaux futures.

INTERACTION SOL-FONDATION : NOTIONS ESSENTIELLES ET ETAT D'ART

2.1 Introduction

Jusqu'à un passé relativement récent, les structures soumises à des charges dynamiques sont supposées encastées à leur base. Cette hypothèse, souvent dans les usages pour les structures courantes, se trouve peu à peu remise en question à la faveur d'une conjonction de faits. Ainsi, l'avènement de l'ère de l'information avec l'apparition des calculateurs puissants d'une part, et les normes d'exigences de plus en plus élevées en matière de conception de système et d'ouvrages stratégiques d'autre part, ont donné au phénomène d'interaction sol-structure toute son importance.

Au début du développement de la théorie de l'interaction sol-structure, une attention particulière a été accordée aux dit problèmes 'à charges externes' i.e la charge est appliquée directement à la structure, par exemple la structure élancées soumises à l'action du vent ou les structures supportant des machines vibrantes. Dans ce cas, l'interaction se présente comme le résultat des forces extérieures et d'inerties transmises à un sol interagissant aux efforts imposés. Une telle interaction est appelée 'interaction inertielle'. L'énergie transmise au sol se propage sous forme d'onde de contraintes et se dissipe sous l'effet de l'amortissement radiatif.

La conception d'ouvrages d'importance stratégique tels que les centrales nucléaires et les barrages etc. a incité les chercheurs à considérer les charges internes i.e prenant naissance au sein du sol tel que le séisme. Dans ce cas, il y a lieu de considérer les charges internes comme une interaction supplémentaire qui apparaît à cause de la non flexibilité de la

fondation par rapport au sol. La fondation se présente alors comme un objet opaque réfléchissant les ondes sismiques incidentes produisant ainsi une dispersion du champ d'ondes qui modifie localement le mouvement. Ce phénomène est appelé l'effet de passage d'onde ou dispersion des ondes sismiques par une inclusion rigide ou encore 'interaction cinématique'. Cette interaction dépend de la géométrie de la fondation, de la configuration du sol et de l'angle d'incidence. Il est tout à fait évident que l'évaluation de l'interaction cinématique est plus difficile que l'évaluation de l'interaction inertielle.

La réponse d'une structure soumise à une charge dynamique dépend étroitement du sol de fondation. Si par exemple la fondation est sur un sol rocheux, il est évident que l'effet de l'interaction est négligeable alors qu'il est plus important si elle est sur un sol souple ou flexible.

2.2 Analyse de l'interaction sol-fondation

2.2.1 Définition

L'interaction sol structure est une discipline de la mécanique appliquée s'intéressant au développement de méthodes théorique et pratiques pour l'analyse des structures soumises a des charges dynamiques en prenant en considération l'influence du sol de fondation et de ses propriétés.

L'interaction sol-structure (ISS) signifie la modification du mouvement du sol ou de la structure lors d'une excitation dynamique du fait de la présence de l'autre composante. Il faut donc dire que le mouvement de l'interface sol-structure est différent du mouvement en champ libre et différent aussi du mouvement de l'interface en l'absence de la structure i.e le sol moins la partie excavée.

2.2.2. Méthodes de prise en compte de l'interaction sol-fondation

Même dans l'état actuel des connaissances, il n'est pas possible de cerner tous les paramètres intervenant dans le comportement du sol et de la structure (fondation). Des hypothèses simplificatrices sont à formuler pour parvenir à étudier le problème d'ISS moyennant un modèle relativement simple.

Parmi les méthodes de prise en compte de l'interaction sol-structure, il y a principalement la méthode globale et la méthode par sous structures.

a. la méthode globale :

Comme leur nom l'indique les méthodes globales sont celles qui analysent le comportement du sol et de la structure de manière simultanée. Le plus souvent la méthode des éléments finis (MEF) est utilisée pour résoudre le problème de l'ISS par l'approche globale.

La méthode des éléments de frontières (BEM) peut également traiter le problème mais dans le cas linéaire seulement. Comme tous problèmes dynamique, un problème traité par l'approche globale peut être étudié soit dans le domaine temporel soit dans le domaine fréquentiel. Dans le domaine temporelle la solution est obtenue par la méthode d'intégration directe, et tout type de comportement peut être envisagé (comportement non linéaire du sol ou de la structure, décollement ou glissement à l'interface etc.). Par contre dans le domaine fréquentiel on utilise les transformations de Fourier qui donnent une solution plus simple, l'inconvénient est la limitation au domaine linéaire.

b. La méthode de sous structures :

Cette approche décompose le problème de l'interaction Sol-Structure en plusieurs sous problèmes (étapes). Chaque sous problème est censé plus simple à modéliser ou à résoudre que le problème globale. La solution globale est obtenue en superposant les solutions élémentaires. Cette méthode est particulièrement attrayante dans le cas où une partie du système a une géométrie simple (fondation par exemple) alors que la structure nécessite une analyse plus poussée. Elle permet aussi d'apprécier la part relative de chaque composante (interaction cinématique ou inertielle) contribuant à la réponse globale. D'autre part, il y a lieu de citer l'avantage de la facilité de mise en œuvre de cette méthode et son aptitude à réutiliser les résultats de l'analyse d'une partie d'un système global qui se retrouverait dans un système globale différent. Notons au passage la limitation de cette approche à l'analyse des domaines linéaires, car elle est basée sur le théorème de superposition (figure 2.1). La méthode des trois étapes décompose le problème de la manière suivante :

Dans un premier temps, on calcule le mouvement de la fondation rigide sans masse vis-à-vis de l'excitation dynamique appliquée au système d'origine. Cette étape tient compte de l'interaction cinématique. Ensuite on évalue les fonctions d'impédance en condensant les degrés de liberté à l'interface en un seul point de référence, on obtient alors une liaison de la fondation à une base rigide par des ressort et des amortisseurs dans les six degrés de

liberté de la fondation. La troisième étape est celle de l'évaluation de la réponse de la structure reliée par le système ressorts-amortisseurs déterminé dans la deuxième étape, et sujet à l'excitation calculée dans la première étape.

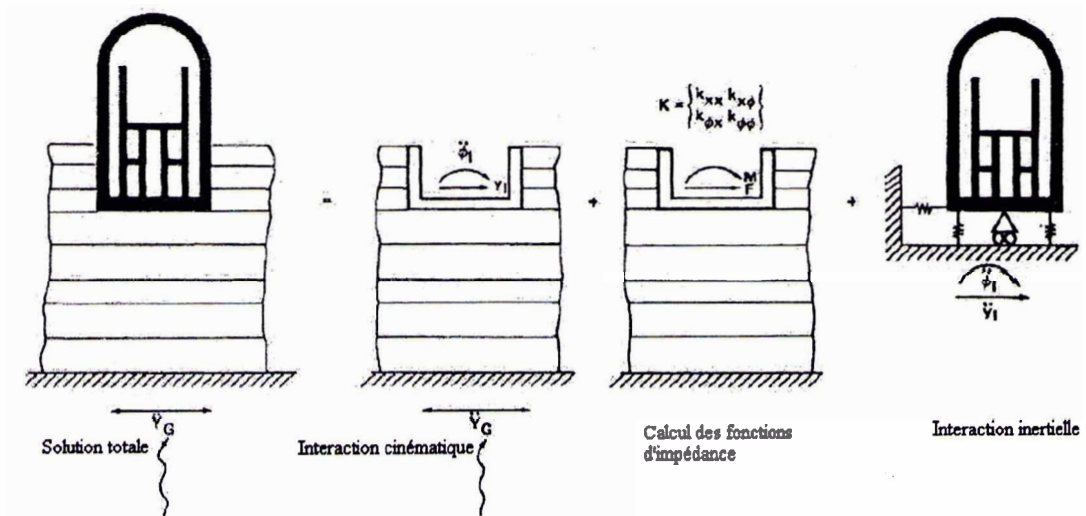


Figure 2.1 théorème de superposition

2.4. Introduction a la notion de fonction d'impédance

Une des étapes les plus importantes dans l'évaluation de la réponse dynamique des structures est le calcul des fonctions d'impédance, ou rigidités dynamiques, d'une fondation rigide et non pesante.

Les fonctions d'impédance sont un moyen de remplacer le sol qui retient la fondation par un système de ressort et d'amortisseurs reliant, cette fois, la fondation pesante à une base fixe ou rigide. La liaison est faite pour les six degrés de liberté. Ces fonctions d'impédance dépendent essentiellement de la fréquence d'excitation et de la géométrie de la fondation.

2.4.1 Définition des fonctions d'impédance

2.4.1.1 Impédance d'un oscillateur simple à 1 degré de liberté

Une modélisation simple didactique d'un tel problème est un oscillateur simple à un degré de liberté (d.d.l) (figure 2.2).

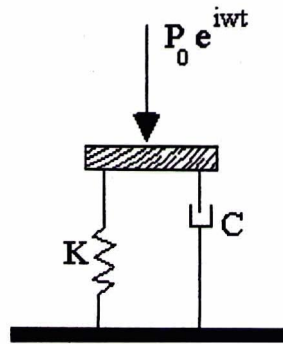


Figure 2.2: impédance d'un oscillateur simple

L'équation d'équilibre dynamique d'un tel oscillateur, de caractéristique M , K , C soumis à une sollicitation harmonique s'écrit :

$$M \ddot{y} + C \dot{y} + Ky = P_0 e^{i\omega t} \quad (2.1)$$

La solution générale a pour expression :

$$y(t) = \frac{P}{(K - \omega^2 M) + i\omega C} e^{i\omega t} \quad (2.2)$$

On pose

$$y(t) = y_0(\omega) e^{i\omega t} \quad (2.3)$$

Substituant l'équation (2.3) dans (2.2), nous obtenons :

$$y_0(\omega) = \frac{P}{(K - \omega^2 M) + i\omega C} \quad (2.4)$$

$$(-\omega^2 M + i\omega C + K)y_0 = P \quad (2.5)$$

D'où l'impédance dynamique de l'oscillateur s'écrit donc comme étant :

$$K_d(\omega) = -\omega^2 M + i\omega C + K \quad (2.6)$$

On peut déduire l'impédance statique comme :

$$K_d(\omega) = K_s(k(\omega) + i\omega c(\omega)) \quad (2.7)$$

Où les coefficients sans dimensions de rigidité et d'amortissement sont

$$k(\omega) = 1 - \omega^2 \frac{M}{K} = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad (2.8)$$

$$c(\omega) = \frac{C}{K} = 2 \frac{\xi}{\omega_0} \quad (2.9)$$

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ et $\xi = \frac{C}{2\sqrt{KM}}$

La partie réelle de $K_d(\omega)$ caractérisée par $k(\omega)$ varie paraboliquement en fonction de la fréquence.

La partie imaginaire spécifiée par $c(\omega)$ représente la dissipation de l'énergie dans le système, diminue linéairement avec la fréquence.

2.4.1.2 Forme générale de l'impédance d'une fondation :

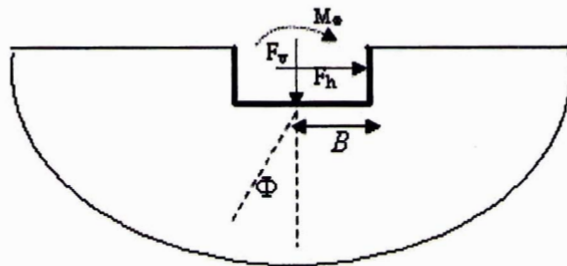


Figure 2.3. géométrie et notation d'une fondation enterrée

Par définition, l'impédance de la fondation est égale à la réaction exercée sur la fondation sans masse lorsqu'elle est soumise à des déplacements harmoniques unitaires dirigés suivant l'un quelconque de ses degrés de liberté. La fondation étant sans masse, l'impédance représente également le quotient d'une force directement appliquée à la fondation (qui est égale à la réaction du sol) par le déplacement résultant.

Les fonctions d'impédance sont donc la relation matricielle qui relie la résultante des forces et des moments appliqués à la fondation aux six composantes de déplacement et de rotations, référés à un point de référence qui est généralement le centre de la base de la fondation.

$$F = KU \quad (2.10)$$

F : forces et moments appliqués à la fondation

U : translations et rotations du point de référence de la fondation.

K : matrice définissant les fonctions d'impédance ou rigidités dynamiques.

Les termes de la matrice sont complexes et souvent, on les décompose en une partie réelle et une autre imaginaire. On les écrit sous la forme suivante :

$$K = K_s(k + ia_0c) \quad (2.11)$$

Avec

K_s : rigidité statique.

k, c : coefficients de rigidité et d'amortissement.

$a_0 = \omega B / C_s$: Fréquence adimensionnelle dépendant de la fréquence d'excitation, le type du sol et du demi-largeur du fondation.

ω : fréquence d'excitation ;

B : demi-largeur de la fondation

C_s : vitesse de propagation des ondes de cisaillement caractérisant le type de sol.

2.4.2 Méthodes de calcul des fonctions d'impédance

Plusieurs méthodes pour l'évaluation des fonctions d'impédance sont actuellement disponibles, à savoir les méthodes analytique, semi analytiques et numériques. Le choix de l'une de ces méthodes dépend essentiellement de la précision exigée des résultats, des moyens disponibles et de la nature du problème posé.

Parmi les méthodes numériques, on peut citer la méthode des éléments finis, qui est particulièrement utilisé pour traiter les problèmes complexes qui ne peuvent pas être résolus par des formulations analytiques. Il en est ainsi lorsque la géométrie du problème est complexe, lorsque le sol est hétérogène avec des couches non horizontales, etc. L'ensemble de la fondation et du sol sont modélisés par un maillage d'éléments finis et le problème est alors traité dans sa globalité, selon une méthode dite 'méthode direct'. A chaque élément du maillage peuvent être attaché des propriétés mécaniques propres. La solution de ce problème nous donne des déplacements aux nœuds. Ensuite, à partir de ces déplacements et des fonctions de forme utilisées dans chaque élément, le tenseur de contrainte peut être déduit en tout point intérieur. Les fondations enterrées et les sols multicouches peuvent être étudiés sans effort supplémentaire par la MEF. Cependant, le problème géomécanique est fréquemment infini dans une ou plusieurs directions et il doit être modélisé par un maillage fini qui nécessite la mise en œuvre d'une frontière spéciale. Actuellement, trois principaux types de frontières ont été développés :

- La frontière visqueuse n'amortissant parfaitement que les ondes P et S à incidence normale.
- L'introduction d'éléments infinis avec des fonctions de forme spéciales.
- La frontière consistante.

Cette dernière, après calcul des modes propres de la frontière discrétisée par éléments finis, absorbe tous ces modes propres. Elle peut être placée près de la fondation puisque l'angle d'incidence peut être quelconque. Quant à la limite horizontal inférieure, elle est souvent choisie de type visqueux si on veut modéliser un demi espace infini, car à une profondeur suffisante, les ondes qui l'atteignent sont à incidence normale, par contre, si la limite inférieure est un substratum rigide, on impose des condition aux limites spéciales pour les nœuds de la base.

Une autre méthode numérique, en l'occurrence la méthode des équations intégrales aux frontières est plus ancienne que la précédente dans sa formulation mathématique mais plus récente dans sa mise en œuvre numérique. Elle s'adapte mieux aux problèmes dynamiques d'interaction sol-fondation lorsque le sol est faiblement hétérogène et composé de trois couches au maximum. Cette méthode transforme les équations en relations intégrales entre les vecteurs déplacements et les vecteurs contraintes à la frontière du domaine. Un des points forts des méthodes des éléments de frontières est la possibilité de traiter des domaines ouverts sans avoir à tronquer artificiellement le domaine d'étude. En effet, les conditions à l'infini sont exactement prise en compte de manière automatique dans la formulation des équations intégrales (en élastodynamique, ces condition représente la radiation des ondes des volumes vers l'infinie). Il en découle que les problèmes dynamiques posés en milieu infini ou semi infini sont un champ d'application privilégié des méthodes des éléments de frontière. Les applications concernent surtout la géotechnique (calculs sismique des bâtiments, tunnels fondation.)

2.5 Etat d'art en matière d'analyse dynamique de l'interaction sol-fondation:

2.5.1 Calcul de la fonction d'impédance

Durant la première moitié du siècle dernier, les massifs de fondation supportant les machines vibrantes ont été conçus par des modèles tels que le modèle de Winkler. Une revue de ces modèles peut être trouvée dans Whitman et Richard (1967) et Richard et al. (1970). Dans ce domaine la première étude sur la détermination de la rigidité dynamique

(fonction d'impédance) d'une fondation supporté par un demi-espace linéaire, homogène et élastique est due à Reissner (1936). Il a étudié la réponse d'un disque sur la surface du sol sollicité par une charge harmonique verticale. Une répartition des contraintes uniforme sous le disque a été supposée. Sachant que la distribution des contraintes est loin d'être uniforme, plusieurs chercheurs ont obtenue des solutions au problème en supposant certaines répartitions de contraintes pour des fondations circulaires ou rectangulaire (Arnold et al, 1965 ; Bycrof, 1965). Le problème mixte aux valeurs limites d'une fondation vibrante ou les déplacements sont imposés à l'interface sol-fondation et les contraintes sont nulles sur la surface libre a été étudié durant les années 60 et le début des années 70 (Lysmer et Richard, 1971). Des conditions aux limites sont supposées dans ces études. Plusieurs travaux sont également réalisés en utilisant des modèles viscoélastiques (Veletsos et Verbic, 1973). Wong et Luco (1978) ont calculé les souplesses dynamiques d'une fondation superficielle rigide sans masse de forme géométrique arbitraire sur un demi-espace élastique en subdivisant l'interface sol-fondation en éléments rectangulaires. Les contraintes sont considérées uniformes dans chaque élément et la relation entre contraintes au sein d'un élément et les déplacements sur la surface de sol sont obtenus par intégration de solution de Lamb (1904).

En réalité, les fondations sont généralement semi-enterrées dans le sol. L'obtention des fonctions de rigidité dynamique de celle-ci nécessite le recours aux méthodes numériques plus puissantes telles que la *MEF* ou la *BEM*.

Le développement des frontières absorbantes pour le cas *2D* par Waas (1972) et le cas axisymétrique par Kausel (1974) rend l'utilisation de la *FEM* possible pour l'analyse des fondations reposant ou enterrées dans des profils de sol stratifiés. Cependant, ce modèles repose sur des hypothèses peu réaliste telle que l'existence d'un substratum rigide au pied de profile du sol ou l'extension de la stratification horizontale vers l'infini. En plus, l'analyse de l'interaction dynamique des fondations en *3D* présente une difficulté majeure pour le modèle en éléments finis en raison de la taille importante du maillage nécessaire à la modélisation du problème.

La *BEM* constitue un outil de calcul précis et efficace qui s'adapte particulièrement bien à l'étude dynamique des fondation superficielles et enterrées dans un milieu semi-infini. En effet. Les conditions de radiation des ondes à l'infini sont incluses dans la formulation de manière inhérente et n'exigent donc pas l'introduction d'équation supplémentaire à cet effet. La formulation direct dans le domaine des fréquences de la *BEM* a été appliquée

pour la première fois aux calculs des fonctions d'impédance des fondations rectangulaires reposant ou enterrées dans un demi espace viscoélastique par Dominguez (1978a). Abascal et Dominguez (1984) ont utilisé la BEM pour étudier l'effet du sol sous-jacent et celui d'un substratum non rigide sur les fonctions d'impédance de fondation filante. Une étude paramétrique relative à l'influence des propriétés mécaniques des sols tels que le coefficient de poisson, l'amortissement, à l'influence de l'enterrement et du type de contact sol-fondation a été faite par Hadid (1995) pour le cas des fondations filantes rigides, superficielles ou enterrées dans un sol viscoélastique, les résultats fournis sont obtenus via la BEM associée à une procédure analytique contournant les intégrations numériques de fonctions de Green singulières (Hadid et Berrah, 1995). Une autre étude paramétrique relative à l'influence de la discrétisation, du rapport d'impédance entre la couche supérieure de sol et le substratum élastique, de l'épaisseur de la couche supérieure, du degré de l'enterrement et du type de contact sol-fondation a été aussi faite par Ahmed et Rupani (1999). Apsel (1979) a utilisé une formulation indirecte de la BEM en conjonction avec des fonctions de Green semi-analytiques pour l'évaluation des fonctions d'impédance des fondations circulaires enterrées dans un demi espace stratifié. Les fonctions d'impédance des fondations circulaires superficielles ou enterrées dans des sols multicouche ont été calculées en utilisant la formulation directe de la BEM par Gomez-Lera et al (1985), Alarcon et al. (1989) et Emperador et Dominguez (1989). Karabalis et Beskos (1984) et Spyrakos et Beskos (1986a et 1986b) ont mené une étude similaire en 3D et en 2D

2.5.2 Estimation de l'interaction cinématique :

Quand les ondes incidentes heurtent une fondation étendue ayant une rigidité importante par rapport au sol, la fondation ne peut se conformer à la variabilité spatiale du mouvement de sol. Le mouvement en champs libre est donc modifié localement au voisinage de la fondation par l'effet de la diffraction des ondes incidentes par la fondation. Ce phénomène est généralement connu sous le vocable 'Interaction cinématique'. La détermination des solutions exactes (solutions analytiques ne sont disponibles que pour quelques configurations géométriques spécifiques). Ainsi Kobori et al. (1973) ont analysé la vibration d'un disque circulaire reposant sur un demi espace élastique sollicité par une onde incidente oblique de type SH en réduisant le problème à la résolution numérique des équations intégrales de Fredholm. En utilisant une approche similaire tout en séparant l'effet cinématique de l'effet inertiel, Luco (1976) a déterminé la réponse torsionnelle d'un disque et d'une fondation hémisphérique enterrée et excitée par une onde incidente SH.

Wong et Trifnac (1974) ont analysé le cas d'une fondation filante avec un enterrement semi-elliptique, sollicité par une onde SH. Pour les autres formes géométriques, l'utilisation des méthodes numériques telle que la méthode de élément finis (finite Element Methode, FEM) et la méthode des éléments de frontière (Boundary Element Method, BEM) est nécessaire. Parce que ces problèmes d'interaction sont en général, traités dans des milieux infinis.

Pour résoudre les problèmes de diffractions d'ondes sismique La BEM a été appliquée pour la première fois par Domingez (1978). L'application a été fait dans le domaine fréquentiel. Karabalis et Beskos et spyrakos et Beskos ont étudié le problème dans le domaine temporel pour les fondations bi et tridimensionnelles, d'autre contributions à l'étude de la réponse stochastique des fondation filante ont été faite par Hadid (1995) qui a utiliser la BEM pour étudier la réponse sismique déterministe et stochastique de fondation filante sollicitées par l'incidence d'onde de types P,SV et de Rayleigh, et celle de Saha (1997) pour les fondation tridimensionnelles.

2.5.3 Fondation reposant sur un sol poro-élastique :

Bien que la plupart des traitements d'interaction dynamique sol- fondation sont basés sur un modèle monophasique, on peut trouver quelques études où le sol est considéré comme un milieu bi phasique basé sur la théorie de Biot. Ce modèle présente un intérêt additionnel par rapport à la modélisation classique du sol en milieu continu à une phase.

La théorie de la propagation des ondes élastique dans les milieux poro-élastique saturée est formulée par Biot (1956). Elle tient en compte plusieurs paramètres tels que la compressibilité des deux phases solide et fluide, la dissipation due à la viscosité du fluide ainsi que le couplage entre les contraintes du solide et du fluide. La théorie de Biot a été utilisée dans plusieurs recherches pour étudier les problèmes de l'interaction dynamique sol-fondation. Halpern (1982) et Halpern-Christiano (1986) sont les premiers qui ont étudié les coefficients de souplesse (inverse de la rigidité) d'une fondation reposant sur un demi espace poro-élastique saturé, ils ont présenté la souplesse vertical et de balancement d'une fondation tridimensionnelle. Kassir et Xu (1988) ont établi une étude similaire pour une fondation filante reposant sur un demi espace poro-élastique, ils ont obtenue les expressions des fonctions de Green par l'intégration numérique, les coefficients de rigidité sont obtenus par l'intégration de ces fonctions de Green. Bougacha et al. (1993) ont utilisé la méthode des élément fini pour calculer la rigidité dynamique pour le mouvement horizontal, verticale et de balancement et de torsion d'une fondation surfacique filante et

circulaire sur une couche de sol poro-élastique reposant sur un substratum, ils ont proposé une méthode pour estimer les propriétés équivalentes pour un sol élastique, ils ont déduit ainsi que la perméabilité produit un amortissement considérable pour les basses fréquences dans le cas d'une excitation verticale. Tabatabaie Yazdi, Valliappan et Zhao (1994) ont proposé une solution analytique et une solution numérique aux éléments finis, des équations de Biot pour le cas bidimensionnel. Les solutions ont été appliquées à un sol monocouche reposant sur un substratum rocheux et supportant une fondation excitée par une charge verticale harmonique. La résolution par éléments finis donne des valeurs très proches de la solution exacte.

En utilisant la transformée de Fourier, Valliappan, Tabatabaie Yazdi et Zhao (1995) ont établi une solution analytique sur la base des équations de Biot, pour le cas de propagation bidimensionnel d'ondes dans un semi-espace saturé, soumis à une excitation verticale harmonique en surface, ils ont étudié le rôle de la compressibilité, de degré de saturation et de la perméabilité du sol, et ont trouvé que l'effet de la pression interstitielle est dominant uniquement dans le cas des sols très saturés avec des grains solides incompressibles et avec une faible perméabilité. Pour le cas des sols partiellement saturés, compressibles ou très perméables, les contraintes sont principalement transmises à la partie solide et de ce fait la pression interstitielle du fluide est peut être considérée négligeable. Rajapakse et Senjuntichai (1995) présentent un modèle de l'interaction sol structure d'une fondation filante sur un sol multicouche, ils ont calculé l'impédance de la fondation soumise à une charge verticale et horizontale. Kassir et al (1996) ont présenté l'impédance d'une fondation circulaire surfacique sur un demi espace poro-élastique pour un mouvement horizontal et de balancement, la présence du fluide a un effet significatif sur la rigidité verticale, alors qu'elle est négligeable pour le mouvement horizontal. Japon et al (1997) ont étudié l'effet de la présence d'eau sur la fonction d'impédance d'une fondation filante surfacique reposant sur un demi espace et sur un profil de sol, ils ont étudié l'effet de plusieurs paramètres tels que la perméabilité et l'effet de type de contact entre la fondation et le sol sur la rigidité de la fondation. Zeng et Rajapakse (1999) ont étudié la vibration verticale d'un disque circulaire sur un demi espace, ils ont trouvé une diminution de la rigidité et de l'amortissement de radiation due à l'effet de la poro-élasticité du sol. Bo et Hua (1999) ont traité le cas de la réponse dynamique verticale d'un disque reposant sur un semi-espace élastique saturé et partiellement drainé. La résolution des équations est établie analytiquement par une nouvelle procédure dans laquelle les équations intégrales gouvernant le problème sont réduites à un système d'équations intégrales Fredholm du

second ordre, en appliquant la transformée d'Abel. En suivant la même méthodologie que pour le calcul de la réponse verticale d'un disque reposant sur un semi-espace saturé, Bo et Hua (2000) ont évalué l'effet de la perméabilité et ont trouvé que la différence entre le semi-espace saturé et le semi-espace solide est inférieure à 18%. Yang et Sato (2000) ont étudié l'effet du degré de saturation sur les déplacements verticaux et horizontaux d'une interface séparant un substratum rocheux d'un sol poro-élastique partiellement saturé soumis à une onde incidente SV . Pour cela, ils ont développé une formulation basée sur les équations de Biot et le concept de fluide interstitiel homogène. Pour l'exemple étudié (un sable), les déplacements de l'interface sont exprimés en fonction du degré de saturation, de l'angle d'incidence et de la fréquence d'excitation. Les résultats obtenus indiquent que même proche de 100%, le degré de saturation a une influence considérable sur les déplacements ainsi que sur le rapport de leurs amplitudes. Cette influence est fonction de la fréquence et de l'angle d'incidence. Les auteurs concluent sur l'importance de la prise en compte du degré de saturation dans les études de propagations d'ondes notamment celles basées sur les observations de champs sismiques. De la même façon que dans l'étude précédente, Yang (2000) a évalué l'influence du degré de saturation sur les déplacements verticaux et horizontaux d'une interface séparant un substratum rocheux d'un sol poro-élastique partiellement saturé soumis à une onde incidente P , en fonction de l'angle d'incidence et de la fréquence d'excitation. De même que pour les ondes SV , le degré de saturation exerce une certaine influence sur les déplacements. De manière générale, une saturation partielle proche des 100% engendre un rapport d'amplitude entre les déplacements horizontaux et verticaux. Senjuntichai et al. (2005) ont étudié la vibration verticale d'une fondation rigide axisymétrique enterrée dans un demi espace du sol poro-élastique homogène, utilisant la méthode des équations intégral indirecte, ils ont mené une comparaison avec une fondation rigide sur un demi espace élastique. Plusieurs résultats sont présentés dans cette étude comme l'effet de l'enterrement, l'effet de la perméabilité et l'effet de la forme de la fondation. Pour résoudre les problème de diffractions d'ondes sismique dans les milieux poro-élastique saturé, Maria , Todorovska et Youcef Al Rajoub (2006) ont étudié le cas d'une fondation circulaire enterré soumis à des ondes incidentes planes P_1 et SV .

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, à travers la définition littéraire et phénoménologique de l'interaction sol-structure, nous avons pu montrer l'intérêt et la nécessité de la prise en compte de l'interaction sol-structure dans la conception parasismique des ouvrages. Nous avons également exposé les aspects théoriques et techniques des méthodes d'analyse telle que l'approche directe, la méthode globale et la méthode des sous-structures.

La méthode des sous-structures est une méthode par étape, i.e, analyse le problème d'interaction sol-structures en plusieurs étapes successives ; chacune de ces étapes est plus facile à résoudre du point de vue de la modélisation ou du traitement que la méthode globale. En outre la méthode des sous-structures présente l'avantage de permettre certaines modifications sans qu'il soit nécessaire de reprendre toute l'analyse. Elle peut également présenter des avantages pour identifier la part relative de chacune composante (interaction cinématique ou inertielle) contribuant au phénomène globale d'interaction.

L'importance des fonctions d'impédance nous a conduit à lui consacrer un traitement particulier dans lequel a été présenté la définition de la rigidité dynamique de différents points de vue, ainsi que quelques méthodes qui nous permettent de les calculer telle que la méthode des éléments de frontière qui présente un avantage par rapport à la méthode des éléments finis, elle s'adapte mieux aux problèmes dynamiques d'interaction sol-structure.

GENERALITES SUR LES MILIEUX POREUX

3.1 Introduction :

Pour des milieux infiltrés de fluide, tels que les sols saturés d'eau ou des roches imbibées d'huile, la théorie de la mécanique des milieux continus n'est qu'une approximation parfois brute pour examiner le comportement dynamique de ces milieux. En fait, le mouvement libre du fluide interstitiel peut modifier considérablement la réponse mécanique du milieu considéré. Dans ces cas, l'usage de la théorie des milieux poreux (la poromécanique), qui est capable de modéliser la présence du fluide interstitiel et son interaction avec le squelette solide, est indispensable. Cette théorie a actuellement son champ d'application dans plusieurs domaines tels que le génie civil, la géologie, la sismologie, la biomécanique, etc. Plusieurs problèmes d'ingénieur, en particulier des problèmes d'évolution, doivent recourir à cette théorie, parmi lesquels on peut citer : le dimensionnement des centrales nucléaires, des barrages sous chargements sismiques, la stabilité des plate-formes off-shore, le potentiel de liquéfaction des sols, la propagation d'ondes dans de différentes formations géologiques.

3.2 Historique

La première contribution à la théorie de la poromécanique a été présentée par Biot (1941) pour des problèmes quasi-statiques des matériaux isotropes élastiques linéaires infiltrés de fluide visqueux. Elle a été généralement considérée comme le point de départ de la théorie de la poro-élasticité. Dans les années suivantes, Biot a élargi sa théorie aux cas de l'élasticité anisotrope (1955) et aussi de la viscoélasticité (1956). Son extension aux problèmes dynamiques a été publiée dans deux articles, l'un pour la gamme de basse

fréquence (1956) et l'autre pour la gamme de haute fréquence (1956). Ainsi, par une série d'articles, Biot a construit une théorie assez complète susceptible de modéliser plusieurs aspects du comportement mécanique des milieux poreux saturés de fluide (statique ou dynamique, isotrope ou anisotrope, visqueux ou non). Cette théorie, en utilisant une description phénoménologique macroscopique basée sur l'hypothèse de l'existence d'un potentiel de déformation élastique et d'une fonction de dissipation visqueuse, établit un système d'équations aux dérivées partielles couplées régissant les mouvements du squelette et du fluide interstitiel. La signification physique des nouvelles constantes matérielles présentes dans sa théorie a été bien expliquée par Biot et Willis (1957). Ces constantes ont été mesurées en laboratoire pour la première fois par Yew et al. (1979). Parmi les résultats importants de la théorie de Biot était l'identification de trois ondes de volume, deux ondes de compression et une onde de cisaillement. L'existence de la seconde onde de compression, connue sous le nom d'onde lente, a été expérimentalement confirmée Plona, (1980).

Dans les travaux initiaux de Biot, le squelette est supposé élastique linéaire et subit de petites déformations (hypothèse de petites perturbations). L'extension de sa théorie pour prendre en compte des transformations finies et le comportement inélastique non-linéaire du squelette a été menée par Zienkiewicz et Bettles (1982), Zienkiewicz et al. (1990), Prévost (1980) et d'autres. Cette extension a acquis une importance considérable ces dernières années, due au souci accru avec le phénomène de liquéfaction des dépôts de sable saturé sous chargement sismique.

3.3 Equations du modèle poro-élastique de biot

L'analyse d'un problème de dynamique des sols saturés implique l'établissement d'un ensemble d'équations décrivant les différents aspects intervenant dans le comportement de ces derniers. Nous présentons ici l'ensemble des équations du modèle de Biot telles que nous les utilisons par la suite. Notre but ici n'est pas de les redémontrer mais de les formuler. En effet, le lecteur intéressé par leur démonstration pourra se référer par exemple aux articles de Biot (1941) (1956) ou bien aux ouvrages de Bourbié (1986) et al. , et Coussy (1991).

3.3.1 Lois de comportement

La loi de comportement est prise telle que elle est décrite ci-dessous :

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda_s + \frac{Q^2}{R} \right) \delta_{ij} e + 2\mu e_{ij} + Q\delta_{ij} \varepsilon \quad (3.1)$$

$$\tau = Qe + R\varepsilon \quad (3.2)$$

$$\sigma_{ij}^{tot} = \sigma_{ij} + \delta_{ij} \tau \quad (3.3)$$

Où δ_{ij} est le symbole de Kronecker

σ_{ij} représente les contraintes du solide, σ_{ij}^{tot} sont les contraintes totales et τ est la contrainte isotrope du fluide.

Cette dernière est reliée à la pression p de la manière suivante :

$$\tau = -np \quad (3.4)$$

Avec n est la porosité représentant le rapport du volume des vides sur le volume total comme indique l'eq 3.5

La porosité n est définie comme suite :

$$n = \frac{V_v}{V_v + V_s} \quad (3.5)$$

e_{ij} représente les déformations du solide :

$$e_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.6)$$

Avec $\zeta = U_{i,i}$ et $\hat{e} = u_{i,i}$ sont les dilatations du fluide et du solide respectivement.

λ, μ, Q et R sont des constants élastiques.

u le déplacement du solide et U le déplacement du fluide.

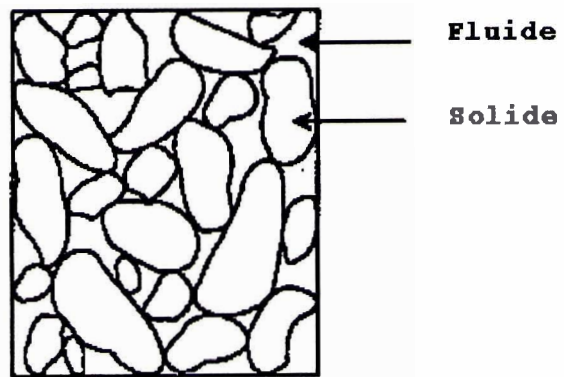
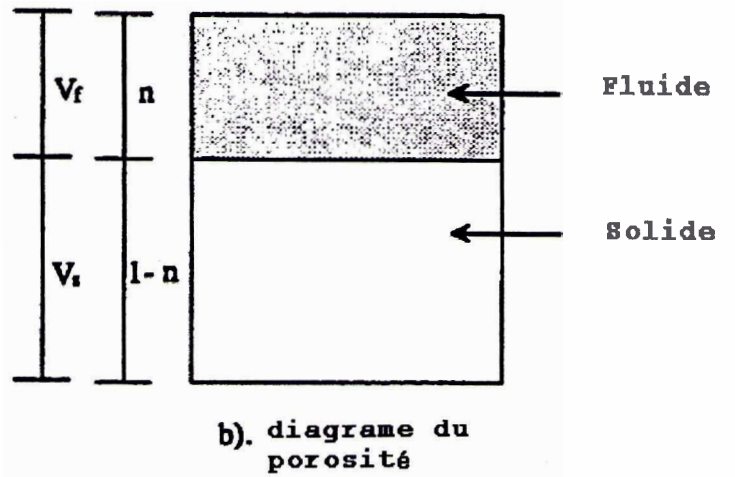


Figure 3.1 définition de la porosité

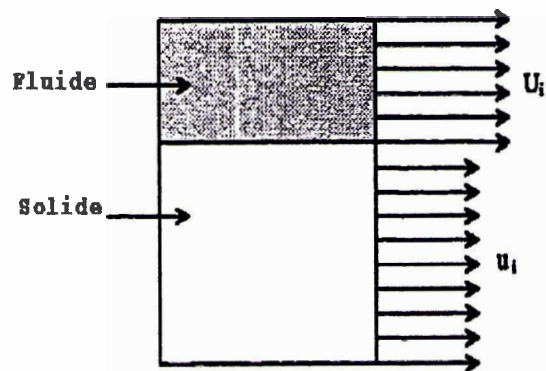


Figure 3.2 les déplacements des différentes phases

3.3.2 Equations du mouvement

Les équations d'équilibre sont écrites sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij} + X_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} u_i + \rho_{12} U_i) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_i - U_i) \quad (3.6a)$$

$$\tau_{,i} + X'_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12} u_i + \rho_{22} U_i) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_i - U_i) \quad (3.6b)$$

En incorporant les relations (3.1) et (3.2) dans les équations d'équilibre (3.6), on obtient :

$$\mu \Delta u_i + \left(\lambda_s + \mu + \frac{Q^2}{R} \right) e_{,i} + Q \varepsilon_{,i} + X_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} u_i + \rho_{12} U_i) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_i - U_i) \quad (3.7a)$$

$$(Qe + R\varepsilon)_{,i} + X'_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12} u_i + \rho_{22} U_i) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_i - U_i) \quad (3.7b)$$

Où Δ est le laplacien

$$b = n^2 \frac{\mu}{k} \quad (3.8)$$

b est une constante de dissipation.

(n est la porosité, k est la perméabilité, μ la viscosité absolue)

et X' et X sont des forces de volumes

ρ_{11} , ρ_{12} , ρ_{22} : sont les coefficient de masses dynamique.

3.3.3 Présentation des constantes matérielles

a) Les modules d'élasticité :

Biot et Willis (1957) ont proposé des méthodes pour calculer les modules d'élasticité pour un milieu poreux à partir des mesures. Pour un système isotrope, les quatre modules d'élasticité peuvent être déterminer à partir du module de cisaillement, la compressibilité du squelette solide, la compressibilité du système solide- fluide, et la compressibilité des fluides comme suite :

$$\mu = \mu_s \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_s + \frac{Q^2}{R} \\ &= \frac{\frac{\gamma}{k_s} + n^2 + (1-2n)(1 - \frac{\delta}{k_s})}{\gamma + \delta - \frac{\delta^2}{k_s}} - \frac{2}{3} \mu \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$Q = \frac{n^2(1 - n - \frac{\delta}{k_s})}{\gamma + \delta - \frac{\delta^2}{k_s}} \quad (3.11)$$

$$R = \frac{n^2}{\gamma + \delta - \frac{\delta^2}{k_s}} \quad (3.12)$$

Avec:

n : est la porosité.

λ_s : est la constante de lamé du squelette solide.

$$\lambda_s = \frac{2\nu_s}{1 - 2\nu_s} \mu_s \quad (3.13)$$

μ_s : est le module de cisaillement du squelette solide.

ν_s : est le coefficient de poisson du squelette solide.

$k_s = 1/K_s$: est la compressibilité du squelette solide.

$\delta = -e/p$: est la compressibilité du système solide fluide.

$$\gamma = -\frac{n(\zeta - e)}{p} = n\left(\frac{1}{K_f} + \frac{e}{p}\right) = n(k_f - \delta) \quad (3.14)$$

$$K_s = \frac{2(1 + \nu_s)}{3(1 - 2\nu_s)} \mu_s \quad (3.15)$$

Avec :

$\zeta = U_{i,i}$ et $e = u_{i,i}$ sont les dilatations du fluide et du solide respectivement.

p : est la pression hydraulique exercée sur le système solide fluide.

γ : est la compressibilité des pores de fluide.

K_s : Le module d'incompressibilité des pores du fluide.

K_f et K_s sont les modules d'incompressibilité du fluide interstitiel et du squelette solide.

k_f et k_s sont les coefficients de compressibilité du fluide interstitiel et du squelette solide.

$$K_d = K_s \left[1 + n \left(\frac{K_s}{K_f} - 1 \right) \right] \quad (3.16)$$

K_d : Le module d'incompressibilité des grains solide.

Yang (2000) a évalué l'influence du degré de saturation à partir de la formule suivante :

$$K_f = \frac{1}{\frac{1}{K_w} + \frac{1-S_r}{P_a}} \quad (3.17)$$

Avec :

K_w est le module d'incompressibilité de l'eau.

P_a est la pression atmosphérique.

S_r est le degré de saturation.

Dans l'analyse dynamique des sols , il est souvent supposée que la compressibilité du système solide–fluide peut être négligée ($\delta \rightarrow 0$), par rapport a la compressibilité du squelette solide et du fluide et ce, nous a permet de simplifier les formules précédentes comme suite :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_s + \frac{Q^2}{R} \\ &= \frac{2\nu_s}{1-2\nu_s} \mu_s + \frac{(1-n)^2}{n} K_f \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$Q = \frac{n(1-n)}{\gamma} = (1-n)K_f. \quad (3.19)$$

$$R = \frac{n^2}{\gamma} = nK_f \quad (3.20)$$

b) Les coefficients dynamiques des masses

Dans la théorie de Biot, les coefficients de masses du système solide fluide sont définie comme :

$$\rho_1 = \rho_{11} + \rho_{12} = (1-n)\rho_s \quad (3.21)$$

$$\rho_2 = \rho_{12} + \rho_{22} = n\rho_f \quad (3.22)$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = (1-n)\rho_s + n\rho_f \quad (3.23)$$

ρ = La masse par unité de volume du mélange solide –fluide

ρ_1 = La masse par unité de volume du solide

ρ_2 = La masse par unité de volume du fluide

ρ_s = La densité du solide

ρ_f = La densité du fluide

Pour déterminer les coefficients de la masse dynamique, Berryman (1980) a proposé les relations suivantes :

$$\rho_{11} = (1-n)\rho_s - \rho_{12} \quad (3.24)$$

$$\rho_{22} = n\rho_f - \rho_{12} \quad (3.25)$$

$$\rho_{12} = -n(\tau_\alpha - 1)\rho_f \quad (3.26)$$

Avec $\tau_\alpha = 1 + \tau_r \frac{(1-n)}{n}$

τ_α est la tortuosité dynamique du milieu poreux, elle traduit le caractère tortueux microscopique (Sinuosité géométrique) du chemin où a lieu l'écoulement du fluide. Elle est donc fonction de la porosité et de la forme des canaux.

L'expression $\tau_\alpha = (1 + \frac{1}{n})/2$ été formulée par Berryman (1980) dans le cas où la matrice est constituée de grains solides sphériques ($\tau_r = 0.5$). Notons que τ_α est un nombre sans dimension.

3.3.4 Cas limites des constances matérielles

Il peut être intéressant de préciser les valeurs des paramètres du problème pour les cas limites suivants :

- Cas du milieu purement solide, les paramètres correspondants sont :

$$n = 0$$

$$Q = R = 0$$

$$\rho_{12} = \rho_{22} = 0, \rho_{11} = \rho_s$$

Dans ce cas l'équation (2.6) disparu, et l'équation (2.7) devient une équation de propagation des ondes dans un milieu élastique comme suite :

$$(\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div } u) + \mu \nabla^2 = \rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} u$$

- Cas du milieu purement fluide, les paramètres correspondants sont :

$$n = 1$$

$$u = \lambda = Q = 0$$

$$R = K_f$$

$$\rho_{11} = \rho_{12} = 0, \rho_{22} = \rho_f$$

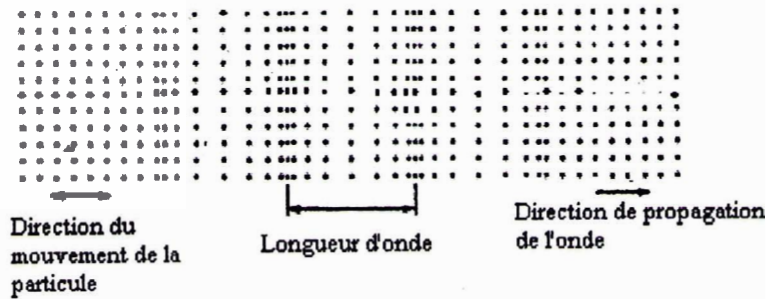
Dans ce cas l'équation (2.6) disparaît, et l'équation (2.7) devient une équation du mouvement dynamique des fluides dans le cas des petites déformations :

$$R \text{ grad}(\text{div } U) = \rho_f \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

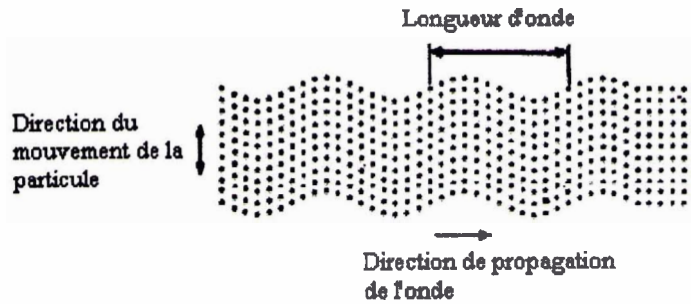
3.4 Propagation des ondes dans les milieux poreux

3.4.1 Introduction

L'étude de la réflexion des ondes planes à la surface d'un demi-espace est d'une importance fondamentale dans plusieurs domaines tels que le génie civil, la géologie, la sismologie, la biomécanique, etc. En 1956, Biot a proposé une théorie de la propagation des ondes dans les milieux poreux saturés. Parmi les résultats importants de la théorie de Biot était l'identification de trois ondes de volume figure (3.3), deux ondes de compression et une onde de cisaillement. L'existence de la seconde onde de compression, connue sous le nom d'onde lente, a été expérimentalement confirmée (Plona, 1980).



a. Onde de compression



b. Onde de cisaillement

Figure 3.3 ondes volumiques

3.4.2 L'Equation de mouvement

L'équation de l'onde dans les milieux poreux saturés s'écrit comme suite :

$$\mu \nabla^2 \hat{u} + \text{grad}[(\lambda + \mu)e + Q\varepsilon] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}\hat{u} + \rho_{12}\hat{U}) + \hat{b} \frac{\partial}{\partial t}(\hat{u} - \hat{U}) \quad (3.27a)$$

$$\text{grad}[(Qe + R\varepsilon)] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}\hat{u} + \rho_{22}\hat{U}) - \hat{b} \frac{\partial}{\partial t}(\hat{u} - \hat{U}) \quad (3.27b)$$

Avec : $\lambda = \lambda_s + \frac{Q^2}{R}$

En utilisant la décomposition de Helmholtz pour le champ de déplacement telle que :

$$\hat{u} = \text{grad}(\phi) + \text{curl}(\hat{\psi}) \quad (3.28a)$$

$$\hat{U} = \text{grad}(\Phi) + \text{curl}(\hat{\Psi}) \quad (3.28b)$$

Avec

\hat{u} : déplacement du solide.

\hat{U} : déplacement du fluide.

ϕ et Φ sont les potentiels de l'onde P.

$\hat{\psi}$ et $\hat{\Psi}$ sont les potentiels de l'onde S.

dans laquelle

ϕ et $\hat{\psi}$ sont les potentiels associés à la phase solide.

Φ et $\hat{\Psi}$ sont les potentiels associés à la phase fluide.

En substituant les équations (3.28) dans l'équation (3.27) les équations de mouvement deviennent :

Pour les potentielles de l'onde P :

$$\begin{cases} P \nabla^2 \phi + Q \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}\phi + \rho_{12}\Phi) + \hat{b} \frac{\partial}{\partial t}(\phi - \Phi) \\ Q \nabla^2 \phi + R \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}\phi + \rho_{22}\Phi) + \hat{b} \frac{\partial}{\partial t}(\phi - \Phi) \end{cases} \quad (3.29)$$

et pour les potentielles de l'onde S :

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 \hat{\psi} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}\hat{\psi} + \rho_{12}\hat{\Psi}) + \hat{b} \frac{\partial}{\partial t}(\hat{\psi} - \hat{\Psi}) \\ 0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}\hat{\psi} + \rho_{22}\hat{\Psi}) + \hat{b} \frac{\partial}{\partial t}(\hat{\psi} - \hat{\Psi}) \end{cases} \quad (3.30)$$

Dans le cadre où le fluide est considéré non visqueux, nous aboutissons aux équations suivantes :

En considérant que les potentiels sont harmoniques :

$$\Phi = \Phi(x, y, z)e^{-i\alpha x} \quad ; \quad \phi = \phi(x, y, z)e^{-i\omega t} \quad (3.31a)$$

$$\psi = \psi(x, y, z)e^{-i\omega t} \quad ; \quad \Psi = \Psi(x, y, z)e^{-i\omega t} \quad (3.31b)$$

Solution pour les l'ondes P :

Substituant les équation (3.31a) dans l'équation (3.29), et après l'élimination de Φ , l'équation de l'onde P pour le squelette solide devient :

$$A\nabla^2\phi + \omega^2 B\nabla^2\phi + \omega^4 C\phi = 0 \quad (3.32)$$

Avec

$$A = PR - Q^2$$

$$B = \rho_{11}R + \rho_{22}P - 2\rho_{12}Q$$

$$C = \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2$$

L'eq (3.14) peut être décomposée ;

$$(\nabla^2 + k_{\alpha,j}^2)\phi_j = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (3.33)$$

Avec

$$k_{\alpha,j} = \frac{\omega}{V_{\alpha,j}} \quad (3.33a)$$

$k_{\alpha,j}$ sont les nombres d'onde associée a l'onde P_1, P_2 .

$$V_{\alpha,j} = \sqrt{\frac{2A}{B \mp (B^2 - 4AC)^{1/2}}} \quad (3.33b)$$

$V_{\alpha,j}$ sont les vitesses d'onde associée a l'onde P_1, P_2 .

A partir de l'équation (3.33) on le voit que les deux ondes P_1, P_2 existent dans le milieu, et la solution générale pour le squelette solide est :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad (3.33)$$

Pour déterminer le potentiel de l'onde pour le fluide, on fait la substitution de eq (3.31a) dans l'équation (3.29) pour obtenir l'expression suivante :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = f_1\phi_1 + f_2\phi_2 \quad (3.34)$$

Avec

$$f_j = \frac{A/V_{\alpha,j}^2 - \rho_{11}R + \rho_{12}Q}{\rho_{12}R - \rho_{22}Q} \quad (j=1,2) \quad (3.35)$$

Solution pour les l'ondes S :

Substituant les équation (3.31b) dans l'équation (3.29), et après l'élimination de Ψ , l'équation de l'onde S pour le squelette solide devient :

$$(\nabla^2 + k_\beta^2)\psi = 0 \quad (3.36)$$

Avec

$$k_\beta = \frac{\omega}{V_\beta} \quad (3.37a)$$

k_β : est les nombre d'onde associée a l'onde S

$$V_\beta = \sqrt{\frac{\mu\rho_{22}}{C}} \quad (3.38b)$$

V_β est la vitesse de l'onde S.

Le potentiel fluide de l'onde S peut être obtenue comme suite :

$$\Psi = f_3\psi \quad (3.39)$$

Avec

$$f_3 = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}} \quad (3.40)$$

3.4.3 Conditions de frontière pour les milieux poreux

Dans les problèmes de la propagation des ondes, l'utilisation des états de frontière appropriés mène à la solution spécifique. Pour établir des conditions de frontière pour des milieux poreux, en plus du comportement élastique du squelette solide, l'interaction liquide solide du sol doit être considérée, Deresiewicz et shalak (1963), Cruz et Spanos (1989) ont proposé des conditions de frontière pour deux milieux poreux différents en contact :

1. Les effets d'une frontière plane libre sur la propagation des ondes dans un demi-espace poro-élastique ont été étudiés par Deresewicz (1960), où les conditions pour la frontière libre incluent: (1) contrainte nulle du squelette de solide dans les directions normales et tangentielles du plan ; et (2) pression nulle de fluide de pore sur le plan. Dans ce cas, les pores sont ouverts et permet le drainage du fluide.

2. Il est également important d'étudier le cas de la frontière scellée (imperméable non drainé) dans lequel le fluide dans les pores est emprisonné à l'intérieur du sol. (Tableau 3.1).

Selon le travail du deresiewicz et du shalak (1963), la frontière pour une surface libre peut être illustrée par les diagrammes simplifiés (figure 3.3)

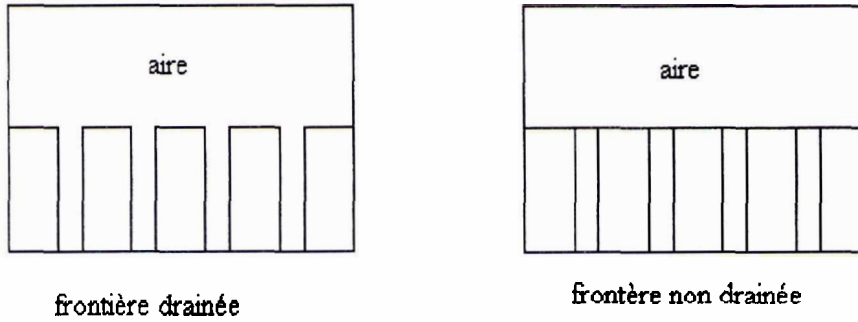


Figure 3.3 Schémas simplifiés illustrant les frontières du milieu poreux

Table 3.1 Condition de frontière: frontière drainée et frontière non drainée

Frontière drainée	Frontière non drainée
$\tau_{nn} = 0$	$\tau_{nn} + \sigma = 0$
$\tau_{nt} = 0$	$\tau_{nt} = 0$
$\sigma = 0$	$u_n - U_n = 0$

Note : n vecteur normale, t vecteur tangentielle, sur la surface de frontière

3.5 Méthodes d'analyse dynamique des milieux poreux

Différentes méthodes analytiques et numériques ont été utilisées mais toutes sont basées sur les équations de Biot.

Plusieurs formulations analytiques ont été utilisées afin de déterminer la solution « exacte » du problème de propagation d'ondes dans un milieu poro-élastique. Parmi elles, il y a la résolution de Tabatabaie et al. basée sur la théorie de consolidation dynamique bidimensionnelle de Biot. Leur solution permet de déterminer les déplacements et les contraintes du sol en surface et en n'importe quel point du massif et d'étudier l'effet de certains paramètres tels que la compressibilité et la perméabilité sur la réponse dynamique du solide et du fluide qui composent le sol.

Parce que les méthodes analytiques peuvent être utilisées uniquement pour des configurations physiques très simples, très loin de la réalité, la méthode des éléments finis a été la première méthode numérique développée pour la résolution des problèmes de propagation d'ondes dans un milieu poro-élastique en tenant en compte des conditions géologiques locales de sol (milieu multicouche, non homogène, etc.).

A partir des équations de Biot, les équations en intégrales de frontières sont établies en terme de déplacements pour le solide et de pressions pour le fluide. Cette formulation a été présentée pour la première fois par Dominguez (1991,1992).

Une résolution par la méthode des couches minces a été proposée par Nogami et Kazama en 1992 sur la base des équations de Biot.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'approche macroscopique basée sur le modèle dynamique de Biot.

Tout d'abord, nous avons défini la notion des milieux poreux en introduisant le modèle macroscopique étudié, nous présentons alors l'approche continue bi phasique correspondant à la théorie générale de Biot. Nous avons présentées l'ensemble des équations du modèle de Biot telles que nous les utilisons par la suite. Ainsi nous avons rappelées ensuite quelques généralités sur les différentes ondes mécaniques se propageant dans un massif semi-infini et les différentes méthodes analytiques et numériques qui ont été utilisées.

LA METHODE DES ELEMENTS DE FRONTIERES EN PORO-ELASTODYNAMIQUE

4.1 Introduction et bibliographie

En raison de la complexité du système couplé d'équations régissant le comportement d'un milieu poreux saturé, la résolution d'un problème poro-élastodynamique par une méthode numérique est quasiment incontournable. La méthode numérique la plus utilisée est, bien entendu, la méthode des éléments finis. Cependant, cette méthode rencontre des difficultés pour modéliser la propagation d'ondes dans un milieu infini ou semi-infini. Dans ces cas, la méthode des éléments de frontière est souvent employée, car la radiation des ondes de volume est automatiquement prise en compte dans sa formulation.

L'application de la méthode des éléments de frontière aux problèmes poro-élastiques a été initialement limitée aux problèmes quasi-statiques (surtout des problèmes de consolidation des sols saturés). Parmi les formulations d'équations intégrales établies dans le domaine de Laplace, on peut citer les travaux de Cleary (1977), Cheng et Liggett (1984) pour les cas 2D, Badmus et al. (1993) pour les cas 3D. Dargush et Banerjee (1989), Cheng et Detournay (1998) ont publié plus tard des formulations dans le domaine temporel.

Pour des problèmes dynamiques, les premières formulations ont été établies dans les domaines transformés (Fourier ou Laplace) car une expression explicite de la solution fondamentale en domaine temporel est mathématiquement difficile à trouver. La première formulation, exprimée en termes de déplacements du squelette et du fluide (u_i, w_j) , dans le domaine de Laplace, a été présentée par Manolis et Beskos (1989). Cependant, les déplacements fluides w ne peuvent pas être directement mesurables; par conséquent,

l'utilisation de ces variables n'est pas pratique, du point de vue de l'ingénieur. En réalité, la pression interstitiel p est couramment employée au lieu de w , notamment en géotechnique. De plus, Bonnet (1987) a montré que, dans les domaines transformés, seulement 4 variables, 3 composantes de déplacement du squelette u et la pression du fluide p , sont indépendantes. Basées sur ces 4 variables (3 variables en 2D), plusieurs formulations ont été publiées par Cheng et al. (1991), Dominguez (1992) pour le domaine fréquentiel et par Chen et Dargush (1995) pour le domaine de Laplace.

4.2 Principe de la méthode des éléments de frontières

Un problème aux limites, d'inconnue u , posé sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$) et associé à un opérateur aux dérivées partielles du second ordre \mathfrak{S} présente typiquement la structure suivante :

$$\mathfrak{S}u + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.1a)$$

$$u = g_1 \quad \text{sur } \partial\Omega_u \quad (4.1b)$$

$$T^n(u) = g_2 \quad \text{sur } \partial\Omega_t \quad (4.1c)$$

Où g_1, g_2 et la source f sont donnés ;

$u \rightarrow T^n(u)$ est un opérateur différentielle sur u .

On montre qu'il est possible d'associer à chaque opérateur \mathfrak{S} une formule de réciprocité :

$$\int_{\Omega} (\mathfrak{S}u \cdot v - \mathfrak{S}v \cdot u) dV = \int_{\partial\Omega} (T^n(u) \cdot v - T^n(v) \cdot u) ds \quad (4.2)$$

La substitution de v par une fonction de Green $G(x, y)$ qui vérifie l'équation locale (4.1a) pour une source ponctuelle $f(y) = \delta(y-x)$ appliquée en un point fixé $x \notin \partial\Omega$ conduit ainsi à la relation suivante :

$$cu(x) = \int_{\Omega} f(y)G(x, y)dV_y + \int_{\partial\Omega} [u(y)T^n(G(x, y)) - T^n(u(y))G(x, y)] ds_y \quad (4.3)$$

Cette formule de représentation intégrale, qui donne explicitement la valeur de u en tout point χ à l'intérieur de Ω , n'est valable que pour $\chi \notin \partial\Omega$. Il reste donc de formuler une équation intégrale de frontière qui ne porterait que sur les valeurs à la frontière de u et de $T^n(u)$. L'obtention de cette équation repose sur un passage à la limite, car les fonctions G

et $T^n(G)$ présente en $\chi \notin \partial\Omega$ une singularité non intégrable. Une fois celui-ci accompli, la méthode des équations intégrales procède en deux temps :

- La résolution de l'équation intégrale de frontière, permettant de connaître les valeurs de $(u, T^n(u))$ en tout point de $\partial\Omega$. Cette résolution s'effectue normalement de manière numérique par l'intermédiaire de la méthode des éléments de frontière. Celle-ci repose sur l'adaptation de notions initialement créées et développées dans le contexte de la méthode des éléments finis.
- Application de la formule de représentation intégrale, permettant le calcul explicite de la valeur de u en tout point intérieur à Ω . Le calcul de u dans la domaine Ω est ramené à celui des valeurs inconnues de $(u, T^n(u))$ sur la frontière $\partial\Omega$. Il est ainsi possible de restreindre le support géométrique de la phase de résolution, et donc la discrétisation, à la frontière $\partial\Omega$. On a 'gagné' une dimension d'espace ($3D \rightarrow 2D, 2D \rightarrow 1D$). Cela constitue un avantage très important de cette méthode.

4.3 Les équations d'équilibre

Les équations d'équilibre caractérisent l'état poro-élastodynamique sont écrites sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11}u_i + \rho_{12}U_i) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_i - U_i) \quad (4.4)$$

$$\tau_{,i} + X'_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12}u_i + \rho_{22}U_i) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_i - U_i) \quad (4.5)$$

Où σ_{ij} représente les contraintes du solide, et τ celle du fluide. Cette dernière est reliée à la pression p de la manière suivante :

$$\tau = -np \quad (4.6)$$

b est une constante de dissipation, et X_i et X'_i sont des forces de volumes.

La loi de comportement est prise telle que décrite ci-dessous :

et $T^n(G)$ présente en $\chi \in \partial\Omega$ une singularité non intégrable. Une fois celui –ci accomplie, la méthode des équations intégrales procède en deux temps :

La résolution de l'équation intégrale de frontière, permettant de connaître les valeurs de $(u, T^n(u))$ en tout point de $\partial\Omega$. Cette résolution s'effectue normalement de manière numérique par l'intermédiaire de la méthode des éléments de frontière. Celle-ci repose sur l'adaptation de notions initialement créées et développées dans le contexte de la méthode des éléments finis.

Application de la formule de représentation intégrale, permettant le calcul explicite de la valeur de u en tout point intérieur à Ω . Le calcul de u dans la domaine Ω est ramené à celui des valeurs inconnues de $(u, T^n(u))$ sur la frontière $\partial\Omega$. Il est ainsi possible de restreindre le support géométrique de la phase de résolution, et donc la discrétisation, à la frontière $\partial\Omega$. On a 'gagné' une dimension d'espace ($3D \rightarrow 2D, 2D \rightarrow 1D$). Cela constitue un avantage très important de cette méthode.

4.3 Les équations d'équilibre

Les équations d'équilibre caractérisent l'état poro-élastodynamique sont écrites sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11}u_i + \rho_{12}U_i) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_i - U_i) \quad (4.4)$$

$$\tau_{,i} + X'_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12}u_i + \rho_{22}U_i) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_i - U_i) \quad (4.5)$$

Où σ_{ij} représente les contraintes du solide, et τ celle du fluide. Cette dernière est reliée à la pression p de la manière suivante :

$$\tau = -np \quad (4.6)$$

b est une constante de dissipation, et X_i et X'_i sont des forces de volumes.

La loi de comportement est prise telle que décrite ci-dessous :

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda_s + \frac{Q^2}{R} \right) \delta_{ij} e + 2\mu e_{ij} + Q \delta_{ij} \varepsilon \quad (4.7)$$

$$\tau = Qe + R\varepsilon \quad (4.8)$$

δ_{ij} est le symbole de Kronecker, $e_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i})$ représente les déformations du solide, $\varepsilon = U_{i,i}$ et $e = u_{i,i}$ sont les dilatations du fluide et du solide respectivement et λ_s, μ, Q et R sont des constantes élastiques.

En incorporant les relations (4.7) et (4.8) dans les équations d'équilibre (4.4) et (4.5), on obtient :

$$\mu \Delta u_i + \left(\lambda_s + \mu + \frac{Q^2}{R} \right) e_{,i} + Q \varepsilon_{,i} + X_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} u_i + \rho_{12} U_i) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_i - U_i) \quad (4.9)$$

$$(Qe + R\varepsilon)_{,i} + X'_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12} u_i + \rho_{22} U_i) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_i - U_i) \quad (4.10)$$

Où Δ est le laplacien.

En supposant que l'excitation et la réponse sont harmoniques en fonction du temps, les équations (4.9) et (4.10) s'écrivent comme suit :

$$\mu \Delta u_i + \left(\lambda_s + \mu + \frac{Q^2}{R} \right) e_{,i} + Q \varepsilon_{,i} + X_i = -\omega^2 (\rho_{11} u_i + \rho_{12} U_i) + i \omega b (u_i - U_i) \quad (4.11)$$

$$(Qe + R\varepsilon)_{,i} + X'_i = -\omega^2 (\rho_{12} u_i + \rho_{22} U_i) - i \omega b (u_i - U_i) \quad (4.12)$$

En utilisant les équations (4.8) et (4.12), les déplacements du fluide sont écrits de la manière suivante :

$$U_i = \frac{\sigma_{,i} + X'_i + (i\omega b + \omega^2 \rho_{12}) u_i}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}} \quad (4.13)$$

En incorporant les équations (4.8) et (4.13) dans la relation (4.11), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) e_{,i} + \tau_{,i} \left(\frac{Q}{R} + \frac{i \omega b + \rho \omega^2}{i \omega b - \omega^2 \rho_f} \right) + u_i \omega^2 \left(\frac{\omega^2 (-\rho_s \rho_f + \rho^2) + i \omega b (\rho_s + \rho_f + 2\rho)}{i \omega b - \omega^2 \rho_f} \right) \\
& + X_i + \frac{i \omega b + \rho \omega^2}{i \omega b - \omega^2 \rho_f} X'_i = 0 \tag{4.14} \\
& \Delta \tau + \frac{\tau}{R} (i \omega b + \omega^2 \rho_{22}) + e \left[i \omega b \left(1 + \frac{Q}{R} \right) + \omega^2 (\rho_{12} - \rho_{22} \frac{Q}{R}) \right] + X'_{i,i}
\end{aligned}$$

Cette dernière équation ne dépend que des deux composantes du déplacement du solide (trois composantes en 3D) et de la contrainte sur le fluide.

4.4 Théorème de réciprocité

La formulation par intégrales de frontières s'obtient à partir de la relation de réciprocité établie en fonction des déplacements du solide, des contraintes de tractions aux frontières du solide, des contraintes agissant sur le fluide, des déplacements du fluide par rapport à la normale de la frontière et des forces de volume.

La relation de réciprocité peut être obtenue à partir des équations de mouvement suivantes :

$$\sigma_{ij} + X_i = -\omega^2 (\rho_{11} u_i + \rho_{12} U_i) + i \omega b (u_i - U_i) \tag{4.15}$$

$$\tau_{,i} + X'_i = -\omega^2 (\rho_{12} u_i + \rho_{22} U_i) - i \omega b (u_i - U_i) \tag{4.16}$$

En pondérant la première équation avec une fonction de déplacement type u_i^* et la seconde avec U_i^* , en les additionnant, en intégrant sur le volume Ω et en utilisant l'intégration par partie deux fois, la relation de réciprocité suivante est obtenue :

$$\int_{\Gamma} (t_i u_i^* + \tau U_n^*) d\Gamma + \int_{\Omega} (X_i u_i^* + X'_i U_i^*) d\Omega = \int_{\Gamma} (t_i^* u_i + \tau^* U_n) d\Gamma + \int_{\Omega} (X_i^* u_i + X_i'^* U_i) d\Omega \tag{4.17}$$

Dans laquelle, Γ est la frontière du corps de volume Ω , $t_i = \tau_{ij} n_j$ et $U_n = U_i n_i$, n étant la normale à la frontière.

4.5 Formulation intégrale

L'idée de base consiste à remplacer les solutions de l'équation de (4.17) par des solutions particulières dites *solutions fondamentales*, connues aussi sous le nom *fonctions de Green*.

▪ La représentation intégrale des déplacements du solide est obtenue en introduisant les solutions fondamentales dérivée des forces de volume suivantes :

$$\begin{aligned} X_i^* &= \delta(x - \xi) \delta_{ij} \\ X_i'^* &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Où $\delta(x - \xi)$ est la fonction de Dirac, ξ est le point d'application de la fonction et δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

La relation de réciprocité donne :

$$c_{ij} u_i + \int_{\Gamma} t_{ij}^* u_i \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau_j^* U_n \, d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* t_i \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau U_{nj}^* \, d\Gamma + \int_{\Omega} (X_i u_{ij}^* + X_i' U_{ij}^*) \, d\Omega \quad (4.19)$$

Dans les relations (4.33) et (4.34), j varie de 1 à 3 et indique à chaque fois une paire de solution fondamentale. Le coefficient c_{ij} prend la valeur de δ_{ij} au points situés à l'intérieur de Ω et s'annule à l'extérieur de Ω . Il est égal à $0.5 \delta_{ij}$ aux points situés sur la frontière Γ quand celle-ci est lisse.

Où

$$c_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \xi \in \Omega \\ \frac{1}{2} \delta_{ij} & \xi \in \Gamma \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.20)$$

▪ Pour obtenir la représentation intégrale des contraintes agissant sur le fluide, les auteurs ont utilisé les solutions fondamentales correspondant aux forces de volume suivantes :

$$\begin{aligned} X_i'^* &= \left[\frac{1}{2\pi} \ln r \right]_{,i} && \text{pour le cas bidimensionnel} \\ X_i'^* &= \left[\frac{-1}{4\pi r} \right]_{,i} && \text{pour le cas tridimensionnel} \\ X_i^* &= \frac{i\omega b + \omega^2 \rho}{-i\omega b + \omega^2 \rho_f} X_i'^* \end{aligned} \quad (4.21)$$

Avec r la distance au point ξ où la contrainte du fluide va être représentée.

En utilisant ces forces de volume et l'équation (6.10), la dernière intégrale de la relation (6.14) s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (X_i^* u_i + X_i'^* U_i) d\Omega &= - \int_{\Omega} X_i'^* \frac{\tau_j + X_j'}{-i\omega b + \omega^2 \rho_f} d\Omega \\
&= - \int_{\Gamma} X_i'^* \frac{m_i}{-i\omega b + \omega^2 \rho_f} d\Gamma + \int_{\Omega} X_i'^* \frac{\tau}{-i\omega b + \omega^2 \rho_f} d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega} \frac{X_i'^* X_i'}{-i\omega b + \omega^2 \rho_f} d\Omega
\end{aligned} \tag{4.22}$$

En prenant compte du fait que $X_{i,i}^* = \delta(x - \xi)$,

$$\int_{\Omega} (X_i^* u_i + X_i'^* U_i) d\Omega = \frac{\tau}{-i\omega b + \omega^2 \rho_f} - \int_{\Gamma} X_i'^* \frac{m_i}{-i\omega b + \omega^2 \rho_f} d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{X_i'^* X_i'}{-i\omega b + \omega^2 \rho_f} d\Omega \tag{4.23}$$

et en incorporant l'équation (6.19) dans la relation (6.14) :

$$\begin{aligned}
\frac{c\tau}{-i\omega b + \omega^2 \rho_f} + \int_{\Gamma} (t_{ij}^* u_i + \tau_j^* U_n) d\Gamma &= \int_{\Gamma} \left[j_i u_{ij}^* + \tau \left(U_{ij}^* + \frac{X_i'^* n_i}{-i\omega b + \omega^2 \rho_f} \right) \right] d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Omega} \left[X_i u_{ij}^* + X_i' \left(U_{ij}^* + \frac{X_i'^*}{-i\omega b + \omega^2 \rho_f} \right) \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$c = 1$ à l'intérieur de Ω et vaut zéro à l'extérieur. $c = 0.5$ sur la frontière quand celle-ci est lisse.

Où

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \xi \in \Omega \\ 0,5 & \xi \in \Gamma \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{4.25}$$

Les équations (4.35) et (4.39) sont les intégrales de frontière en poro-élasticité pour le problème temporel harmonique. Les intégrales ne prennent en compte que les forces de volume et les solutions fondamentales données.

La représentation intégrale dans les équations (4.35) et (4.39) peut être écrit en 2D et en annulant les forces de volume comme suit :

$$c_{\alpha\beta} t_{\alpha} + \int_{\Gamma} t_{\alpha\beta}^* t_{\alpha} d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau_{\beta}^* U_n d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{\alpha\beta}^* t_{\alpha} d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau U_{n\beta}^* d\Gamma \tag{4.26}$$

$$c_{\alpha 3} \frac{\tau}{b} + \int_{\Gamma} t_{\alpha 3}^* u_{\alpha} d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau_3^* U_n d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{\alpha 3}^* t_{\alpha} d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau (U_{n3}^* - JX_{\alpha}^* n_{\alpha}) d\Gamma + Jc_{33} \tau \tag{4.27}$$

Avec : $\alpha=1,2$ et $\beta=1,2$

$$J = \frac{1}{iwb - w^2 \rho_{22}} \text{ et } Z = J(iwb + w^2 \rho_{12}) \quad (4.28)$$

En utilisant la notation matricielle, la représentation intégrale pour le point 'i' peut être écrite sous la forme :

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* p d\Gamma \quad (4.29)$$

Avec :

u et p sont le champ du vecteurs des variables pour les déplacements et les contraintes :

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \tau \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ U_n \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

u^* et p^* sont les tenseurs des solutions fondamentales.

$$u^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{21}^* & -\tau_1^* \\ u_{12}^* & u_{22}^* & -\tau_2^* \\ u_{13}^* & u_{23}^* & -\tau_3^* \end{bmatrix}, \quad p^* = \begin{bmatrix} t_{11}^* & t_{21}^* & -U_{n1}^* \\ t_{12}^* & t_{22}^* & -U_{n2}^* \\ t_{13}^* & t_{23}^* & -\hat{U}_{n3}^* \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Avec

$$\hat{U}_{n3}^* = U_{n3}^* - JX^* n_\alpha = (J\tau_{3,\alpha}^* + Zu)n_\alpha \quad (4.44)$$

J et Z sont définie dans (4.28)

Pour le point x situés sur la frontière régulière Γ .

$$c^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -J \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

4.6 Solutions fondamentales

Les solutions fondamentales (fonctions de Green du milieu infini) en poro-élasticité sont données comme suite :

$$\psi_{kj} = \sum_{m=1}^3 \left\{ A_{kjm} K_0(i\lambda_m r) + (B_{kjm} r_{,j} + C_{kjm} r_{,k} + D_{kjm} \frac{1}{r}) K_1(i\lambda_m r) + E_{kjm} r_{,k} r_{,j} K_2(i\lambda_m r) \right\} \quad (4.46)$$

Avec :

$$\mu_{kj}^* = \psi_{kj} \quad (4.47)$$

$$\tau_{3j}^* = \psi_{3j} \quad (4.48)$$

Pour $k=1,2$, $j=1,3$

$K_0(i\lambda_m r)$ et $K_1(i\lambda_m r)$, $K_2(i\lambda_m r)$ sont les fonctions de Bessel modifiées du deuxième type et d'ordre 1, et 2 respectivement.

λ_1 et λ_2 sont les nombre d'ondes de compression P_1 et P_2

λ_3 est le nombre d'ondes de l'onde de cisaillement.

Les différentes termes A_{kjm} , B_{kjm} , C_{kjm} , D_{kjm} , E_{kjm} sont exprimée dans l'annexe A2.1

A partir des déplacements du solide et du pression du fluide correspondant a la solution fondamentale ψ_{kj} en peut calculée le vecteur contraint $t_{\alpha j}^*$ a la surface du domaine Ω , en utilisant les équations (4.4) et (4.5) comme suit : ($\alpha=1,2$ et $\beta=1,2$)

$$t_{\alpha j}^* = \tau_{\alpha\beta j}^* n_{\beta} = \left(\lambda + \frac{Q}{R}\right) \delta_{\alpha\beta} e_{\alpha j}^* n_{\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta j}^* n_{\beta} + Q \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_j^* n_{\beta} \quad (4.47)$$

Avec

$$e_{\alpha\beta j}^* = \frac{1}{2}(\psi_{\alpha j, \beta} + \psi_{\beta j, \alpha}) \quad (4.47)$$

$$e_j^* = e_{\alpha\alpha j}^* \quad (4.48)$$

On a

$$\varepsilon_j^* = \tau_j^* / R - (Q/R)e_j^* \quad (4.49)$$

$$e_{\alpha\beta j}^* n_{\beta} = e_{\alpha j}^* \quad (4.50)$$

On obtient l'expression suivante pour le vecteur contrainte :

$$t_{\alpha j}^* = (\lambda e_j^* + \frac{Q}{R} \psi_{3j}) n_{\alpha} + 2\mu e_{\alpha j}^* \quad (4.51)$$

Le déplacement normale U_{nj}^* correspondant à la solution fondamentale ψ_{kj} peut être obtenue en utilisant l'équation (4.13) et (4.21) comme suit :

$$\mu_{kj}^* = \psi_{kj} \quad (4.47)$$

$$\tau_{3j}^* = \psi_{3j} \quad (4.48)$$

Pour $k=1,2$, $j=1,3$

$K_0(i\lambda_m r)$ et $K_1(i\lambda_m r)$, $K_2(i\lambda_m r)$ sont les fonctions de Bessel modifiées du deuxième type et d'ordre 1, et 2 respectivement.

λ_1 et λ_2 sont les nombre d'ondes de compression P_1 et P_2

λ_3 est le nombre d'ondes de l'onde de cisaillement.

Les différentes termes A_{kjm} , B_{kjm} , C_{kjm} , D_{kjm} , E_{kjm} sont exprimée dans l'annexe A2.1

A partir des déplacements du solide et du pression du fluide correspondant a la solution fondamentale ψ_{kj} en peut calculée le vecteur contraint $t_{\alpha j}^*$ a la surface du domaine Ω , en utilisant les équations (4.4) et (4.5) comme suit : ($\alpha=1,2$ et $\beta=1,2$)

$$t_{\alpha j}^* = \tau_{\alpha\beta j}^* n_{\beta} = \left(\lambda + \frac{Q^2}{R}\right) \delta_{\alpha\beta} e_{\alpha j}^* n_{\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta j}^* n_{\beta} + Q \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_j^* n_{\beta} \quad (4.47)$$

Avec

$$e_{\alpha\beta j}^* = \frac{1}{2} (\psi_{\alpha j, \beta} + \psi_{\beta j, \alpha}) \quad (4.47)$$

$$e_j^* = e_{\alpha\alpha j}^* \quad (4.48)$$

On a

$$\varepsilon_j^* = \tau_j^* / R - (Q/R) e_j^* \quad (4.49)$$

$$e_{\alpha\beta j}^* n_{\beta} = e_{\alpha j}^* \quad (4.50)$$

On obtient l'expression suivante pour le vecteur contrainte :

$$t_{\alpha j}^* = (\lambda e_j^* + \frac{Q}{R} \psi_{3j}) n_{\alpha} + 2\mu e_{\alpha j}^* \quad (4.51)$$

Le déplacement normale U_{nj}^* correspondant à la solution fondamentale ψ_{kj} peut être obtenue en utilisant l'équation (4.13) et (4.21) comme suit :

$$\mu_{kj}^* = \psi_{kj} \quad (4.47)$$

$$\tau_j^* = \psi_{3j} \quad (4.48)$$

Pour $k=1,2$, $j=1,3$

$K_0(i\lambda_m r)$ et $K_1(i\lambda_m r)$, $K_2(i\lambda_m r)$ sont les fonctions de Bessel modifiées du deuxième type et d'ordre 1, et 2 respectivement.

λ_1 et λ_2 sont les nombre d'ondes de compression P_1 et P_2

λ_3 est le nombre d'ondes de l'onde de cisaillement.

Les différentes termes A_{kjm} , B_{kjm} , C_{kjm} , D_{kjm} , E_{kjm} sont exprimée dans l'annexe A2.1

A partir des déplacements du solide et du pression du fluide correspondant a la solution fondamentale ψ_{kj} en peut calculée le vecteur contraint $t_{\alpha j}^*$ a la surface du domaine Ω , en utilisant les équations (4.4) et (4.5) comme suit : ($\alpha=1,2$ et $\beta=1,2$)

$$t_{\alpha j}^* = \tau_{\alpha\beta j}^* n_{\beta} = \left(\lambda + \frac{Q}{R}\right) \delta_{\alpha\beta} e_{\alpha j}^* n_{\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta j}^* n_{\beta} + Q \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_j^* n_{\beta} \quad (4.47)$$

Avec

$$e_{\alpha\beta j}^* = \frac{1}{2} (\psi_{\alpha j, \beta} + \psi_{\beta j, \alpha}) \quad (4.47)$$

$$e_j^* = e_{\alpha\alpha j}^* \quad (4.48)$$

On a

$$\varepsilon_j^* = \tau_j^* / R - (Q/R)e_j^* \quad (4.49)$$

$$e_{\alpha\beta j}^* n_{\beta} = e_{\alpha j}^* \quad (4.50)$$

On obtient l'expression suivante pour le vecteur contrainte :

$$t_{\alpha j}^* = \left(\lambda e_j^* + \frac{Q}{R} \psi_{3j}\right) n_{\alpha} + 2\mu e_{\alpha j}^* \quad (4.51)$$

Le déplacement normale U_{nj}^* correspondant à la solution fondamentale ψ_{kj} peut être obtenue en utilisant l'équation (4.13) et (4.21) comme suit :

$$U_{nj}^* = U_{\alpha j}^* n_\alpha$$

$$Z = J(iwb + w^2 \rho_{12}) \quad \text{et} \quad J = \frac{1}{iw b - w^2 \rho_{22}}$$

4.7 Formulation intégrale discrétise : (élément constant)

La résolution analytique des équations précédentes est difficile à mener ; c'est pour cette raison, que la méthode des équations aux frontières utilise une approche numérique pour la résolution de ces équations. En se plaçant dans le cas d'un problème bidimensionnelle, il est nécessaire d'approximer le contour du domaine, a l'aide d'éléments dits éléments de frontières. L'élément choisi dans ce travail est l'élément constant, les déplacements et les contraintes sont donc supposés constants au sein des éléments.

Supposant maintenant que le contour soit divisé en N éléments. L'équation intégrale (4.40) se met en omettant l'intégrale du domaine sous la forme discrétisée suivante :

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} p^* d\Gamma \right\} u^j = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \right\} p^j \quad (4.53)$$

Utilisant la notation traditionnelle de la BEM, on peut écrire alors l'équation (4.45) comme suite :

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \hat{H}^{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G^{ij} p^j \quad (4.54)$$

$$\sum_{j=1}^N \hat{H}^{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G^{ij} p^j \quad (4.55)$$

Avec

$$H^{ij} = \hat{H}^{ij} \quad i \neq j \quad (4.56a)$$

$$H^{ij} = \hat{H}^{ij} + c^i \quad i = j \quad (4.56b)$$

et finalement en a

$$U_{nj}^* = J \left(\psi_{3j,\alpha} + \frac{1}{2\pi} \frac{r_{,\alpha}}{r} \delta_{3j} \right) n_\alpha + Z \psi_{\alpha j} n_\alpha \quad (4.52)$$

Avec :

$$Hu = Gp \quad (4.57)$$

Avec H et G sont des matrices de taille $(3N \times 3M)$

4.8 Evaluation des intégrales

Le calcul des sous matrices \hat{H}^{ij} et G^{ij} lorsque $i \neq j$ peut être effectuées en utilisant la méthode d'intégration de Gauss à 4 points pour intégrer les solutions fondamentales donnée dans l'annexe.

Lorsque on a $i = j$; le point courant (x) et le point singulière ξ appartiennent au même élément (ξ est le point d'application de la fonction de Dirac $\delta(x - \xi)$), les sous-matrices H^{ii} et G^{ii} présentent plusieurs éléments nulle. Si nous faisons un changement de repère vers un repère locale adéquat (x_1, x_2) figure (4.1) on peut annuler la singularité et les éléments nulle dans les sous -matrices sont devenu comme suivant :

$$G^{ii} = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H^{ii} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & H_{23} \\ 0 & H_{32} & -\frac{J}{2} \end{bmatrix}$$

Le calcul des termes $G_{11}, G_{22}, G_{33}, H_{23}, H_{32}$ peut être effectué sans singularité, ils sont exprimés dans l'Annexe A2.2

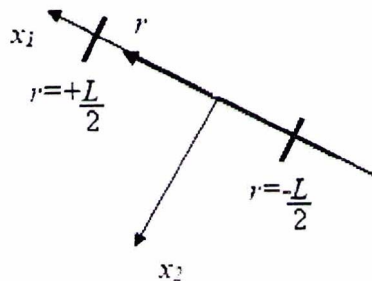


Figure4.1 Le système locale des coordonnées

4.9 Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons présenté le fondement théorique de la méthode des éléments de frontière et le traitement analytique et numérique des équations intégrales appliquées à l'étude des problèmes de la poro-élastodynamique stationnaire bidimensionnelle. On a pu voir l'adaptation de la BEM aux problèmes liés aux singularités, ce qui réduit les imprécisions dans les calculs numériques.

Les développements issus de ce chapitre vont être à la base de l'application de la méthode des équations intégrales aux frontières pour l'évaluation des fonctions d'impédance, et la détermination de la réponse des fondations filantes. Ce qui sera l'objectif des prochains chapitres.

IMPEDANCE DYNAMIQUE DES FONDATIONS FILANTES

5.1 Introduction

Dans le cadre de l'application de la méthode des sous structures, l'évaluation de la rigidité dynamique des fondations rigides non pesantes est une étape fondamentale et fait l'objet des recherches soutenues. Plusieurs méthodes de résolution, ont été proposées afin d'évaluer l'impédance des fondations. Certaines de ces procédures étaient purement analytiques, alors que d'autres étaient numériques faisant appel à la méthode des éléments finis, à la méthode des couches minces, ou encore à la méthode des éléments de frontières (Dominguez. 1978).

La difficulté majeure de ces problèmes a été la représentation de la radiation de l'énergie dans un domaine non borné. La BEM s'est avérée être une approche très efficace à cet égard, transformant les équations gouvernantes du domaine en intégrales de frontière, elle satisfait implicitement les conditions de radiation pour les domaines infinis ou semi-infinis.

Bien que la plupart des traitements d'interaction dynamique sol- fondation sont basés sur un modèle monophasique élastique équivalent du sol on peut trouver ces dernières décennies des études où le sol est considéré comme un milieu bi phasique basée sur la théorie de Biot. Ce modèle présente un intérêt par rapport à la modélisation classique du sol en milieu continu à une phase, et ça nous permet d'étudier l'effet de certains paramètres tels que la compressibilité et la perméabilité sur la rigidité des fondations.

Dans ce chapitre, nous allons utiliser l'approche directe de la méthode des équations intégrales aux frontières pour calculer les rigidités des fondations rigides filantes posées ou

enterrées dans un demi espace bi phasique poro-élastique. La technique est basé sur la formulation des élément de frontière pour un milieu poreux obtenue par Dominguez (1991,1992) et Ghang et al (1991), et basant sur la théorie de propagation des ondes élastique dans les milieux poro-élastique proposer par Biot (1956).

5.2 Fonction d'Impédance

Les fonctions d'impédance sont le système de 'ressort et amortisseurs' reliant la fondation sans masse à une base fixe .En effet c'est l'effet du sol retenant la fondation qui est condensé en un point de référence.

Nous avons défini les fonctions d'impédance des fondations filantes rigides non pesantes surfacique ou enterrées dans un demi-plan comme suit (Zhao et al. 1997)

$$\begin{Bmatrix} P_{uu} \\ P_v \\ \frac{M}{B} \end{Bmatrix} = K_s \left(\begin{bmatrix} k_{uu} & k_{ur} \\ k_{ru} & k_{rr} \end{bmatrix} + i\alpha_0 \begin{bmatrix} c_{uu} & c_{ur} \\ c_{ru} & c_{rr} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta_0 B \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Où P et M sont les amplitudes des forces de translation et de balancement appliquées au point de référence par unité de longueur et K_s est la rigidité statique. Les indices u , v et r indiquent les directions horizontale, verticale et balancement, respectivement (figure 5.1).

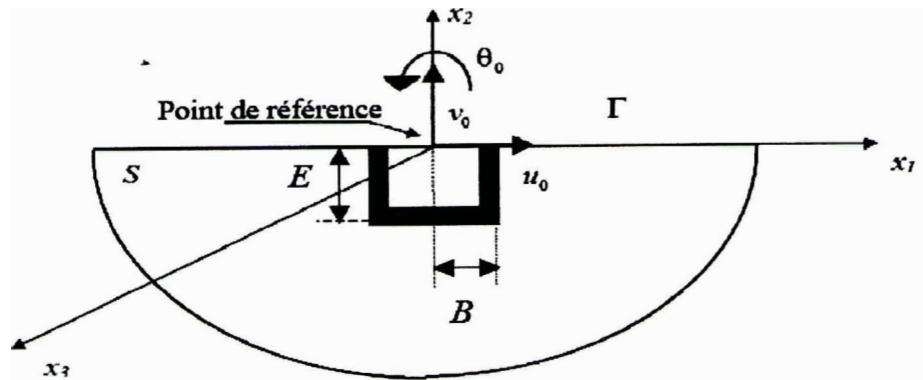


Figure 5.1 Configuration géométrique de la fondation

La matrice dans l'équation (5.1) est symétrique.

La fréquence adimensionnelle est définie par : $\alpha_0 = \frac{\omega B}{C_s}$

Il est clair que la fréquence adimensionnelle englobe trois paramètres qui sont : la fréquence d'excitation ω , la demi largeur de la fondation B , et la vitesse de propagation des ondes de cisaillement C_s , caractérisant le type de sol.

La partie réelle de la fonction d'impédance représente la rigidité et l'inertie du sol pour le mode de déplacement considéré, alors que la partie imaginaire représente l'amortissement radiatif et interne du sol. Les termes extra- diagonaux K_{ur} et K_{ru} (C_{ur} et C_{ru}) sont l'effet de couplage qui existe entre la translation horizontal et de balancement (Roking). Ces termes peuvent être négligés pour les fondations superficielles. Mais celle n'est pas pour les fondations enterrées.

L'amortissement matériel de type hétéritique de la partie solide peut être prise en compte en remplaçant les coefficients de Lamé par leurs équivalents complexe.

$$\begin{aligned}\mu &= G(1 + 2i\beta) \\ \lambda^* &= \lambda(1 + 2i\beta)\end{aligned}$$

Où β est l'amortissement interne du squelette solide.

5.3 Evaluation des fonctions d'impédance par la BEM

5.3.1 Formulation intégrale

Le calcul des fonctions d'impédance à partir de la formulation intégrale se fait en suivant une séquence d'étapes, notamment l'introduction des condition aux limites (C.A.L) et la résolution des système ainsi établi dans la première étape. L'étape suivante est la détermination des forces de contact à partir des tractions à l'interface pour enfin aboutir aux fonctions d'impédance.

Une fois la formulation intégrale développée pour un milieu poro-élastique, on aboutit au système d'équation suivant :

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \hat{H}^{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G^{ij} p^j \quad (5.2)$$

Ou sous la forme condensée

$$Hu = Gp \quad (5.3)$$

$u(3N)$ et $p(3N)$ sont des vecteurs des déplacements et des contraintes respectivement. Et pour chaque élément nous avons les deux vecteurs suivants :

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \tau \end{bmatrix} ; p = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ U_n \end{bmatrix}$$

Avec

τ : contrainte dans le fluide,

U_n : déplacement normale du fluide.

H et $G = (3N \times 3N)$ sont les matrices d'influence, elles sont pleines, car tous les éléments du domaine sont couplés.

5.3.2 Condition aux limites :

Le mouvement de la fondation lors de ça vibration est harmonique, on peut l'écrit comme :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta_0 B \end{Bmatrix} e^{-i\omega t}$$

Les déplacements du squelette solide sont contrôlés par les déplacements de la fondation, et le mouvement du fluide est contrôlé par les conditions de contact.

Pour l'évaluation des matrice d'impédance des fondations filantes rigides reposant sur un sol poro-élastique pour les deux types de contact sol fondation, nous ferons un réarrangement en transformant le système matriciel précédent de telle façon à satisfaire les conditions aux limites suivantes :

- Un contact perméable et relâché entre le squelette solide et la fondation, (les pores de fluide sont drainé ; $\tau = 0$ à la surface de contact), d'où pour chaque élément :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (5.4a)$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ U_n \end{Bmatrix} \quad (5.4b)$$

Nous supposons pour les fondations superficielles que la charge verticale ne produit qu'un déplacement vertical et la charge horizontale n'engendre qu'un déplacement horizontal. Cela se traduit mathématiquement par $H_{12}=H_{21}=0$ et $G_{12}=G_{21}=0$.

- Un contact imperméable et parfait entre le squelette solide et la fondation (des pores de fluide non drainé; $\tau \neq 0$ à la surface de contact) d'où pour chaque élément :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_n - U_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (5.5a)$$

$$\begin{Bmatrix} t_n + \tau \\ t_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_n \\ t_t \\ \sigma \end{Bmatrix} \quad (5.5b)$$

Avec $u_n = \pm u_{1,2}$, $t_n = \pm t_{1,2}$, $t_t = \pm t_{1,2}$ (figure 5.2)

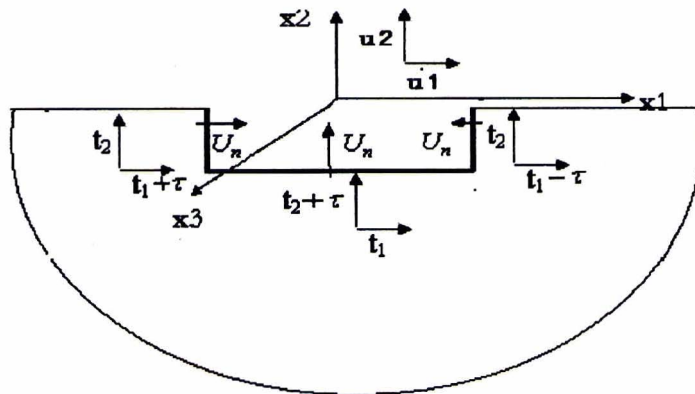


Figure 5.2: Géométrie de la fondation et directions des efforts et des déplacements
 Nous utilisons les conditions de frontière pour avoir un problème de taille réduit :

$$Hu = Gp \quad (5.6)$$

Avec :

H et G sont des matrices de taille $(2N \times 2N)$.

u et p sont des vecteurs de taille $(2N)$.

5.3.3 Evaluation de la matrice d'impédance

On utilise les fonction de Green d'un milieu infini, les élément de frontière de l'équation (5.3) peuvent être subdivisés en deux partie (figure 5.3), la première partie identifiée par l'indice c , désigne les élément de contact sol-fondation ; la deuxième partie identifiée par l'indice l , désigne les éléments restants.

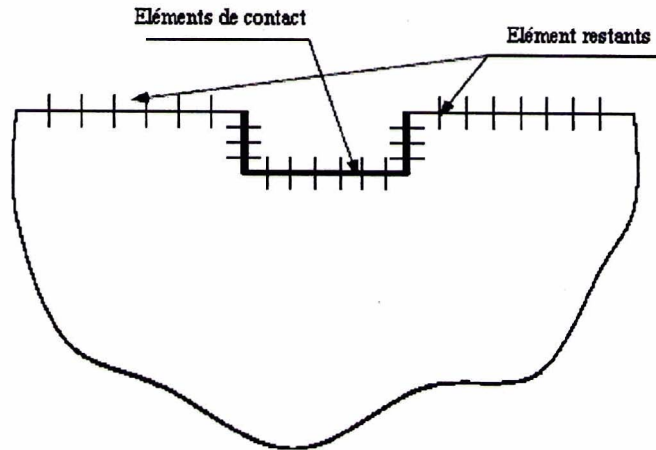


Figure 5. 3 : Discretisation par élément de frontière

En vertu de cette partition, l'équation (5.6) se réécrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} H^{cc} & H^{cl} \\ H^{lc} & H^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^c \\ u^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{cc} & G^{cl} \\ G^{lc} & G^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p^c \\ p^l \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

Si on pose :

$$\begin{bmatrix} D^{cc} & D^{cl} \\ D^{lc} & D^{ll} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{cc} & G^{cl} \\ G^{lc} & G^{ll} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H^{cc} & H^{cl} \\ H^{lc} & H^{ll} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Nous avons donc:

$$\begin{Bmatrix} p^c \\ p^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{cc} & D^{cl} \\ D^{lc} & D^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^c \\ u^l \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

L'évaluation des fonctions d'impédance est faite en suivant la même démarche. Les conditions aux limites que l'on doit imposer seront celles qui nous conduiront à la détermination des fonctions d'impédance. Des déplacements unitaires sont imposés à la zone de contact, et des tractions nulles p^l sont imposés à la surface libre.

La résolution du système nous donnera les tractions à l'interface sol-fondation. L'intégration des tractions sur les éléments conduit à la détermination des forces globales. Ces derniers constituent en fait les fonctions d'impédance, car rappelons le, les déplacements imposés étaient unitaires.

D'où l'écriture suivante de l'équation (5.9)

$$\begin{Bmatrix} p^c \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{cc} & D^{cl} \\ D^{lc} & D^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^c \\ u^l \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

En utilisant une procédure de condensation, l'équation (5.10) peut être écrite comme suite

$$\begin{cases} p^c = D^{cc}u^c + D^{cl}u^l \\ 0 = D^{lc}u^c + D^{ll}u^l \end{cases} \quad (5.11.1)$$

$$(5.11.2)$$

A partir de l'équation (5.11.2), on a

$$u^l = -(D^{ll})^{-1} D^{lc}u^c \quad (5.12)$$

En substituant l'équation (5.12) dans l'équation (5.11.1), nous pouvons déterminer le vecteur contraint à l'interface sol-fondation en fonction de vecteur déplacement :

$$p^c = \left[D^{cc} - D^{cl} (D^{ll})^{-1} D^{lc} \right] u^c \quad (5.13)$$

Lorsque la fondation est très rigide en comparaison avec le sol, nous pouvons supposer que cette dernière se déplace 'rigidement', et ainsi les déplacements sur la frontière de la fondation peuvent être obtenus à partir des mouvements de corps rigide par l'intermédiaire d'une matrice de transformation T , qui dépend uniquement des coordonnées relatives des nœuds de frontière par rapport à un point de référence, d'où :

$$u^c = T u^f \quad (5.14)$$

Où u^f est le vecteur déplacements de corps rigide de la fondation. En supposant que le point de référence ait des coordonnées zéros, les sous matrices de T correspondant à chaque nœud j sont données par :

$$T_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_2 \\ 0 & 1 & x_1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Avec

$$u_f = \{u_0 \quad v_0 \quad \theta_0\}$$

En introduisant la relation force-contraintes sur l'interface sol-fondation :

$$F = T^T A p^c \quad (5.16)$$

Où A est une matrice diagonale désignant 'l'aire' de chaque élément de frontière de la fondation.

A partir des équations (5.12), (5.13) et (5.16) nous pouvons montrer que

$$F = T^T A \left[D^{cc} - D^{cl} (D^{ll})^{-1} D^{lc} \right] T u_f \quad (5.17)$$

D'où la matrice d'impédance K :

$$K = T^T \mathfrak{S} \quad (5.18)$$

Avec \mathfrak{S} est la matrice des contraintes surfaciques de contact :

$$\mathfrak{S} = A \left[D^{cc} - D^{cl} (D^{ll})^{-1} D^{lc} \right] T \quad (5.19)$$

5.4 Fondation filante reposant sur un profil de sol surmontant un substratum

Dans plusieurs cas, le modèle d'une fondation sur un demi espace est supposé par les ingénieurs, cependant ce modèle repose sur des hypothèses peu réalistes et on peut trouver autres conditions telles que l'existence d'un substratum rigide au pied d'un profile du sol. Le cas d'un substratum rocheux ou d'un substratum élastique avec une certaine épaisseur est souvent supposé par les ingénieurs.

5.4.1 Substratum élastique:

Dans ce cas, le substratum sera considéré comme un milieu élastique, et l'impédance de la fondation serait affecté en plus, par l'interaction mutuelle entre les deux milieux couche de sol et substratum.

La BEM constitue un outil de calcul précis et efficace qui s'adapte particulièrement bien à ce genre de problème. Donc, le domaine peut être subdivisé en plusieurs sous domaines homogènes par morceaux, dans ce cas, chaque sous domaine est considéré indépendant, ceci nous conduit à plusieurs systèmes d'équation linéaire, couplés avec les conditions de continuités entre les interfaces.

Considérant un domaine composé de deux sous domaines homogènes Ω_1 et Ω_2 (fig 5.4)

- Le sous domaine Ω_1 est délimité par les frontières Γ_1 et Γ_2 .
- Le sous domaine semi infinie Ω_2 est délimité par la frontières Γ_2 .

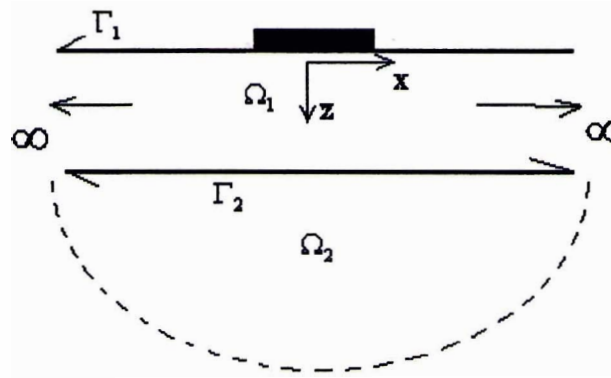


Figure 5.4 fondation sur une couche de sol surmontant un substratum

Le sous domaine Ω_1 est un milieu poro-élastique et les équations intégrales gouvernant s'écrivent :

$$c_{\alpha\beta}u_\alpha + \int_{\Gamma} t_{\alpha\beta}^* u_\alpha d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau_\beta^* U_n d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{\alpha\beta}^* p_\alpha d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau U_{n\beta}^* d\Gamma \quad (5.20)$$

$$c_{\alpha 3} \frac{\tau}{b} + \int_{\Gamma} t_{\alpha\beta}^* u_\alpha d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau_\beta^* U_n d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{\alpha 3}^* p_\alpha d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau (U_{n3}^* - JX_\alpha^* n_\alpha) d\Gamma + Jc_{33}\tau \quad (5.21)$$

Le demi espace Ω_2 est un milieu élastique et l'équation intégrale gouvernante s'écrit :

$$C_{ij}(\xi)u_i(\xi, \omega) = \int_{\Gamma} \{u_{ij}^*(x, \xi, \omega)p_j(x, \omega) - t_{ij}^*(x, \xi, \omega)u_j(x, \omega)\} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho u_{ij}^*(x, \xi, \omega)f_j(x, \omega) d\Omega \quad (5.22)$$

Avec $u_{ij}^*(x, \xi, \omega)$ et $t_{ij}^*(x, \xi, \omega)$ sont des solutions fondamentales pour un milieu infini en élastodynamique (Annexe A1)

Ceci nous conduit aux deux systèmes d'équations suivantes :

$$H^1 u^1 = G^1 p^1 \quad (5.23)$$

$$H^2 u^2 = G^2 p^2 \quad (5.24)$$

Les exposants ¹ et ² représentent les sous domaines Ω_1 et Ω_2 respectivement.

Les vecteurs u^1 et p^1 (u^2 et p^2) contiennent les valeurs nodales des déplacements et les tractions sur la frontière $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (Γ_2) respectivement.

Si on note pour :

Le sous domaine (couche de sol) Ω_1 :

- u_1^1 et p_1^1 : les vecteurs qui contiennent les valeurs nodales des déplacements et des tractions sur la frontière Γ_1 .

- u_2^1 et p_2^1 : les vecteurs qui contiennent les valeurs nodales des déplacements et des tractions sur la frontière Γ_2 .

Le sous domaine (demi espace) Ω_2 :

- u^2 et p^2 : les vecteur qui contiennent les valeurs nodales des déplacements et des tractions sur la frontière Γ_2 .

Les équations gouvernantes peuvent être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^1 & D_{12}^1 \\ D_{21}^1 & D_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

$$p^2 = D^2 u^2 \quad (5.26)$$

Le couplage des équations est accompli, en introduisant les équations d'équilibre et de compatibilité au niveau de l'interface Γ_2 , qui se traduisent par :

$$u_2^1 = u^2 \quad \text{et} \quad p_2^1 = -p^2 \quad (5.27)$$

Les équations 3.35 3.54 sont ainsi combinées à 2.55 pour donner :

$$\begin{cases} p_1^1 = D_{11}^1 u_1^1 + D_{12}^1 u_2^1 & (5.28) \\ u_2^1 = (D_{22}^1)^{-1} (p_2^1 - D_{21}^1 u_1^1) & (5.29) \\ p_2^1 = -D^2 u^2 & (5.30) \end{cases}$$

On injectant les équations (5.29) et (5.30) dans (5.28), nous aurons l'équation suivante :

$$p_1^1 = D u_1^1 \quad (5.31)$$

Avec

$$D = D_{11}^1 - D_{12}^1 (D_{22}^1 + D^2)^{-1} D_{21}^1 \quad (5.32)$$

u_1^1 , p_1^1 : les vecteurs qui contient les valeurs nodales des déplacements et les tractions sur la frontière Γ_1 .

A partir des équations (5.11), (5.12), (5.15) et (5.16) nous pouvons écrire la matrice de rigidité K :

$$K = T^T \mathfrak{S} \quad (5.33)$$

Avec :

$$\mathfrak{S} = A \left[D^{cc} - D^{cl} (D^{ll})^{-1} D^{lc} \right] T \quad (5.34)$$

L'indice c, désigne les éléments de contact sol-fondation ; la deuxième partie identifiée par l'indice l, désigne les éléments restants (figure 5.3).

5.4.2 Substratum rocheux:

Pour analyser ce cas, nous avons proposé une géométrie comme celle dans la figure 5.5.

Au niveau de l'interface séparant la couche de sol du substratum rocheux, les conditions aux limites sont :

$$u_x |_{z=h} = 0 \quad (5.35)$$

$$u_z |_{z=h} = 0 \quad (5.36)$$

$$U_n |_{z=h} = 0 \quad (5.37)$$

Ces conditions impliquent que le substratum situé à $z = H$ est supposé fixe et imperméable.

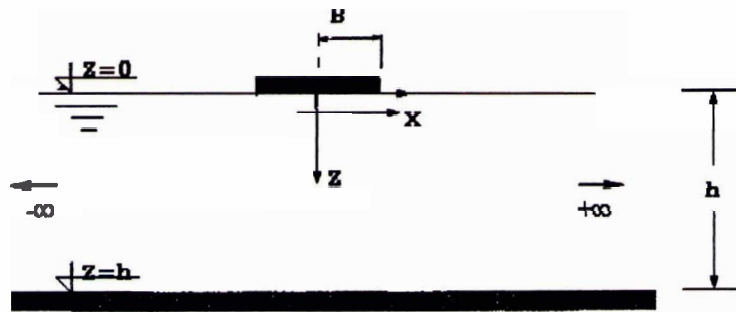


Figure 5.5 fondation filante sur une couche de sol surmontant un substratum rocheux

Nous réécrivons l'équation (5.24) comme suite :

$$\begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^1 & D_{12}^1 \\ D_{21}^1 & D_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

Avec: $u_2^1 = 0$ (conditions aux limites à l'interface séparant la couche de sol du substratum rocheux)

Nous avons donc :

$$p_1^1 = D.u_1^1 \quad (5.39)$$

Avec

$$D = D_{11}^1 \quad (5.40)$$

A partir des équations (5.12), (5.13), (5.16) et (5.17) nous pouvons écrire la matrice de rigidité K :

$$K = T^T \mathfrak{S} \quad (5.41)$$

Avec :

$$\mathfrak{S} = A \left[D^{cc} - D^{cl} (D^{ll})^{-1} D^{lc} \right] T$$

5.5 Présentation des résultats

5.5.1 Notation :

L'interaction sol-fondation a une importance considérable dans la conception parasismique des structures. Dans ce cadre le calcul de la fonction d'impédances dynamiques, i.e, les forces de translation et de rotation unitaire d'une fondation non-pesante et rigide posée ou enterrée dans un sol poro-viscoélastique est une étape clé. Les fonctions d'impédances pour les modes horizontaux, vertical et de balancement (K_{11} , K_{22} , K_{33}) peuvent être écrites en notation adimensionnelle.

La normalisation généralement adoptée dans de tels problèmes consiste à prendre une fréquence adimensionnelle, qui englobe la fréquence d'excitation ω , la vitesse de cisaillement de l'onde C_s et la demi largeur du fondation B ($\alpha_0 = \omega.B/C_s$). La deuxième normalisation est faite sur la rigidité dynamique, on divise les termes de translation par G , alors que les termes de rotation ont été divisés par $G B^2$

On note que le maillage est choisi en correspondance avec la fréquence d'excitation considérée. Nous avons pris le soin de limiter à $\lambda_s/8$ la taille des éléments de frontières, λ_s étant la longueur d'onde de cisaillement.

5.5.2 Validation des programmes :

Afin de valider le code de calcul établi dans ce mémoire, on doit procéder à quelques tests permettant de vérifier les résultats obtenus.

5.5.2.1 Discrétisation du champ libre :

La solution fondamentale choisie (espace infini) nécessite la discrétisation de toute la frontière du domaine, qui est dans notre cas la surface du demi-espace. Par ailleurs, du fait de l'amortissement radiatif et de faible participation des éléments lointains du champ libre à l'interaction, on peut se permettre de limiter notre discrétisation à la zone de contact et à son voisinage. Ce qui réduit considérablement l'inconvénient de cette solution fondamentale par rapport à la solution fondamentale du demi-espace.

A partir de la figure 5.8, il est recommandé qu'une discrétisation d'une distance D ($D \geq 3B$) entre l'extrémité de la fondation et l'extrémité du champ libre soit effectuée pour les fondation superficielles, et une discrétisation d'une distance D allant jusqu'à $7B$ soit effectuée pour des fondation enterrée avec un coefficient d'enterrement E/B variant entre

0,5 et 1. Il y a lieu de noter que le champ libre à discrétiser pour obtenir des très bons résultats précis augmente avec l'augmentation du coefficient d'enterrement E/B .

5.5.2.1 Comparaison avec les résultats publiés :

Une fois obtention de la convergence des résultats par cette approche (BEM), nous comparons les résultats obtenus par rapport à leurs homologues publiés. On a pris le cas d'une fondation superficielle sur un demi espace poro-viscoélastique (figure 5.9), on calcule donc les fonctions d'impédance et on les compare avec ceux obtenus par Kassir et Xu (1988) et celles obtenues par Bernardo et Japon et Dominguez (1997). Ces derniers ont utilisé la *BEM* conjointement avec les éléments quadratiques.

Les caractéristiques mécaniques et géométriques considérés dans cet exemple sont comme suit :

Le module de cisaillement : $G = 3.2175 \times 10^7 \text{ N/m}$.

Le coefficient de poisson : $\nu = 0,25$.

La porosité : $n = 0,35$

La densité du solide : $\rho_s = 1425 \text{ kg/m}^3$

La densité du fluide : $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$

La constante de dissipation : $b = 1,1968 \times 10^7 \text{ N.s/m}^4$ (correspond à une perméabilité $k = 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$).

Les constants de Biot : $Q = 4,61 \times 10^8 \text{ m}^3$, $R = 2,4823 \times 10^8 \text{ N/m}^3$.

La densité de la masse additionnelle : $\rho_{12} = 0$

Le demi largeur de la fondation $B = 7,62 \text{ m}$

Les résultats sont illustrés dans la figure 5.9 pour tous les termes de la rigidité. Nous constatons que les résultats obtenus par méthode des éléments de frontière, cas d'élément constant présente de façon générale un parfait accord avec les résultats trouvés par la méthode des éléments de frontière cas d'élément quadratique (Dominguez et al 1997), et ceux obtenus par Kassir et Xu (1988).

5.5.3 Étude de l'influence de certains paramètres :

5.5.3.1 Fondations filantes sur un demi-espace poro-élastique :

a. Effet du type de contact :

Les conditions de contact à l'interface sol-fondation peuvent varier. Un contact imperméable et parfait entre le squelette solide et la fondation (les pores de fluide non drainé; et donc la pression interstitielle $\tau \neq 0$ à la surface de contact et tous les degrés de liberté sont couplés). Le deuxième type de contact est le contact perméable et relâchée entre le squelette solide et la fondation, (les pores de fluide sont drainé ; $\tau = 0$ au niveau de la surface de contact sol-fondation), cela implique que pour chaque élément les degrés de liberté sont découplé ; i.e, la réponse dans une direction n'est pas affectée par l'excitation dans l'autre direction.

Les caractéristiques mécaniques et géométriques sont identiques à celles déjà prises pour l'application précédente. Une perméabilité $K = 10^{-3}$ m/s correspond à $b = 1,1986 \times 10^{+6}$ N.s/m⁴. On peut déduire d'après la figure 5.10 que l'effet du type de contact est important seulement dans la partie real de la rigidité verticale en hautes fréquences, et négligeable pour les rigidités horizontale et de balancement.

b. Effet de l'enterrement

En réalité, les fondations sont toujours enterrées dans le sol. L'enterrement augmente significativement la rigidité dynamique des fondations puisque la surface de contact augmente entre la fondation et le sol. On note d'après la (figure 5.11) que les termes c_{11} , c_{22} , k_{33} et c_{33} ont une croissance presque linéaire avec le rapport E/B , et que l'enterrement affecte légèrement la partie réelle de la rigidité verticale k_{22} .

c. Effet de la perméabilité :

Les équations qu'on a obtenu pour les milieux poreux nous permettent d'étudier l'influence de la perméabilité sur la fonction d'impédance a partir de l'équation (3.8). En faisant varier la perméabilité $k = 10^{-2}$, 10^{-3} et 10^{-4} correspondent a $b = 1,1989 \times 10^{+5}$, $1,1989 \times 10^{+6}$ et $1,1989 \times 10^{+7}$ respectivement. Les rigidités dynamiques obtenues par la BEM pour divers coefficients de perméabilité sont obtenues dans la figure 5.12.

Nous remarquons que l'augmentation de la perméabilité diminue la rigidité de la fondation aux hautes fréquences, notamment pour les parties réelles des modes horizontal et de balancement, et les parties imaginaires des modes vertical et de balancement.

d. Effet du degré de porosité :

A partir des recherches géophysique, il y a plusieurs relation empirique et théorique ont été proposées pour déduire la relation entre la porosité et les caractéristiques géologique du matériau. Dans notre étude, nous avons choisi un type de sol de nature gréseuse avec une relation linéaire entre la porosité et les modules d'incompressibilité proposée par Ch-Hsin Lin, et Trifunac (2005).

Pour cela nous avons les différentes valeurs de n suivant : $n=0.1, 0.3$ et 0.34 sont des porosité correspond aux modules d'élasticité $G = 12030, 2866$ et 1010 MPa respectivement pour un coefficient de poisson $\nu=0.3$ et un module de compressibilité de fluide $K_f=2000$ MPa, la densité volumique des grains : $\rho_s=2650$ kg. m⁻³ et du fluide est $\rho_f=1000$ kg. m⁻³ La figure 5.13 montre que l'effet de la porosité influe seulement sur la partie réelle et imaginaire de l'impédance verticale, cet effet peut être négligé dans les fonctions d'impédance horizontal et de balancement.

e. Effet du degré de saturation:

On peut trouvé des sols dans des états partiellement saturés, donc il est important d'évaluer l'influence de degré de saturation sur la fonction d'impédance d'une fondation filante. Pour cela on s'est proposer de voir l'effet de degré de saturation S_r , qu'il prend les valeur de 100%, 99% et de 95%, avec une porosité $n = 0.3$, et un coefficient de poisson $\nu = 0.3$. Les autres caractéristiques mécanique sont les même que dans l'application précédente. De la figure 5.14, nous déduisons que l'effet de la saturation est négligeable pour les fonctions d'impédance horizontal et de balancement. La fonction d'impédance verticale est affectée sensiblement par le degré de saturation.

5.5.3.2 Fondation filante reposant sur un profil de sol surmontant un substratum :**a. Effet de l'épaisseur de la couche:**

Pour analyser cet effet, nous avons proposé une géométrie comme celle dans la figure 5.7 La figure 5.15 présente la rigidité dynamique vertical et horizontal et de balancement pour une couche poro-élastique surmontant un substratum rigide avec les coefficient $h/B = 2, 4, 8, \infty$ (demi-espace).

Les coefficients de rigidité verticale et de balancement tendent vers les valeurs de coefficients de rigidité correspondant à un demi-espace, et ce avec l'augmentation de l'épaisseur de la couche.

La figure 5.15 montre que les coefficients de rigidité horizontale ont un comportement oscillatoire autour de la solution du demi-espace, les amplitudes et les longueurs d'ondes de cette oscillation diminuent avec l'augmentation de l'épaisseur de la couche.

b. Effet de la perméabilité :

L'effet de la perméabilité sur les fondations reposant sur un profil de sol a été étudié dans cette section (Figure 5.7)

Les résultats obtenus pour les différentes valeurs de k et pour un rapport ($h/B = 2$) sont présentés dans la figure 5.16

Nous déduisons que l'effet de la perméabilité est relativement important par rapport à l'effet obtenu pour une fondation reposant sur un demi-espace.

c. Effet de la porosité :

L'effet de la porosité sur la rigidité d'une fondation reposant sur un profil de sol poro-élastique surmontant un substratum rigide a été fait dans cette étude. Pour ce, nous avons pris les valeurs de la porosité n suivantes : $n=0.1$, $n=0.3$, $n=0.34$, correspondant aux modules d'élasticité $G=12030$, 2866 et 1010 MPa respectivement

La figure 5.17 montre que l'augmentation de la porosité peut affecter sensiblement les valeurs de la partie réelle et imaginaire des coefficients de la rigidité notamment pour les composantes horizontale et verticale. Il est bien de noter que cet effet est plus accentué dans les hautes fréquences.

d. Effet de la saturation :

Pour étudier l'effet de la saturation nous avons opté pour une fondation filante sur un profil de sol surmontant un substratum rigide avec un rapport $h/B=2$.

Le degré de saturation prend les valeurs suivantes de $Sr=100\%$, $Sr=99\%$ et $Sr=95\%$ avec une porosité $n=0.3$

La figure 5.18 montre que pour une légère diminution du degré de saturation en dessous de la saturation complète affecte la rigidité de la fondation notamment pour les composantes verticale et de balancement, cet effet est plus accentué dans les hautes fréquences.

En comparant les résultats de l'effet de la saturation sur une fondation reposant sur un demi-espace avec ceux d'une fondation sur une couche surmontant un substratum rigide,

nous concluons que l'effet de la saturation est plus important pour un profil de sol surmontant un substratum que pour un demi-espace.

e. Effet de la rigidité du demi espace élastique G' :

Si le substratum est considéré flexible, cas le plus réaliste, le comportement de la fondation sera affecté en plus, par l'interaction mutuelle entre la couche du sol poro-élastique et le demi espace élastique.

Pour apprécier l'influence de la rigidité du substratum élastique pour un profil de sol avec un épaisseur $h = 2B$ ($h/B = 2$) sur les fonctions d'impédance, nous supposons que le demi espace élastique a pour module d'élasticité G' les valeurs suivantes : 10^7 , 10^8 , 10^9

D'après la figure 5.19, on déduit que le module d'élasticité peut influencer significativement les coefficients de rigidité. Ces coefficients tendent vers les solutions d'un substratum rigide avec l'augmentation du module d'élasticité du demi espace.

Conclusion :

Dans ce chapitre, après une bref définition et interprétation des fonctions d'impédance, nous avons développé une formulation matricielle pour le calcul de la réponse dynamique des fondations filantes rigides superficielles et enterrées dans un demi-espace poro-élastique ou bien dans un profile de sol de sol poro-élastique surmontant un substratum.

Un code de calcul a été développé à cet égard. Deux paramètres influent significativement sur la précision des résultats. Ce sont la taille des éléments et la discrétisation du champ libre. Une fois les deux paramètres cernés pour donner des résultats satisfaisants, on a procédé à la validation des résultats obtenus en les comparant à des résultats publiés.

Pour le cas d'une fondation sur un profile de sol surmontant un substratum, nous avons étudié l'effet de l'épaisseur de la couche ainsi que l'effet de la rigidité du substratum supposé élastique.

Nous avons aussi fourni une étude paramétrique portant sur l'effet de certains paramètres mécaniques du sol tels que la perméabilité et la porosité ainsi que le degré de saturation sur les coefficients de rigidité de la fondation. Ces paramètres ont un effet plus important pour le cas d'une couche surmontant un substratum que celle d'un demi-espace.

Dans le chapitre suivant, nous étudions avec détail la réponse dynamique des fondations rigides sous excitations sismique modélisées par l'incidence oblique des ondes de différents types tels que les onde P et SV dans un milieu poro-élastique, en utilisant la méthode des éléments de frontière.

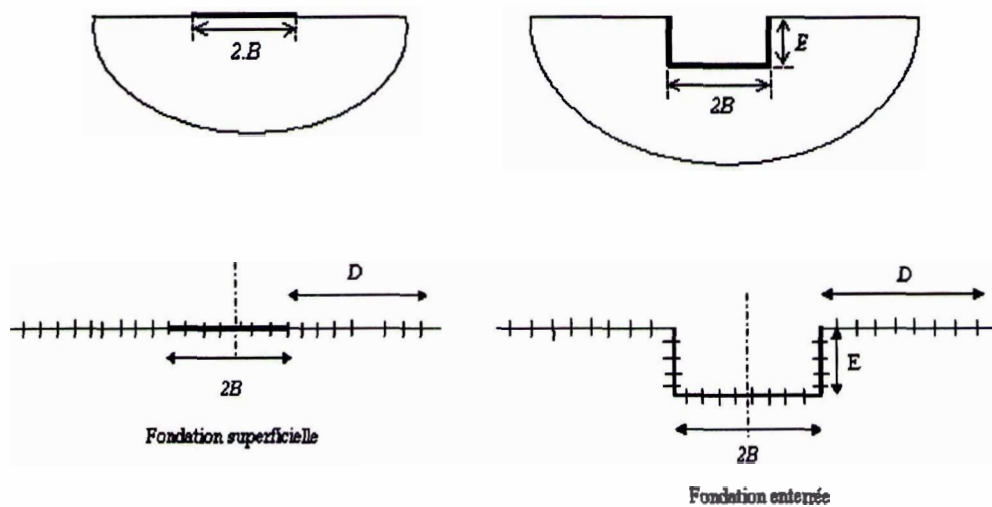


Figure 5.6 fondations superficielles et enterrées et leur discrétisation.

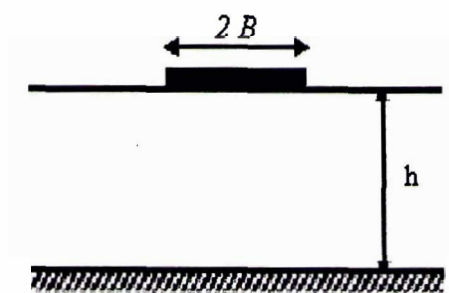


Figure 5.7 fondation filante sur une couche de sol poro-élastique

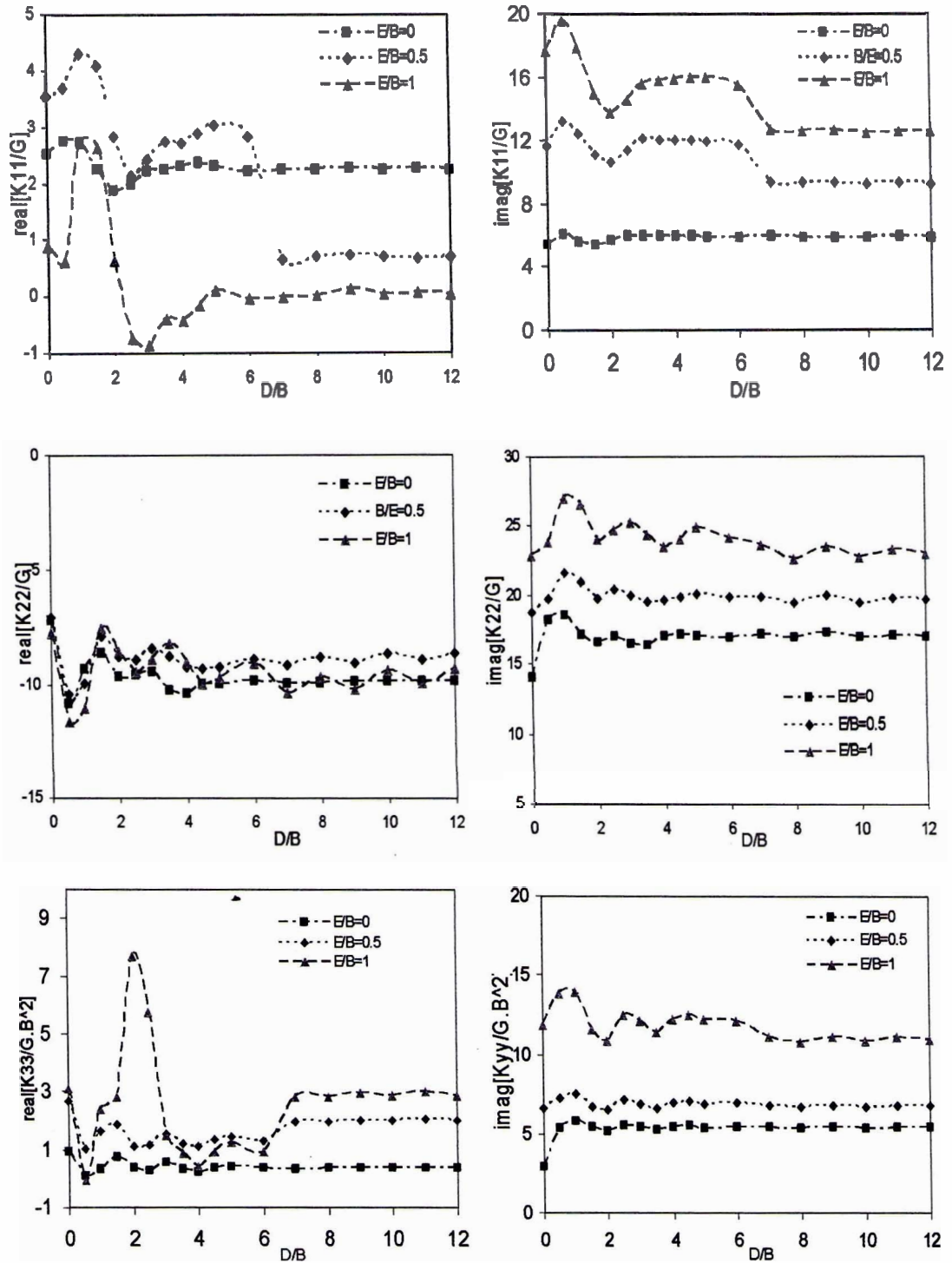


Figure 5.8 Effet de la discrétisation du champ libre sur les fondations superficielles et enterrées

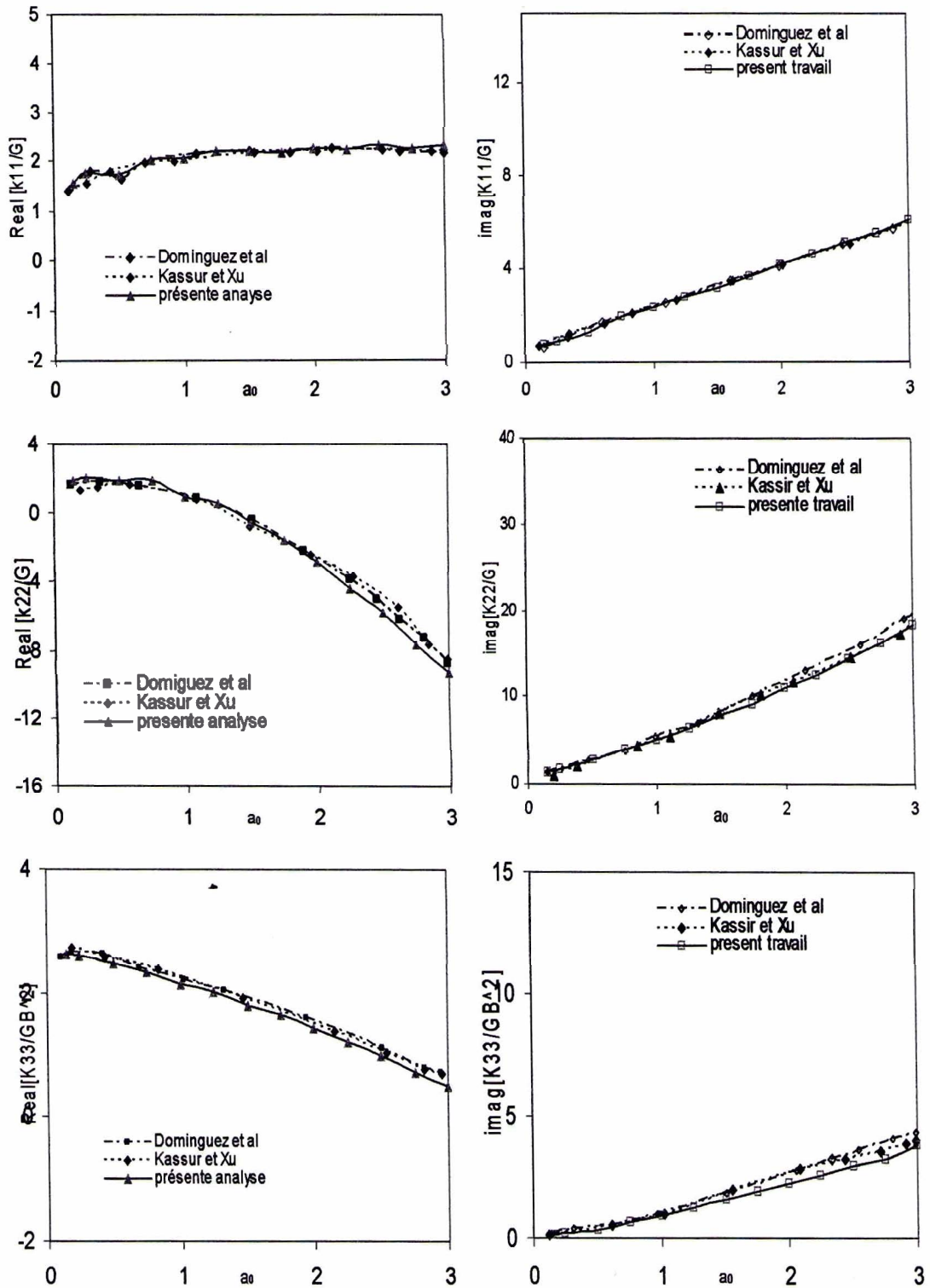


Figure 5.9 Comparaison avec les résultats publiés pour un contact perméable relâché (Fondation superficielle)

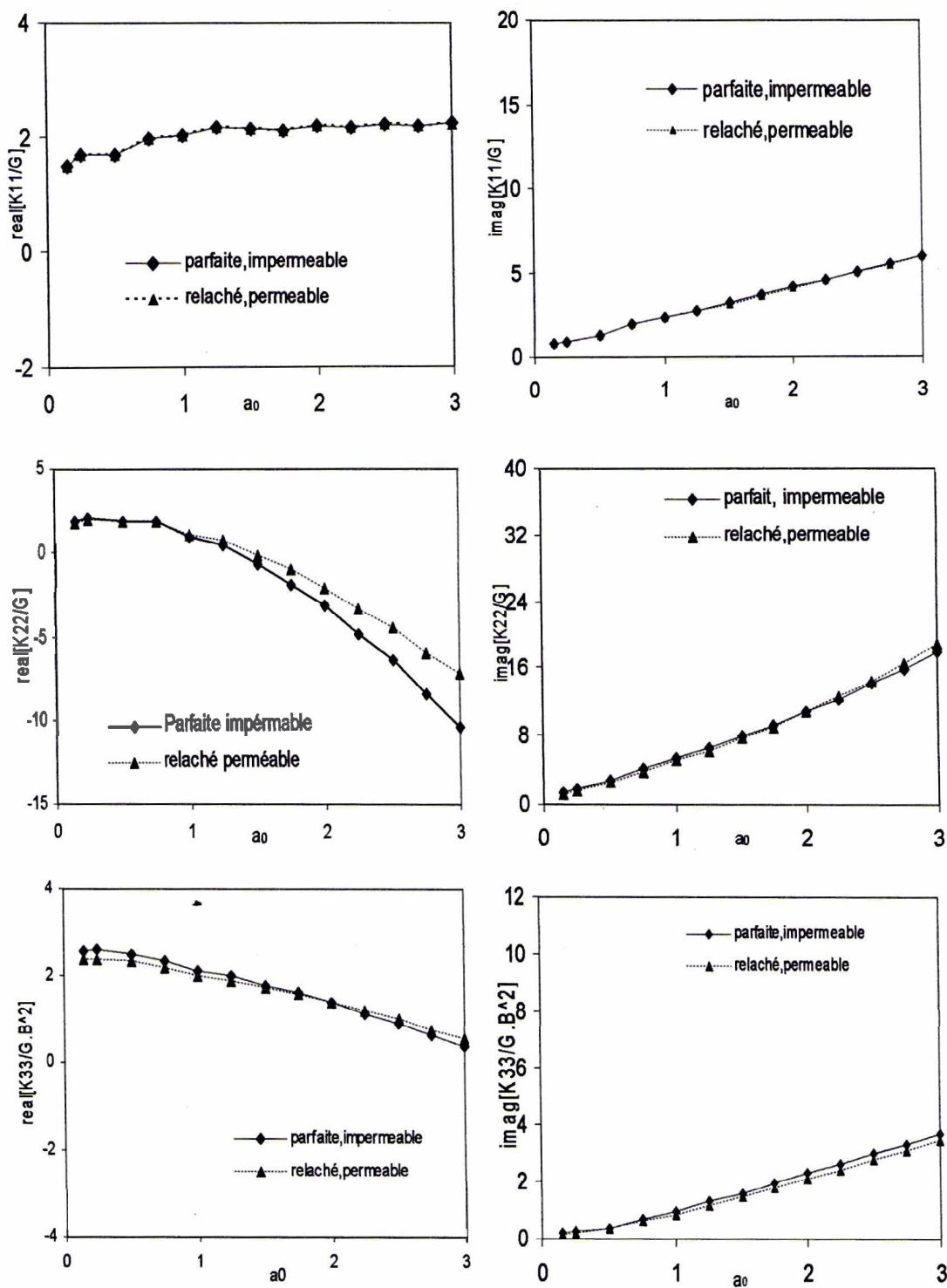


Figure 5.10 effet du type de contact

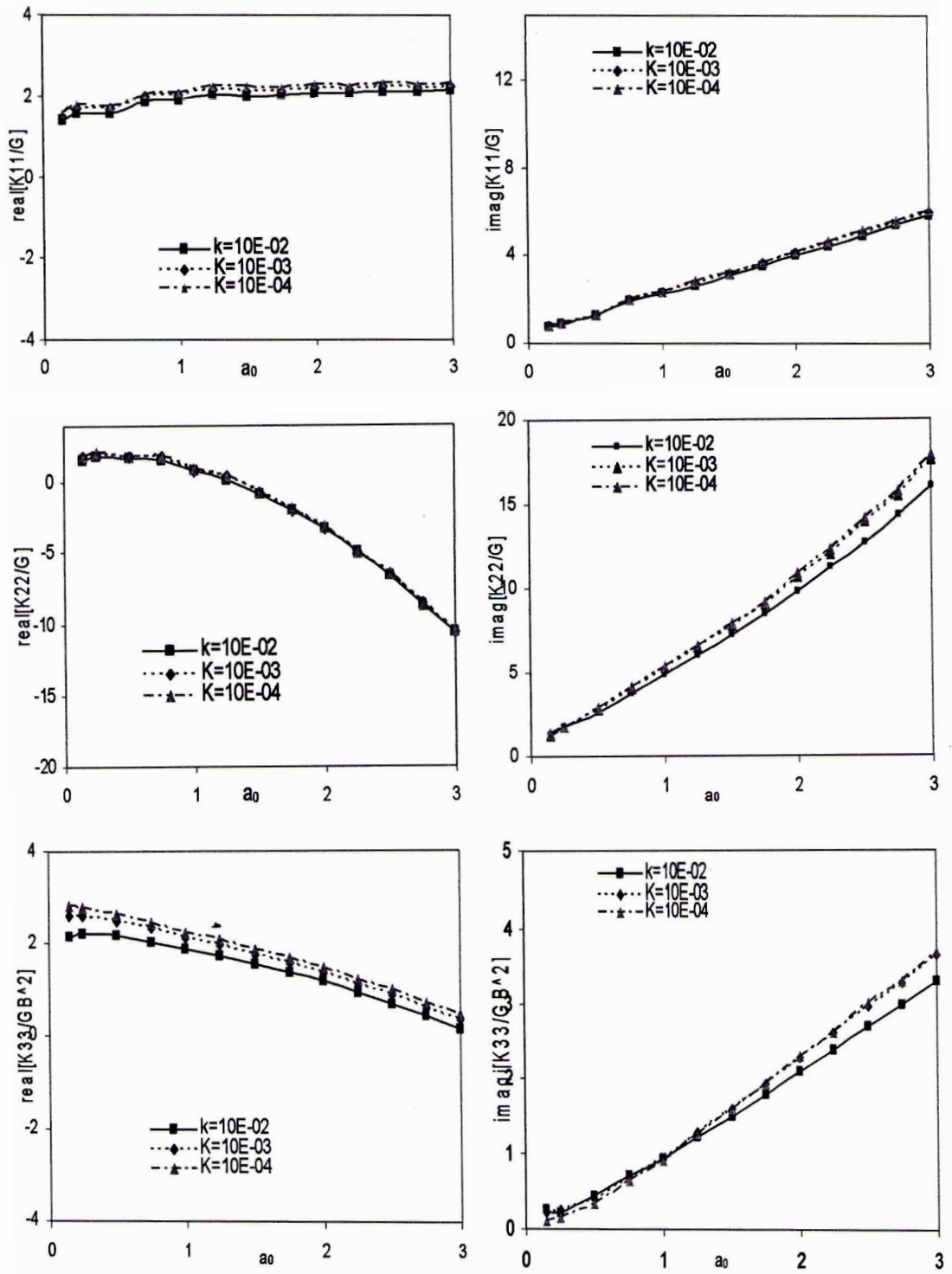


Figure 5.11 Effet de la perméabilité

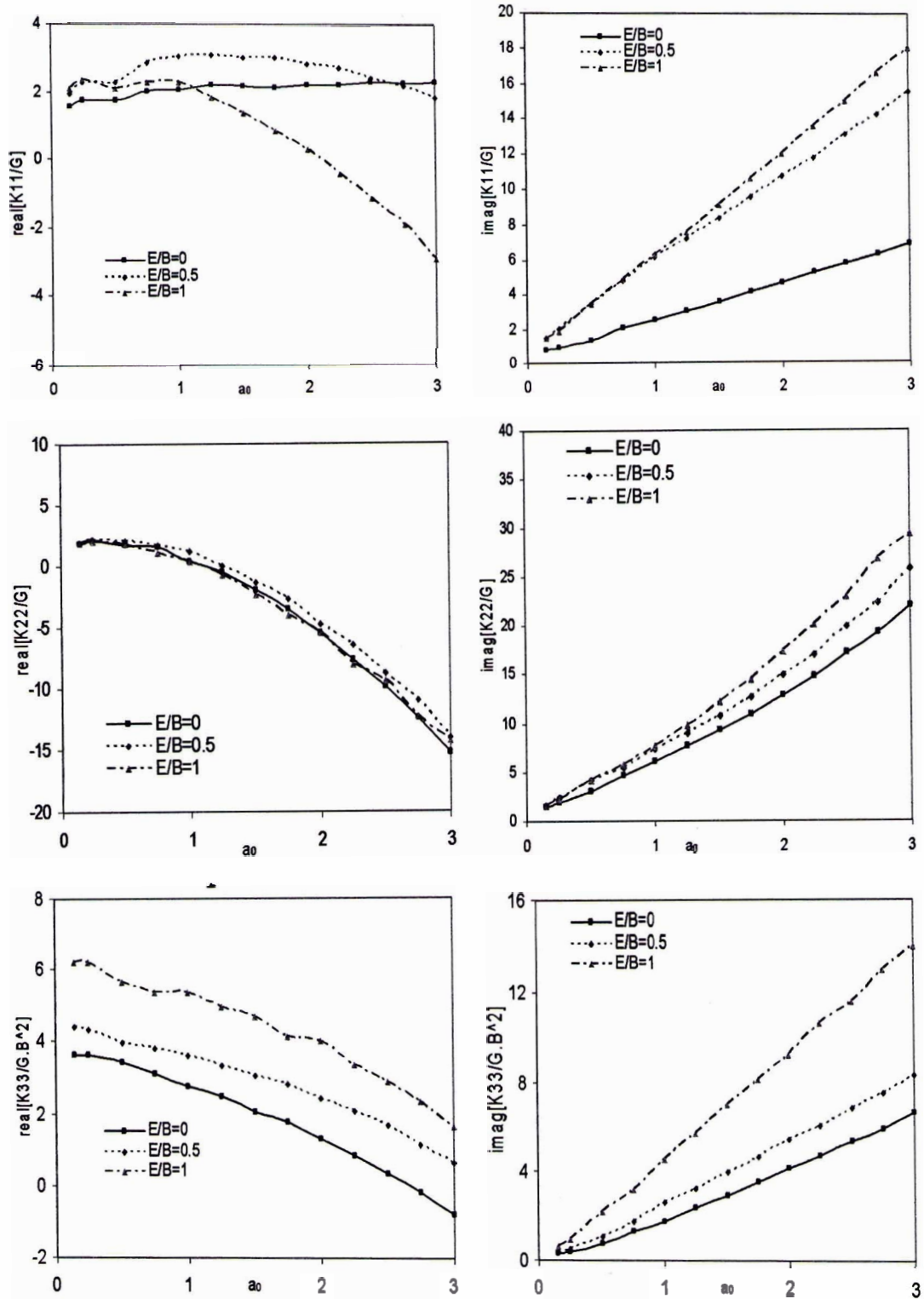


Figure 5.12 Effet de l'enterrement

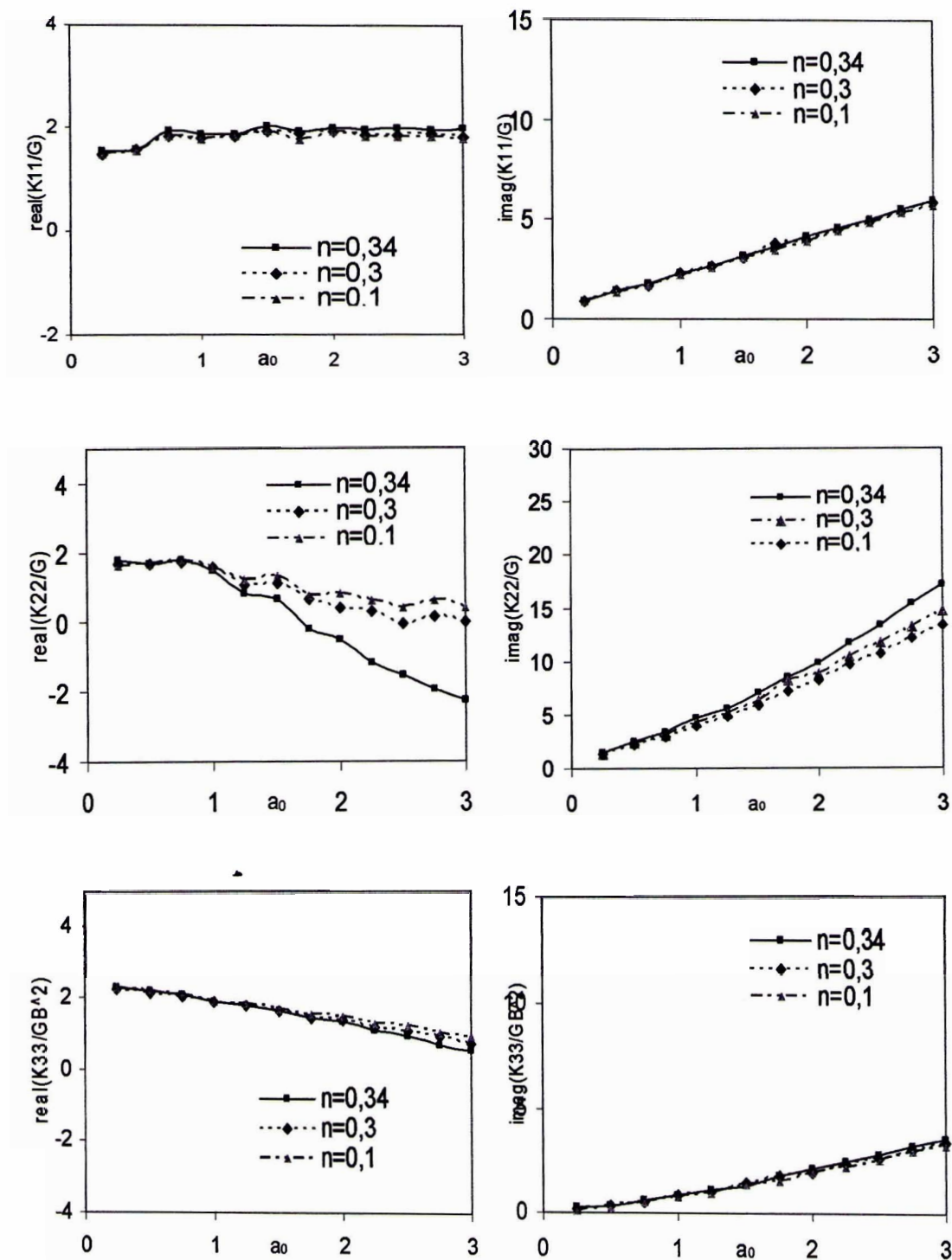


Figure 5.13 Effet de la porosité

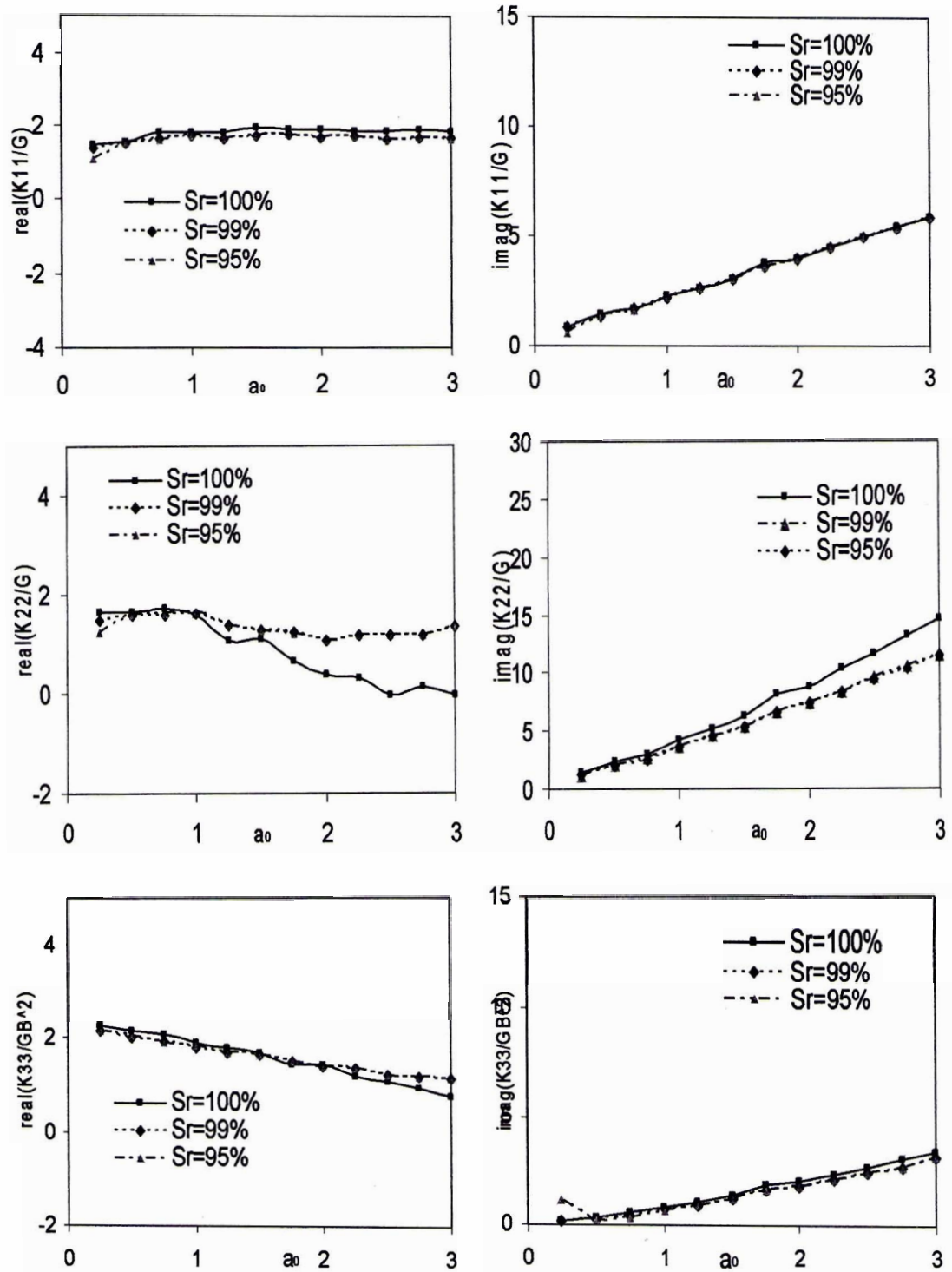


Figure 5.14 Effet du degré de saturation

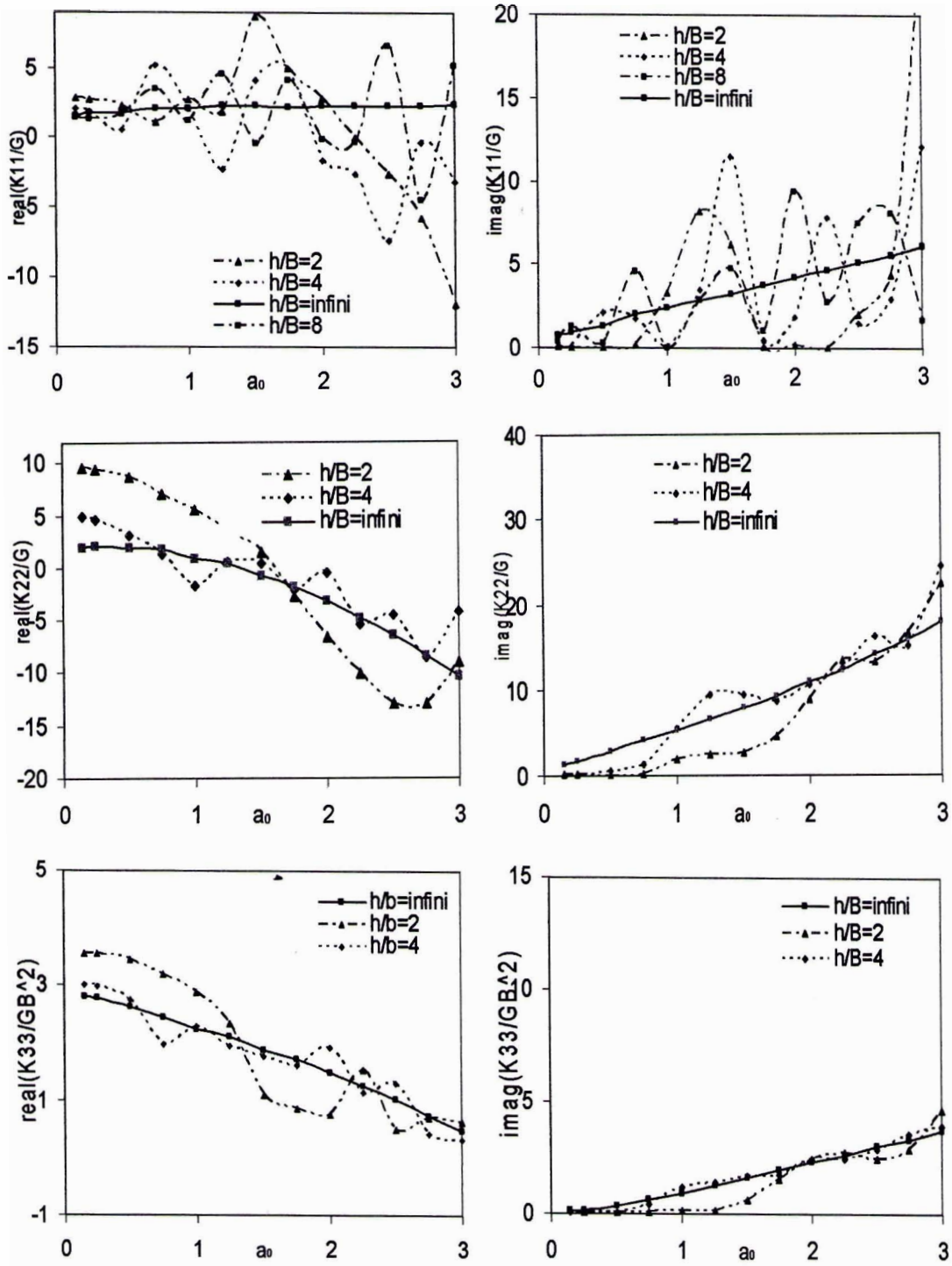


Figure 5.15. Effet de l'épaisseur de la couche

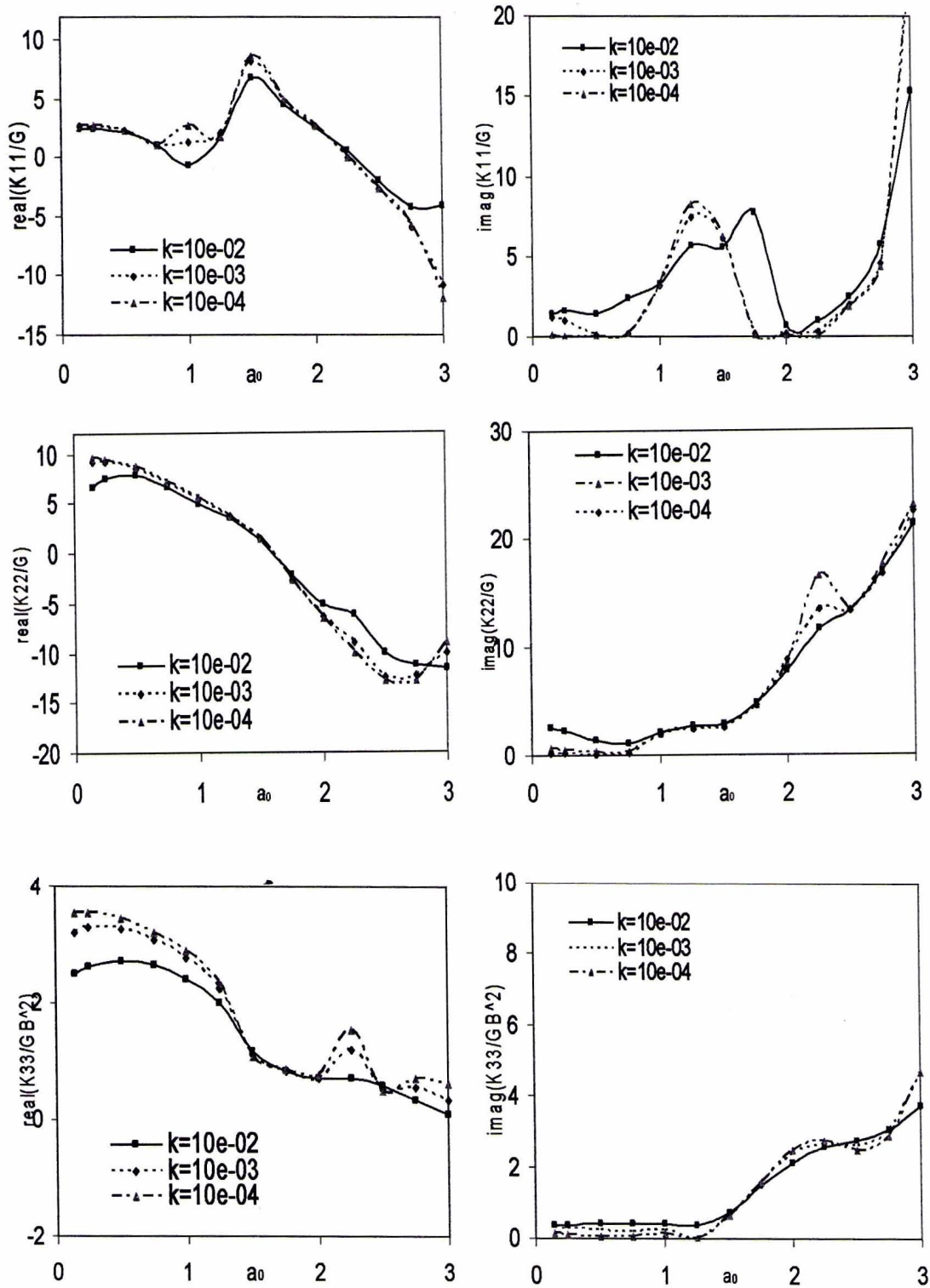


Figure 5.16. Effet de la perméabilité pour une fondation filante reposant sur un profil de sol

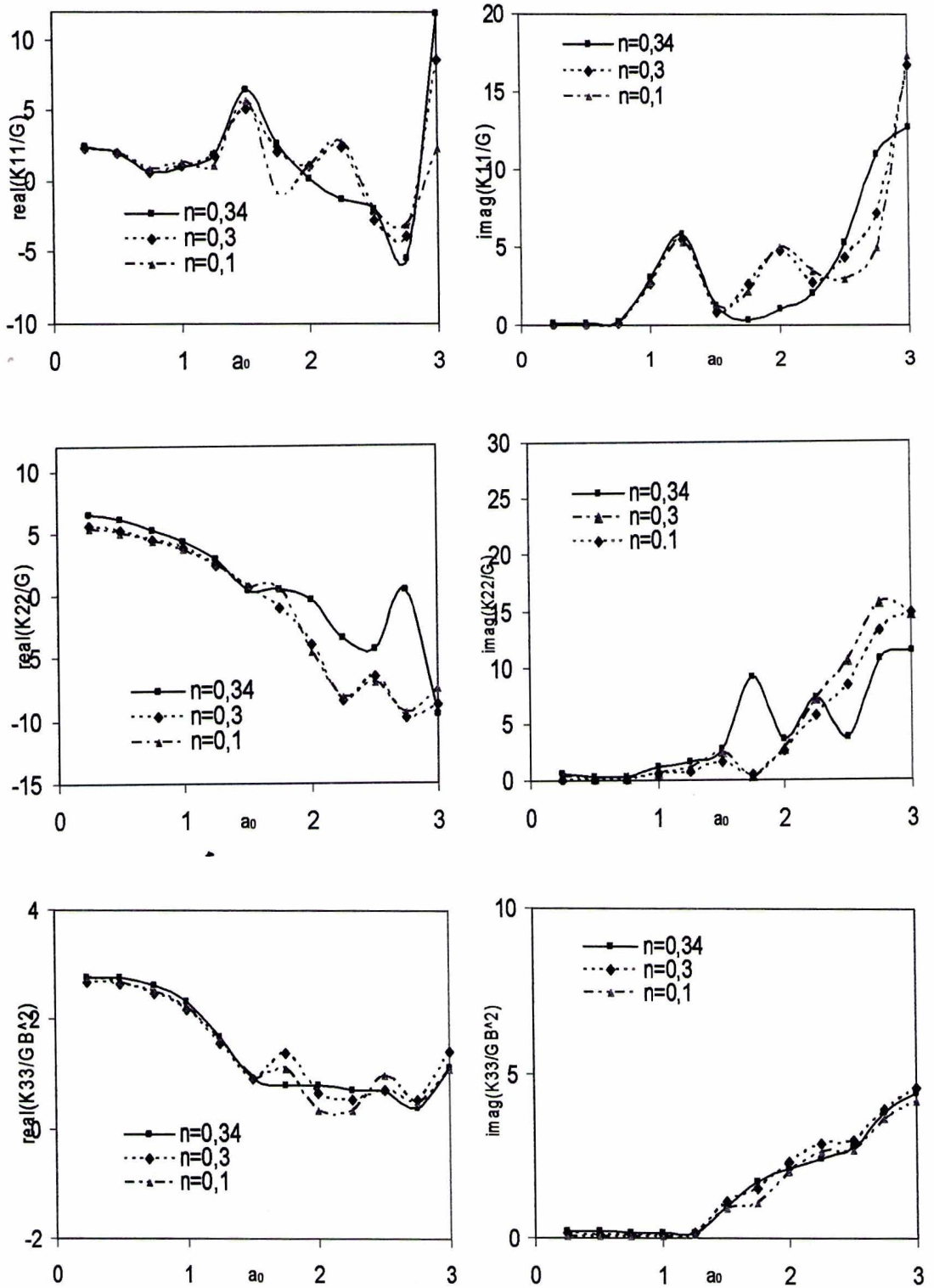


Figure 5.17 Effet de la porosité pour une fondation filante reposant sur un profil de sol

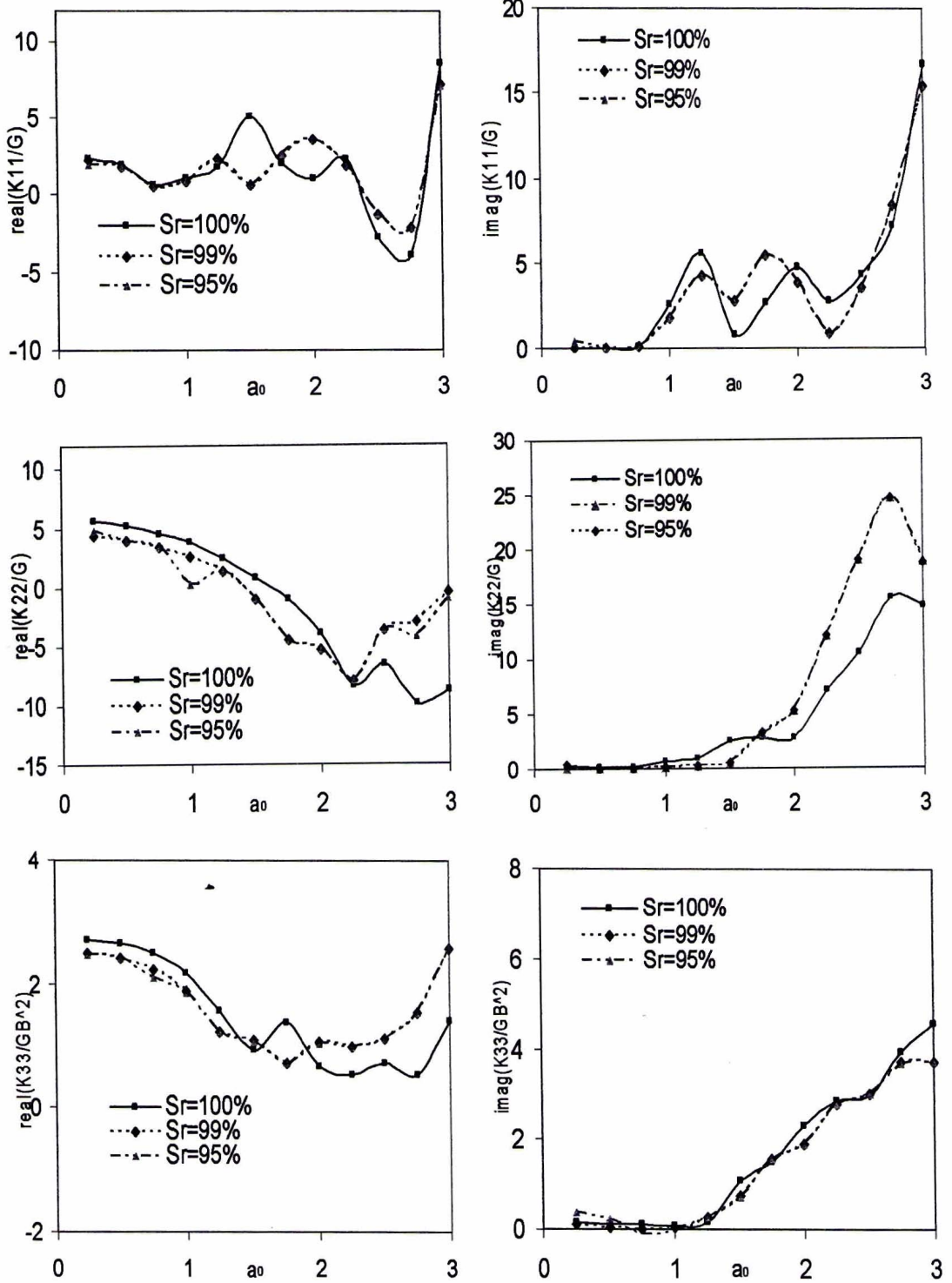


Figure 5.18 Effet du degré de saturation pour une fondation filante reposant sur un profil de sol

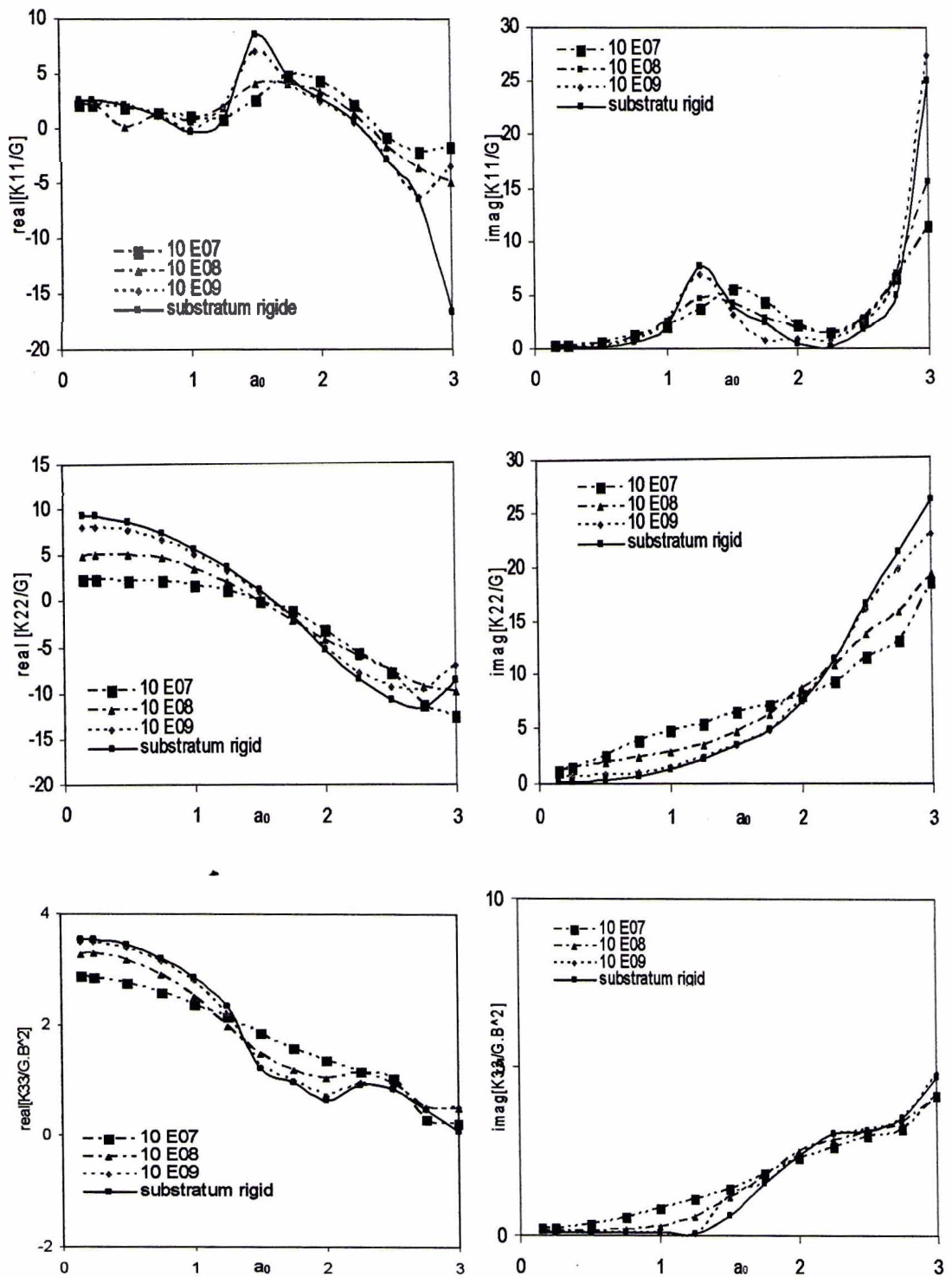


Figure 5.19 Effet de la rigidité du substratum pour un rapport $h/B=2$

ANALYSE DE LA REPONSE SISMIQUE DES FONDATIONS FILANTES

6.1 Introduction

L'étude d'un problème d'interaction sol-fondation peut se limiter à la détermination des fonctions d'impédance si les charges considérées sont extérieures (machine vibrante, vent...); or les charges les plus destructives pour des structures importantes restent les séismes (charge interne). De ce fait, le traitement de la réponse sismique des fondations s'est imposé.

Le mouvement résultant de l'action superposée des ondes sismiques parvenant au point considéré est extrêmement complexe.

Il s'agit d'un mouvement tridimensionnelle 'chaotique',

Il varie d'un point à l'autre de la surface du sol,

Il est influencé par les caractéristiques géométriques de la fondation :
interaction cinématique.

Pour des raisons de simplicité, les charges sismiques sont souvent considérées comme résultant d'un mouvement de propagation verticale des ondes. Cette hypothèse est fondée dans le cas où le foyer est suffisamment profond, où le milieu présente plusieurs couches molles ayant polarisé les ondes. En revanche, elle n'est plus valable dans la situation contraire du sol dur et de foyer peu profond où les ondes obliques et de surface contribuent de façon non négligeable au mouvement en champ libre.

La prise en compte de l'interaction cinématique d'une manière explicite dans la conception parasismique reste une difficulté majeure à surmonter dans le futur proche (des solutions analytiques simplifiées sont quasiment rare). Il est utile de noter que la non prise en compte de l'interaction cinématique dans le calcul parasismique des ouvrages néglige les effets importants par cette dernière à savoir la torsion, le balancement, etc. Dans ce qui suit, nous avons évalué l'interaction cinématique par la méthode des éléments de frontière d'une fondation filante rigide surfacique ou enterré dans un sol poro-élastique saturé, soumise à des ondes sismiques incidentes P_1 et SV .

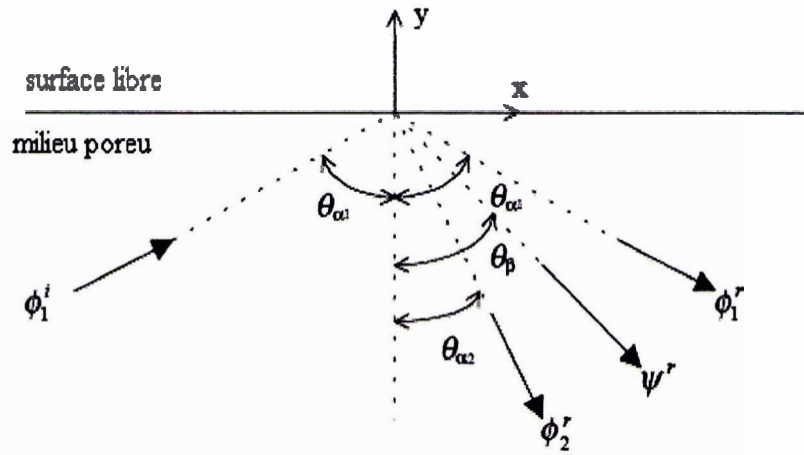
6.2 Réflexion des ondes planes (P_1 et SV) à la surface d'un demi-espace poro-élastique

6.2.1 Onde incidente P_1 :

Lorsqu'une onde sismique heurte une surface de discontinuité, il se produit des phénomènes de réflexion et de réfraction semblables à ceux rencontrés en optique. La loi de Snell permet de déterminer les angles des directions de propagation des ondes réfléchies :

$$V_0 = \frac{V_\beta}{\sin \theta_\beta} = \frac{V_{\alpha 1}}{\sin \theta_{\alpha 1}} = \frac{V_{\alpha 2}}{\sin \theta_{\alpha 2}} \quad (6.1)$$

Considérant un demi-espace poro-élastique soumis à une onde P_1 plane avec l'angle d'incidence $\theta_{\alpha 1}$ (figure 6.1.), nous supposons que l'onde est harmonique et pour des raisons simplificatrices, nous omettons les termes de $e^{-i\omega t}$.

Figure 6.1 un demi espace poro-elastique soumis à une onde P_1 plane

Le potentiel de l'onde P_1 incident est :

$$\phi_1^i = a_0 e^{ik_{\alpha 1}(x \sin \theta_{\alpha 1} + y \cos \theta_{\alpha 1})} \quad (6.2a)$$

les potentiels réfléchis sont:

$$\phi_1^r = a_1 e^{ik_{\alpha 1}(x \sin \theta_{\alpha 1} - y \cos \theta_{\alpha 1})} \quad (6.2b)$$

$$\phi_2^r = a_2 e^{ik_{\alpha 2}(x \sin \theta_{\alpha 2} - y \cos \theta_{\alpha 2})} \quad (6.2c)$$

$$\psi^r = b e^{ik_{\beta}(x \sin \theta_{\beta} - y \cos \theta_{\beta})} \quad (6.2d)$$

Avec :

$$k_0 = k_{\beta} \sin \theta_{\beta} = k_{\alpha 1} \sin \theta_{\alpha 1} = k_{\alpha 2} \sin \theta_{\alpha 2}$$

$$k_{\alpha, j} = \frac{\omega}{V_{\alpha, j}}$$

$k_{\alpha, j}$: sont les nombres d'onde associée a l'onde P_1, P_2 .

$$k_{\beta} = \frac{\omega}{V_{\beta}}$$

k_{β} : est le nombre d'onde associée a l'onde S

6.2.2 Onde incidente SV :

Considérant un demi-espace poro-élastique soumis à une onde plane SV avec l'angle d'incidence θ_β (figure 6.2), nous supposons que l'onde est harmonique et pour des raison simplificatrice, nous omettons les termes de $e^{-i\omega t}$.

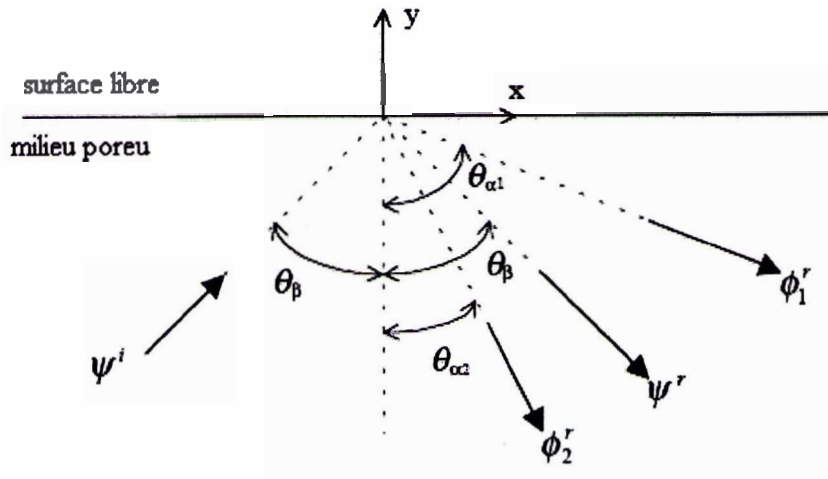


Figure 6.2 un demi espace poro-élastique soumis à une onde SV plane

Le potentiel de l'onde SV incident est :

$$\psi^i = b_0 e^{ik_\beta(x \sin \theta_\beta + y \cos \theta_\beta)} \tag{6.3a}$$

Et les potentiels réfléchis sont:

$$\phi_1^r = a_1 e^{ik_{\alpha 1}(x \sin \theta_{\alpha 1} - y \cos \theta_{\alpha 1})} \tag{6.3b}$$

$$\phi_2^r = a_2 e^{ik_{\alpha 2}(x \sin \theta_{\alpha 2} - y \cos \theta_{\alpha 2})} \tag{6.3c}$$

$$\psi^r = b e^{ik_\beta(x \sin \theta_\beta - y \cos \theta_\beta)} \tag{6.3d}$$

Il est souvent constater que la vitesse de l'onde P_1 est plus grande que la vitesse de l'onde S ($V_{\alpha 1} > V_\beta$).

$$\sin \theta_{\alpha 1} = (V_{\alpha 1} / V_\beta) \sin \theta_{\alpha 1} > 1.$$

Nous avons donc un angle de réflexion complexe.

Pour cela, on appelant θ_{cr1} le premier ongle critique ; $\theta_{cr1} = \sin^{-1}(V_\beta / V_{\alpha 1})$.

-Dans les cas rare ou $V_{\alpha 2} > V_\beta$, On peut définir aussi un deuxième angle critique

$$\theta_{\alpha 2} = \sin^{-1}(V_{\beta}/V_{\alpha 2}).$$

On réécrit les équations précédentes comme suit :

$$\psi^i = b_{\rho} e^{ik_{\rho}x + \nu_{\rho}y} \quad (6.4a)$$

$$\phi_1^r = a_1 e^{ik_{\alpha 1}x - \nu_{\alpha 1}y} \quad (6.4b)$$

$$\phi_2^r = a_2 e^{ik_{\alpha 2}x - \nu_{\alpha 2}y} \quad (6.4c)$$

$$\psi^r = b e^{ik_0x - \nu_{\beta}y} \quad (6.4d)$$

avec :

$$k_0 = k_{\beta} \sin \theta_{\beta} = k_{\alpha 1} \sin \theta_{\alpha 1} = k_{\alpha 2} \sin \theta_{\alpha 2}$$

On note :

$$\nu_{\beta} = ik_{\beta} \cot \theta_{\beta} = i \sqrt{k_{\beta}^2 - k_0^2}$$

$$\nu_{\alpha 1} = ik_0 \cot \theta_{\alpha 1} = \begin{cases} i \sqrt{k_{\alpha 1}^2 - k_0^2} & \text{Lorsque } V_0 \geq V_{\alpha 1} \\ -\sqrt{k_0^2 - k_{\alpha 1}^2} & \text{Lorsque } V_0 < V_{\alpha 1} \end{cases}$$

$$\nu_{\alpha 2} = ik_0 \cot \theta_{\alpha 2} = \begin{cases} i \sqrt{k_{\alpha 2}^2 - k_0^2} & \text{Lorsque } V_0 \geq V_{\alpha 2} \\ -\sqrt{k_0^2 - k_{\alpha 2}^2} & \text{Lorsque } V_0 < V_{\alpha 2} \end{cases}$$

6.3 Calcul des contraintes et des déplacements en champ libre

Pour étudier l'interaction dynamique sol-fondation par la BEM, la solution peut être divisée en deux étapes. D'abord en utilisant le mouvement en champ libre (son fondation) due à l'incidence des ondes sismiques, les déplacements et les contraintes correspondants (u^* et p^*) sur les frontières imaginaires de la fondation (fig 6.3) sont calculés comme suit :

6.3.1 Réponse d'un demi-espace poro-élastique

Dans notre travail nous utilisons les conditions de frontière ouverte (drainé). Dans le cas d'une propagation d'ondes incidentes P_1 ou SV , trois potentiels satisferont l'équation de mouvement. Les déplacements et les contraintes peuvent être exprimés en fonction de ces trois potentiels ψ , ϕ_1 , ϕ_2

- Les déplacements u_x , u_y :

$$\theta_{\alpha 2} = \sin^{-1}(V_{\beta}/V_{\alpha 2}).$$

On réécrit les équations précédentes comme suit :

$$\psi^i = b_0 e^{ik_0 x + \nu_{\beta} y} \quad (6.4a)$$

$$\phi_1^r = a_1 e^{ik_{\alpha 1} x - \nu_{\alpha 1} y} \quad (6.4b)$$

$$\phi_2^r = a_2 e^{ik_{\alpha 2} x - \nu_{\alpha 2} y} \quad (6.4c)$$

$$\psi^r = b e^{ik_0 x - \nu_{\beta} y} \quad (6.4d)$$

avec :

$$k_0 = k_{\beta} \sin \theta_{\beta} = k_{\alpha 1} \sin \theta_{\alpha 1} = k_{\alpha 2} \sin \theta_{\alpha 2}$$

On note :

$$\nu_{\beta} = ik_{\beta} \cot \theta_{\beta} = i \sqrt{k_{\beta}^2 - k_0^2}$$

$$\nu_{\alpha 1} = ik_0 \cot \theta_{\alpha 1} = \begin{cases} i \sqrt{k_{\alpha 1}^2 - k_0^2} & \text{Lorsque } V_0 \geq V_{\alpha 1} \\ -\sqrt{k_0^2 - k_{\alpha 1}^2} & \text{Lorsque } V_0 < V_{\alpha 1} \end{cases}$$

$$\nu_{\alpha 2} = ik_0 \cot \theta_{\alpha 2} = \begin{cases} i \sqrt{k_{\alpha 2}^2 - k_0^2} & \text{Lorsque } V_0 \geq V_{\alpha 2} \\ -\sqrt{k_0^2 - k_{\alpha 2}^2} & \text{Lorsque } V_0 < V_{\alpha 2} \end{cases}$$

6.3 Calcul des contraintes et des déplacements en champ libre

Pour étudier l'interaction dynamique sol-fondation par la BEM, la solution peut être divisée en deux étapes. D'abord en utilisant le mouvement en champ libre (son fondation) due à l'incidence des ondes sismiques, les déplacements et les contraintes correspondants (u^* et p^*) sur les frontières imaginaires de la fondation (fig 6.3) sont calculés comme suit :

6.3.1 Réponse d'un demi-espace poro-élastique

Dans notre travail nous utilisons les conditions de frontière ouverte (drainé). Dans le cas d'une propagation d'ondes incidentes P_1 ou SV , trois potentiels satisfèrent l'équation de mouvement. Les déplacements et les contraintes peuvent être exprimés en fonction de ces trois potentiels ψ , ϕ_1 , ϕ_2

- Les déplacements u_x , u_y :

$$u_x = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \quad (6.8a)$$

$$u_y = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (6.8b)$$

- Les contraintes τ_{yy} et τ_{xy} et τ_{xx} dans le solide, et la contrainte σ dans le fluide sont:

$$\tau_{yy} = \sum_{j=1}^2 \left((\lambda + f_j Q) \nabla^2 \phi_j + 2\mu \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \right) - 2\mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \quad (6.9)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{j=1}^2 \left(2\mu \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} \right) + \mu \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (6.10)$$

$$\tau_{xx} = \sum_{j=1}^2 \left((\lambda + f_j Q) \nabla^2 \phi_j + 2\mu \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \quad (6.11)$$

$$\sigma = Q \nabla^2 \phi + R \nabla^2 \Phi = \sum_{j=1}^2 (Q + f_j R) \nabla^2 \phi_j \quad (6.12)$$

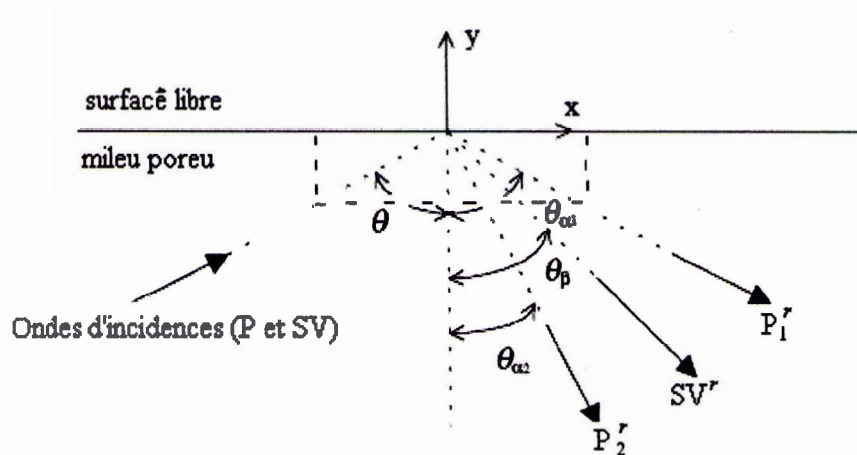


Figure 6.3 la propagation des ondes dans un demi espace poreu-élastique

Les expressions détaillées des déplacements et des contraintes, sont définies dans l'annexe A3.1 et A3.2.

Le calcul des contraintes et des déplacements au niveau de la frontière imaginaire de la fondation se fait comme suit (figure 6.3)

$$u^* = \begin{cases} u_x^* \\ u_y^* \end{cases} \quad (6.13)$$

$$t_i^* = \sigma_{ij} n_j \quad (6.14)$$

Avec σ_{ij} est le tenseur des contraintes suivant :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

6.3.2 Calcul des amplitudes

Les conditions de frontière seront employées pour déterminer les coefficients inconnus d'amplitude (a_0, a_1, a_2, b). Dans ce travail nous avons étudié les réponses pour le cas des frontières drainés et ouvertes (perméable).

- **Onde P_1 :**

Ce cas est étudié par Deresiewicz (1960). Appliquant la condition des frontières ouvertes illustrée dans le tableau 3.1. En utilisant les coordonnées cartésiennes, nous pouvons étudier les conditions des frontières comme suit :

$$\left. \begin{matrix} \tau_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \sigma \end{matrix} \right\}_{y=0} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad (6.16)$$

Substituant les équations 6.9, 6.10 et 6.12 dans Eq 6.16, les équations peuvent être simplifiées dans l'Eq 6.17.

$G_{ij,k}$ sont définies dans tableau A3.1 de l'annexe A3.

$$\begin{bmatrix} G_{11,1} & G_{11,2} & -G_{12} \\ -G_{21,1} & -G_{21,2} & G_{22} \\ G_{61,1} & G_{61,2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{Bmatrix} = -a_0 \begin{Bmatrix} G_{11,1} \\ G_{21,1} \\ G_{61,1} \end{Bmatrix} \quad (6.17)$$

Onde SV :

Ce cas est étudié par Deresiewicz (1960). Appliquant la condition des frontières ouvertes illustrée dans le tableau 3.1. En utilisant les coordonnées cartésiennes, nous avons étudié les conditions de frontière comme suit :

$$\left. \begin{matrix} \tau_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \sigma \end{matrix} \right\}_{y=0} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad (6.18)$$

Substituant les équations 6.9, 6.10 et 6.12 dans Eq 6.18, les équations peuvent être simplifiées dans l'Eq 6.19.

$G_{j,k}^*$ sont définies dans le tableau A3.1 de l'annexe A3.

$$\begin{bmatrix} G_{11,1}^* & G_{11,2}^* & -G_{12}^* \\ -G_{21,1}^* & -G_{21,2}^* & G_{22}^* \\ G_{61,1}^* & G_{61,2}^* & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{Bmatrix} = -b_0 \begin{Bmatrix} G_{12}^* \\ G_{22}^* \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

6.4 Détermination de la réponse sismique des fondations par la méthode des éléments de frontière :

Pour étudier l'interaction dynamique sol-fondation par la BEM, la solution peut être divisée en deux étapes. D'abord en utilisant le mouvement en champ libre (sans fondation) dû à l'incidence des ondes sismiques, les déplacements et les contraintes correspondants (u^* et p^*) sur les frontières imaginaires de la fondation sont calculés. Dans une deuxième étape, les équations de frontières sont résolues pour les déplacements et les contraintes incrémentaux ($u - u^*$) et ($p - p^*$) lesquels correspondent aux ondes diffractées induites par les changements sur les conditions de frontières à l'interface sol-fondation. L'équation des éléments de frontière (Eq 5.6) est utilisée pour les problèmes de diffraction d'ondes comme suit :

$$H(u - u^*) = G(p - p^*) \quad (6.20)$$

Pour tien en compte la contrainte dans le fluide σ , nous l'additionnant à la contrainte normale t_{nn}^* du sol au niveau de l'interface sol fondation, on obtient la contrainte totale p_{nn}^* comme suit:

$$p_{nn}^* = t_{nn}^* + \sigma \quad (6.21)$$

En gardant la même notation utilisée dans le chapitre 3, l'équation (6.21) peut se présenter comme suite :

$$\begin{bmatrix} H^{cc} & H^{cl} \\ H^{lc} & H^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^c - u^{c*} \\ u^l - u^{l*} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{cc} & G^{cl} \\ G^{lc} & G^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p^c - p^{c*} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

Ou encore

$$\begin{Bmatrix} p^c - p^{c*} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{cc} & D^{cl} \\ D^{lc} & D^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^c - u^{c*} \\ u^l - u^{l*} \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

$$\begin{cases} p^c - p^{c*} = D^{cc}(u^c - u^{c*}) + D^{cl}(u^l - u^{l*}) \\ 0 = D^{lc}(u^c - u^{c*}) + D^{ll}(u^l - u^{l*}) \end{cases} \quad (6.24)$$

En utilisant une procédure de condensation, l'équation 6.24 peut être écrite comme suit

$$p^c = \left(D^{cc} - D^{cl} (D^{ll})^{-1} D^{lc} \right) \times u^c - \left(D^{cc} - D^{cl} (D^{ll})^{-1} D^{lc} \right) \times u^{c*} + p^{c*} \quad (6.25)$$

En introduisant la relation force-contraintes sur l'interface sol-fondation :

$$F = T^T A p^c \quad (6.26)$$

Où A est une matrice diagonale désignant 'l'aire' de chaque élément de frontière de la fondation.

$$F = K \times u_f - \mathfrak{I} \times u^{c*} + F^* \quad (6.27)$$

Il en découle que le vecteur déplacement de la fondation en l'absence des sollicitations harmoniques ($F = 0$) est défini comme suite :(figure6.4)

$$u_f = C \times \mathfrak{I} \times u^{c*} - C \times F^* \quad (6.28)$$

Où

$$C^{-1} = K = T^{-1} \times \mathfrak{I} \quad (6.29)$$

K est la matrice d'impédance, C est la matrice de souplesse.

$\mathfrak{S} = A \left[D^{oc} - D^{cl} (D^{ll})^{-1} D^{lc} \right] T$ est la matrice des contraintes surfaciques de contact.

$F^* = T^t \times A \times q^{c*}$ est le vecteur force développé par p^* à l'interface sol-fondation.

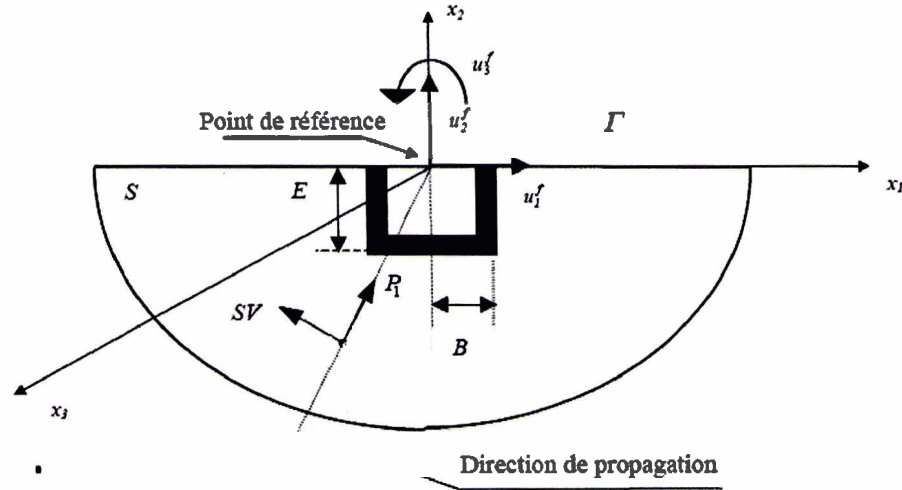


Figure 6.4 Configuration géométrique de la fondation excité par l'onde $P1$ et SV

Une procédure de normalisation consiste à diviser le déplacement rigide de la fondation (figure 6.4) par le déplacement en champ libre. Les rotations ont été multipliées par la demi-largeur de la fondation. Les fonctions normalisées obtenues constituent donc des fonctions de transfert.

$$T_h = \frac{u_{f1}}{u_{gh}} : \quad \hat{=} \text{fonction de transfert horizontal.}$$

$$T_v = \frac{u_{f2}}{u_{gv}} : \quad \text{fonction de transfert verticale.}$$

$$T_b = \frac{u_{f3} \times B}{u_{gb}} : \quad \text{fonction de transfert balancement.}$$

u_{gh}^* et u_{gv}^* : sont les déplacements horizontal et vertical en champ libre.

u_{fh} u_{fv} u_{fb} : sont les déplacements du centre de la fondation.

6.5 Présentation et analyse des résultats :

6.5.1 Effet de l'angle d'incidence :

Les fonctions de transfert entre le mouvement en surface libre et le mouvement de la fondation sont calculées dans divers angle d'incidence des différents types d'ondes. Dans notre travail, on a considéré les ondes de types P_1 et SV . Les figures 6.6 - 6.11 représentent la valeur absolue des fonctions de transfert en fonction de la fréquence adimensionnelle a_0 variant de 0 à 6. Chacune des courbes d'un même graphe représentent la fonction de transfert pour un certain d'angle d'incidence des ondes (P_1 et SV) par rapport à l'horizontal.

Un angle d'incidence de 0° traduit une propagation horizontale tandis, qu'angle d'incidence de 90° exprime une propagation verticale (figure 6.5).

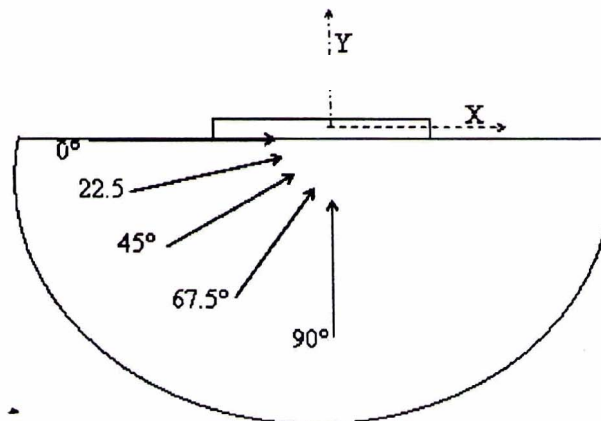


Figure 6.5 différents angles d'incidence

Les résultats observés dans les figures 6.9 - 6.11 montrent que la réduction des composantes horizontales et verticales du déplacement de la fondation par l'effet de l'onde SV est remarquable aux fréquences moyennes et élevées pour les ondes non verticales. Cette réduction est plus importante pour les ondes de faible incidence que pour les ondes de grande incidence.

L'effet des ondes P_1 sur la réponse des fondations filantes figure 6.6 - 6.8 est presque le même qualitativement que l'effet des ondes SV .

Quantitativement, la réduction des déplacements de translation est moins accentuée que celle engendrée par le passage des ondes SV . La réduction est relativement lente avec l'augmentation des fréquences. Nous observons également pour les fondations superficielles un développement important du balancement aux fréquences supérieures.

Pour les fondations enterrées $E/B=1$, nous remarquons une augmentation importante du déplacement horizontal engendrée par le passage de l'onde SV aux fréquences moyenne et élevée. Nous observons également un développement important du balancement pour les ondes d'angle d'incidence proche de la verticale aux fréquences moyenne et élevée.

On note une augmentation de la translation horizontale engendrée par le passage de l'onde P_1 pour les fondations enterrées $E/B=1$ (figure 6.8) aux fréquences supérieures, cette augmentation est importante pour les ondes d'incidence proche de la verticale.

6.5.2 Effet de la porosité:

Dans notre étude, nous choisissons le grès avec la relation linéaire entre la porosité et les modules d'incompressibilité proposés par Ch-Hsin Lin, et Trifunac (2005).

Pour montrer l'influence de la porosité sur la réponse sismique des fondations, nous avons considéré les différentes valeurs de n suivantes : $n=0.1$, 0.3 et 0.34 correspondant aux modules d'élasticité $G=12030$, 2866 et 1010 MPa respectivement. Aussi un coefficient de poisson $\nu=0.3$ et un module de compressibilité de fluide $K_f=2000$ MPa, une densité volumique des grains $\rho_s=2650$ kg. m⁻³ et une densité volumique du fluide $\rho_f=1000$ kg. m⁻³ ont été utilisé dans cette étude.

Les figures 6.12 - 6.17 présentent les déplacement vertical et horizontal et de balancement des fondations enterrées et superficielle soumise a des ondes P_1 et SV .

Les figures 6.12 – 6.14 montrent que l'augmentation de la porosité entraîne une augmentation des translations, horizontale et verticale de la fondation par l'effet de l'onde P_1 , dans les hautes et les moyennes fréquences.

Pour le balancement nous observons à partir de la figure 6.14 qu'il subi une diminution dans les basses fréquences avec l'augmentation de la porosité, ainsi qu'une augmentation peut être constater dans la plage des hautes fréquences pour les fondations enterrées.

Nous remarquons une légère différence entre les courbes correspondant aux porosité $n=0.1$ et $n=0.3$, alors que la différence est plus accentué par rapport aux courbes correspondant à la porosité $n=0.34$.

Pour les ondes d'incidentes SV (figure 6.15 – 6.17), la porosité affecte légèrement les déplacement horizontal et vertical de la fondation enterrée aux fréquences moyennes, alors qu'il n y a aucun effet pour les fondation superficielle. Et nous observons également aux fréquences moyennes, qu'une augmentation de la porosité engendre une augmentation

importante du balancement, laquelle se réduit aux fréquences supérieures pour les fondations enterrées (figure 6.17).

6.5.3 Effet du degré de saturation :

On peut trouver des sols dans des états partiellement saturés, donc il est important de voir l'influence du degré de saturation sur les déplacements d'une fondation filante. Pour cela nous faisons varier le degré de saturation S_r , qui va prendre les valeurs de 100%, 99% et de 95%. Et on fixe la porosité à $n = 0.3$ et un coefficient de poisson $\nu = 0.3$.

Les figures 6.18 - 6.20 montrent que lors du passage de l'onde P_1 , la saturation partielle du sol diminue sensiblement les déplacements de la fondation, même avec une légère réduction en dessous de la saturation complète. Cette réduction est plus importante dans les hautes fréquences.

Nous constatons aussi que le comportement de la fondation est presque le même pour les deux degrés de saturations $S_r = 99\%$ et $S_r = 95\%$, et différent de celle de $S_r = 100\%$.

Avec une onde incidente SV , les figures 6.21 - 6.23 montrent que la variation du degré de saturation peut affecter le déplacement horizontal de la fondation, alors qu'elle exerce une légère influence sur le déplacement vertical et de balancement.

6.6 Conclusion :

La méthode des équations intégrales aux frontières constitue un outil de calcul précis et efficace qui s'adapte particulièrement bien à l'étude dynamique des fondations superficielles et enterrées dans un milieu homogène. Dans ce chapitre nous avons exposé la formulation matricielle des équations intégrales aux frontières pour le cas de réponse sismique de la fondation filante rigide, celle-ci est posée ou enterrée dans un demi-espace poro-élastique non visqueux et excitée par divers types d'ondes sismiques (P et SV) selon plusieurs angles d'incidence.

La théorie de la propagation d'ondes dans les milieux poreux a été proposée afin de caractériser l'input sismique excitant la fondation, et ce pour son utilisation dans la formulation matricielle des éléments de frontière.

Pour les deux types d'excitation, nous pouvons conclure que les déplacements de translation se réduisent significativement aux fréquences moyennes et élevées, le développement du balancement est observé dans des gammes de fréquence proportionnelles aux zones de chute de translations.

Nous avons étudié l'influence de certaines caractéristiques mécaniques du sol à savoir la porosité et le degré de saturation, la porosité joue un rôle sensible pour la détermination de la réponse sismique des fondations en fonction de la fréquence et de l'enterrement.

Lors du passage de l'onde sismique nous remarquons que même proche de 100% de degré de saturation, celui-ci a une influence considérable sur les déplacements horizontal et vertical de la fondation ainsi que sur le balancement.

6.6 Conclusion :

La méthode des équations intégrales aux frontières constitue un outil de calcul précis et efficace qui s'adapte particulièrement bien à l'étude dynamique des fondations superficielles et enterrées dans un milieu homogène. Dans ce chapitre nous avons exposé la formulation matricielle des équations intégrales aux frontières pour le cas de réponse sismiques de la fondation filante rigide, celle-ci est posée ou enterrée dans un demi-espace poro-élastique non visqueux et excitée par divers types d'ondes sismiques (P_I et SV) selon plusieurs angles d'incidence.

La théorie de la propagation d'ondes dans les milieux poreux a été proposée afin de caractériser l'input sismique excitant la fondation, et ce pour son utilisation dans la formulation matricielle des éléments de frontière.

Pour les deux types d'excitation, nous pouvons conclure que les déplacements de translation se réduisent significativement aux fréquences moyennes et élevées, le développement du balancement est observé dans des gammes de fréquence proportionnelles aux zones de chute de translations.

Nous avons étudié l'influence de certaines caractéristiques mécaniques du sol à savoir la porosité et le degré de saturation, la porosité joue un rôle sensible pour la détermination de la réponse sismique des fondations en fonction de la fréquence et de l'enterrement.

Lors du passage de l'onde sismique nous remarquons que même proche de 100% de degré de saturation, celui-ci a une influence considérable sur les déplacements horizontal et vertical de la fondation ainsi que sur le balancement.

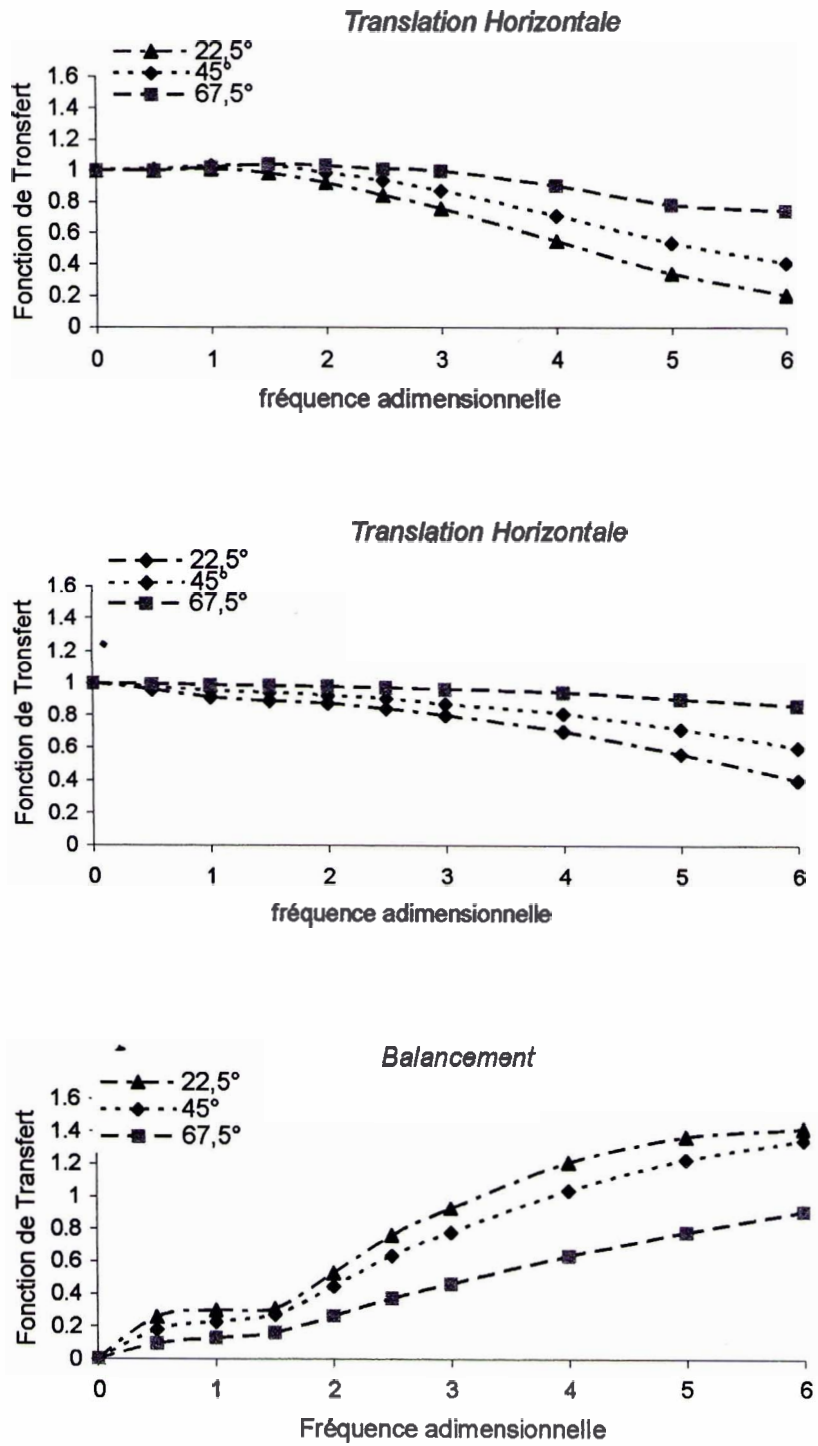


Figure 6.6 Effet de l'angle d'incidence dans le cas des fondations superficielles ($E/B=0$) sollicitées par l'incidence d'onde P_1

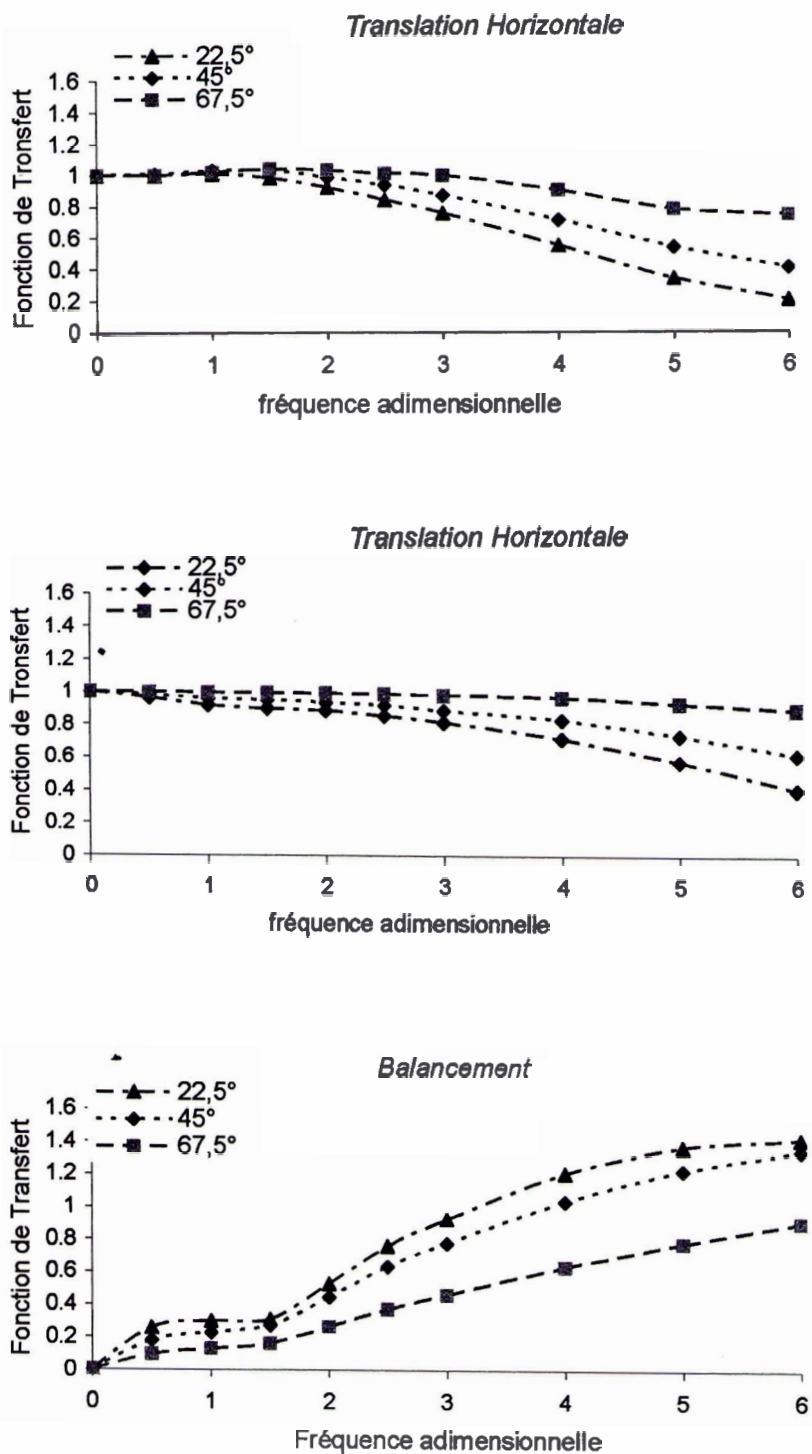


Figure 6.6 Effet de l'angle d'incidence dans le cas des fondations superficielles ($E/B=0$) sollicitées par l'incidence d'onde P_1

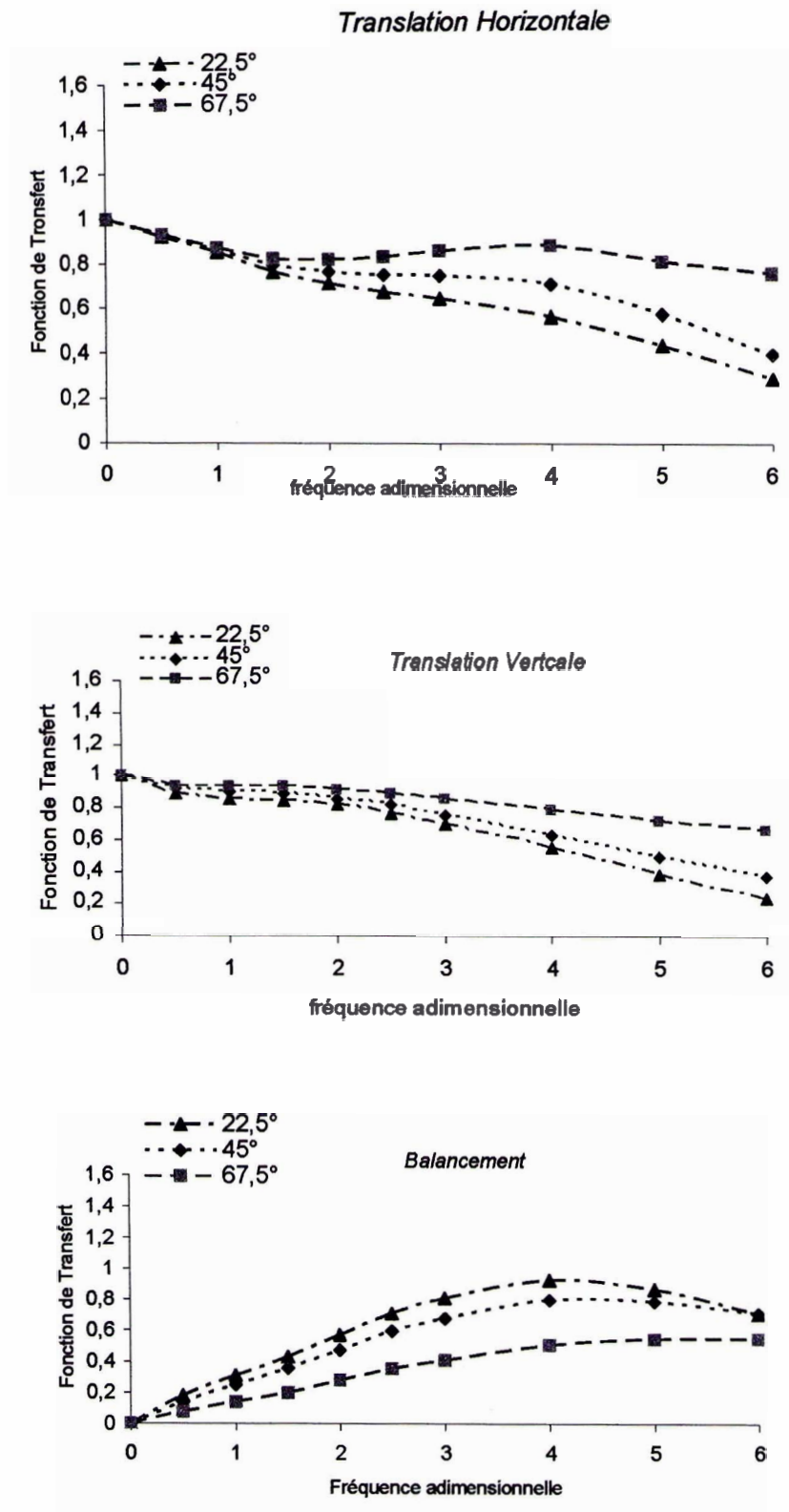


Figure 6.7 Effet de l'angle d'incidence dans le cas des fondations enterrées ($E/B=0.5$) sollicitées par l'incidence de l'onde P_1

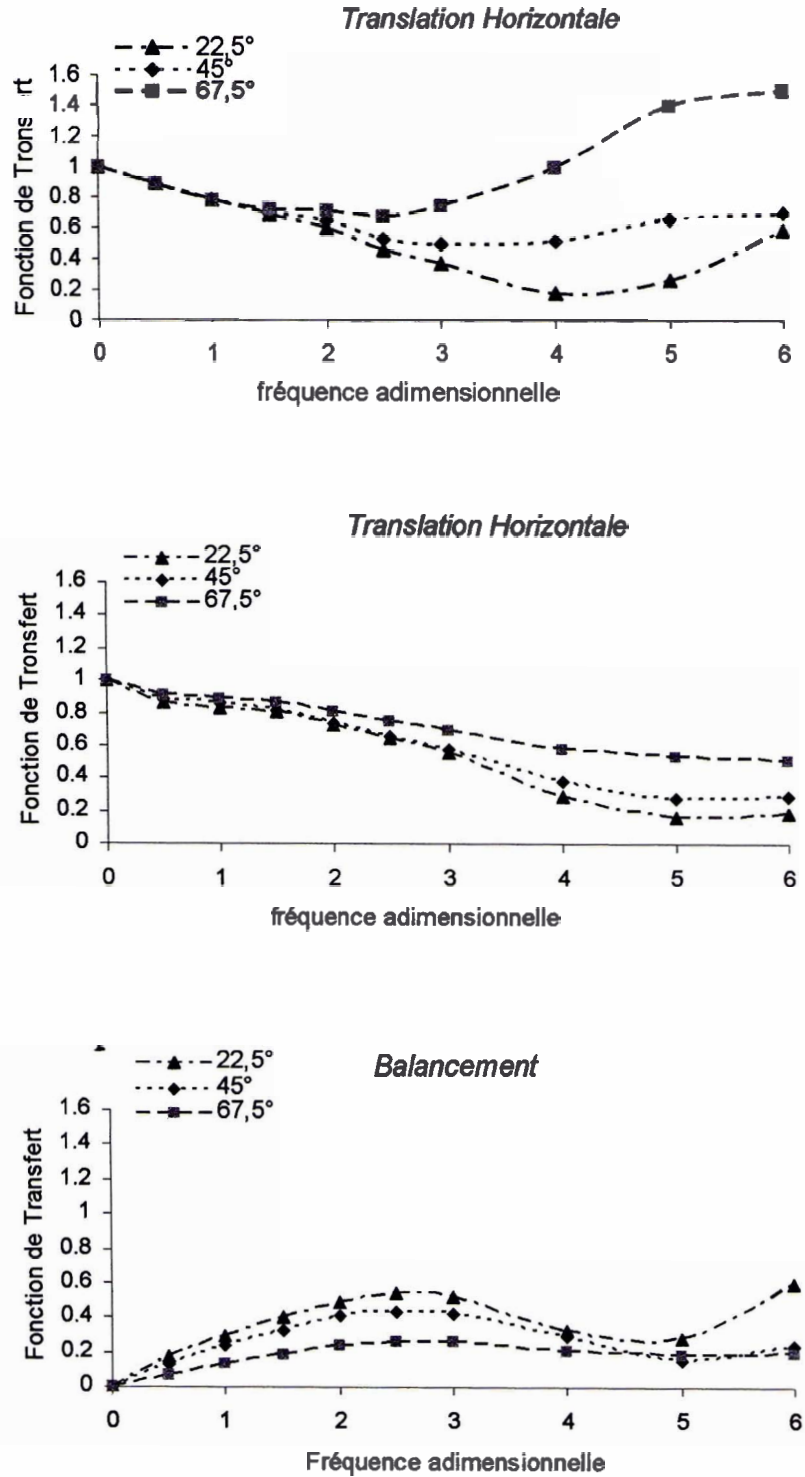


Figure 6.8 Effet de l'angle d'incidence dans le cas des fondations enterrées ($E/B=1$) sollicitées par l'incidence de l'onde P_1

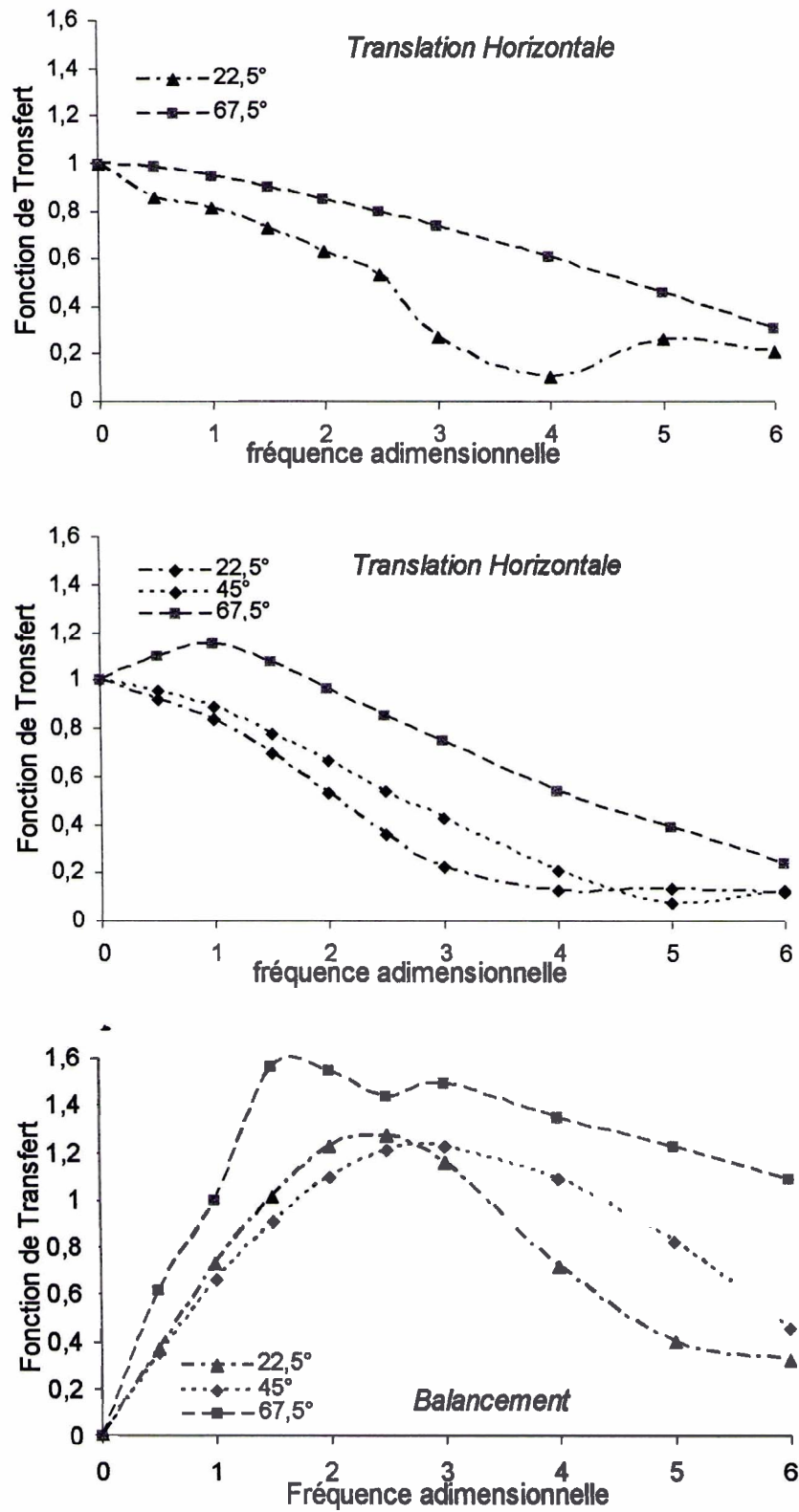


Figure 6.9 Effet de l'angle d'incidence dans le cas des fondations superficielles sollicitées par l'incidence de l'onde SV

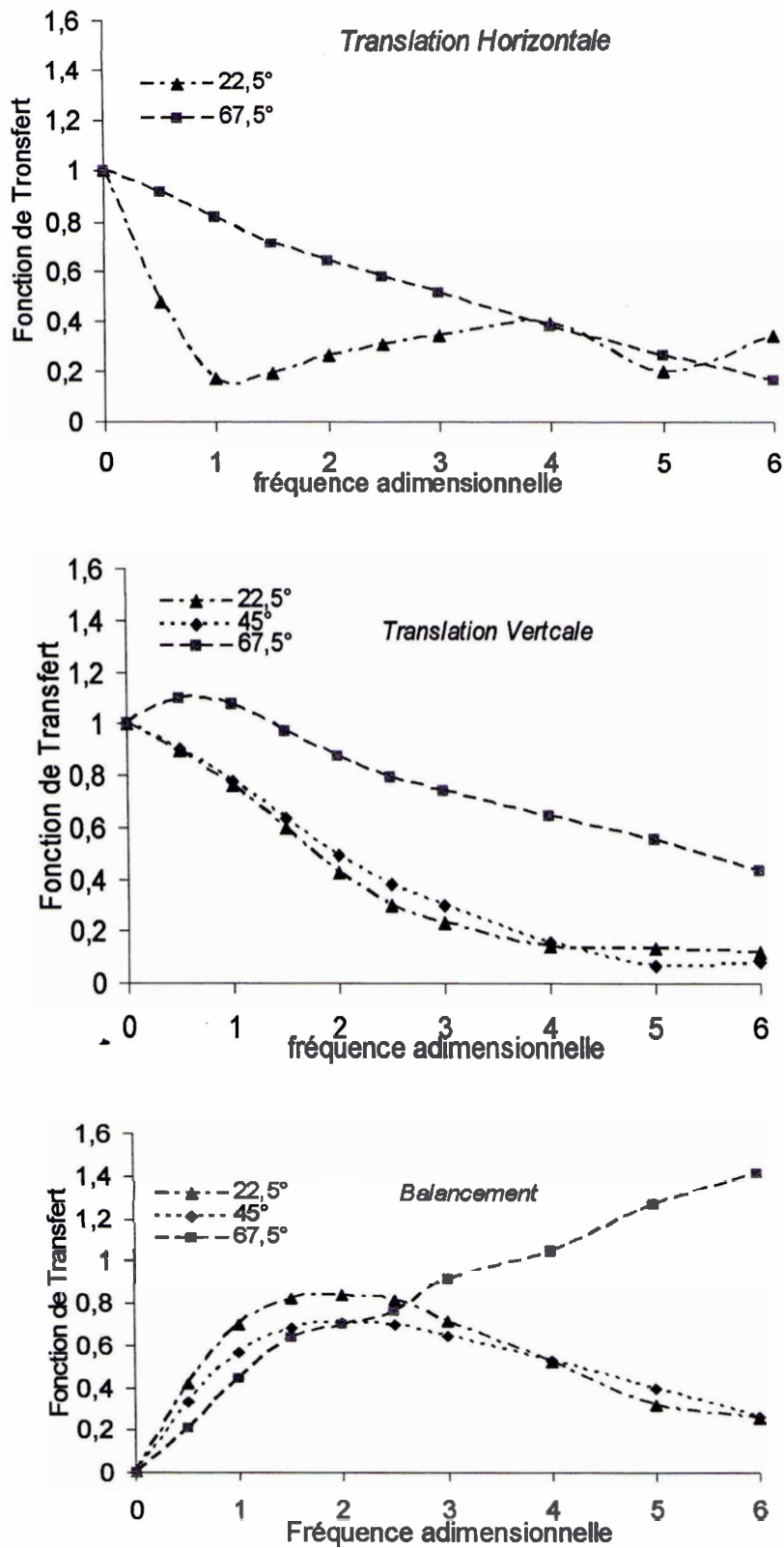


Figure 6.10 Effet de l'angle d'incidence dans le cas des fondations enterrées ($E/B=0.5$) sollicitées par l'incidence de l'onde SV

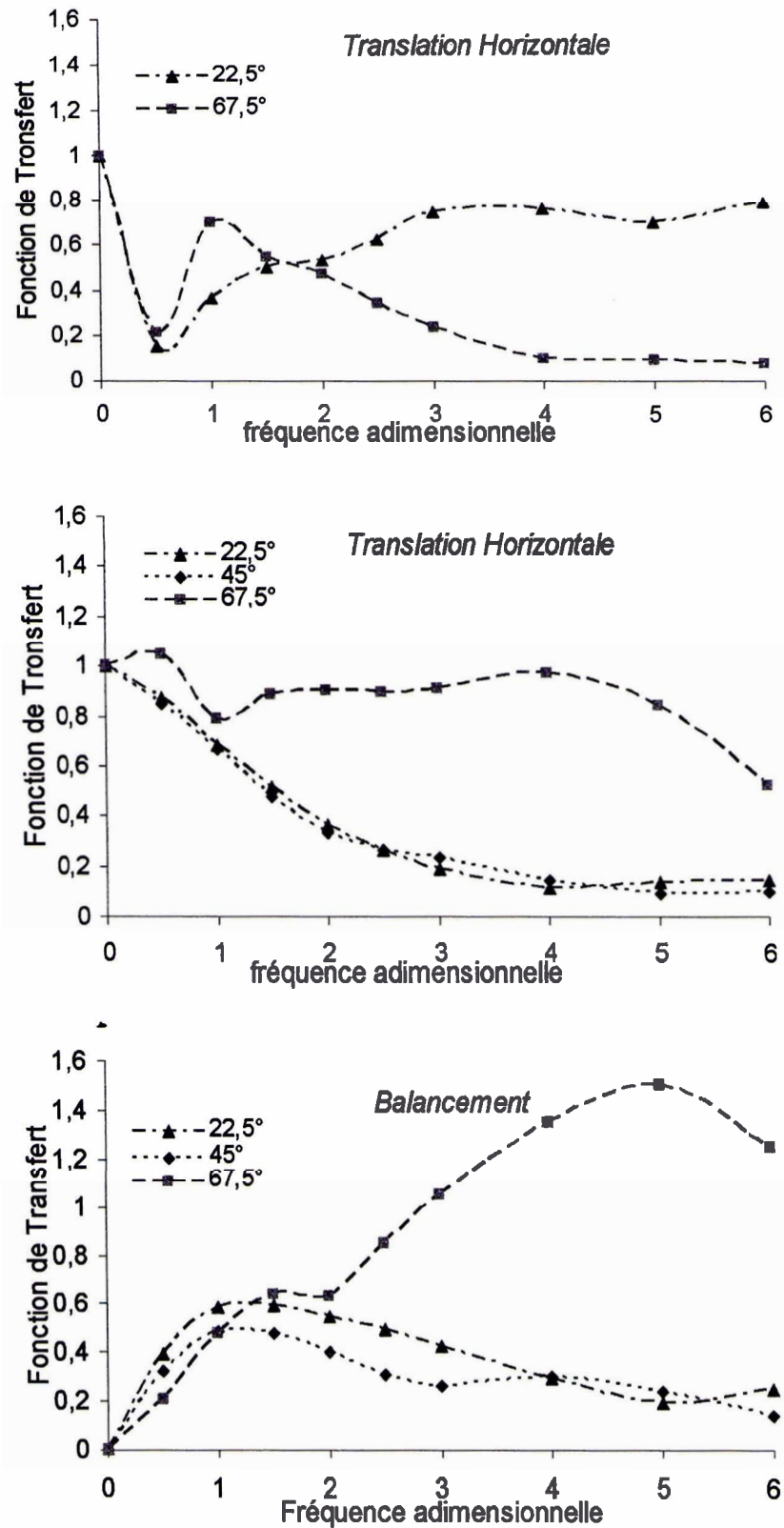


Figure 6 11 Effet de l'angle d'incidence dans le cas des fondations enterrées ($E/B=1$) sollicitées par l'incidence de l'onde SV

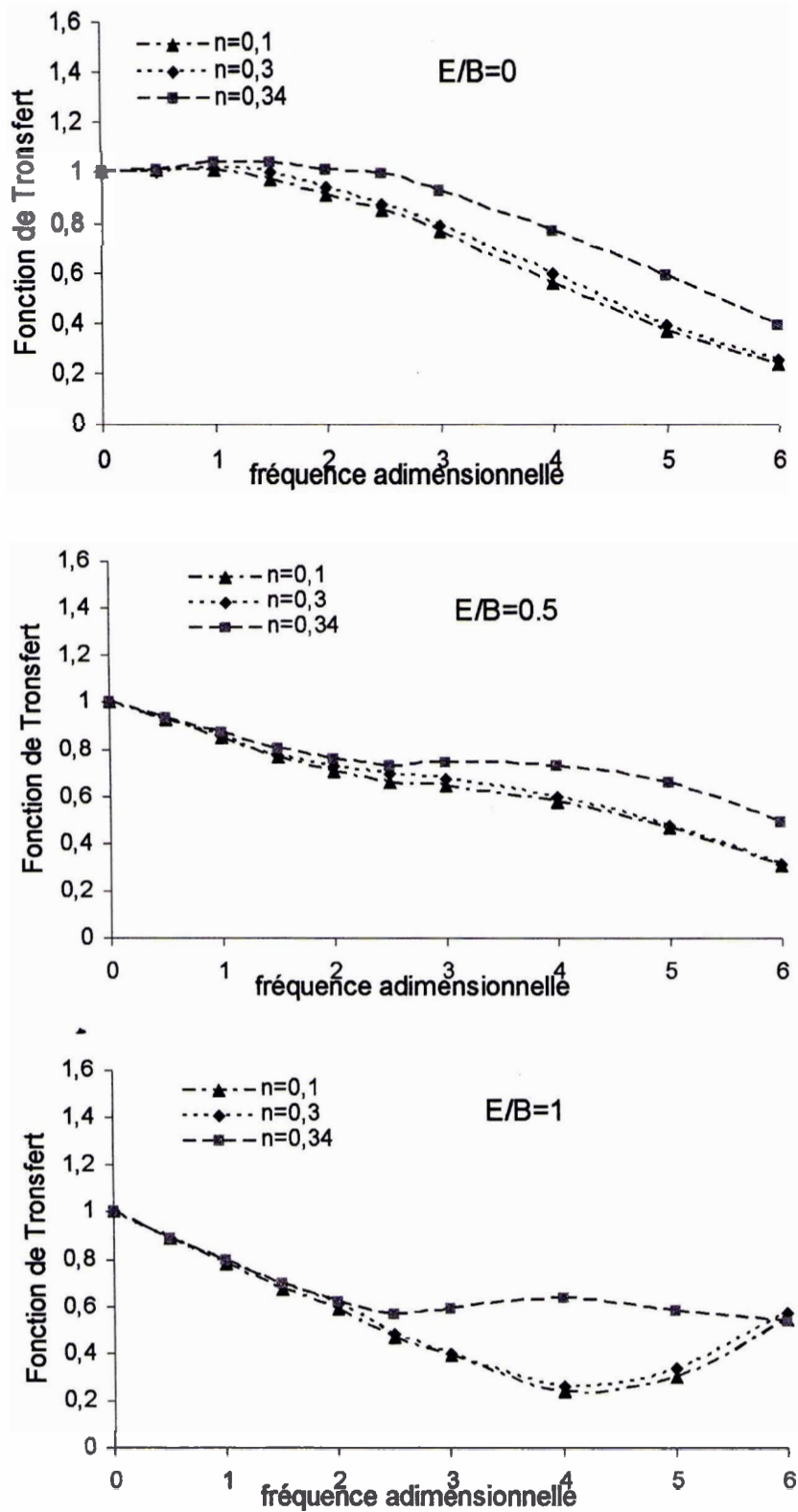


Figure 6.12 Effet de la porosité sur le déplacement horizontal d'une fondation sollicitée par l'incidence d'onde P_1

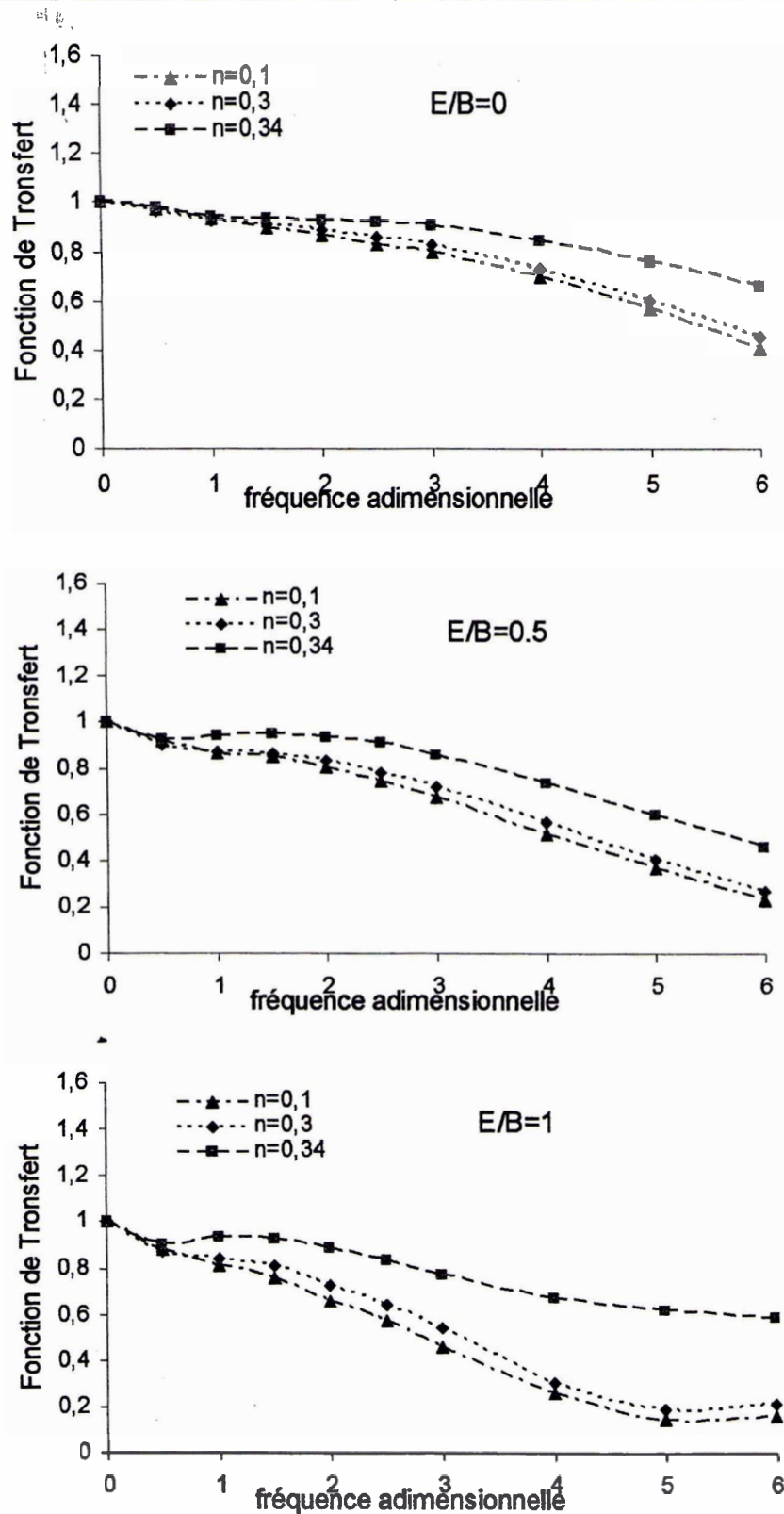


Figure 6.13 Effet de la porosité sur le déplacement vertical d'une fondation sollicitée par l'incidence d'onde P_1

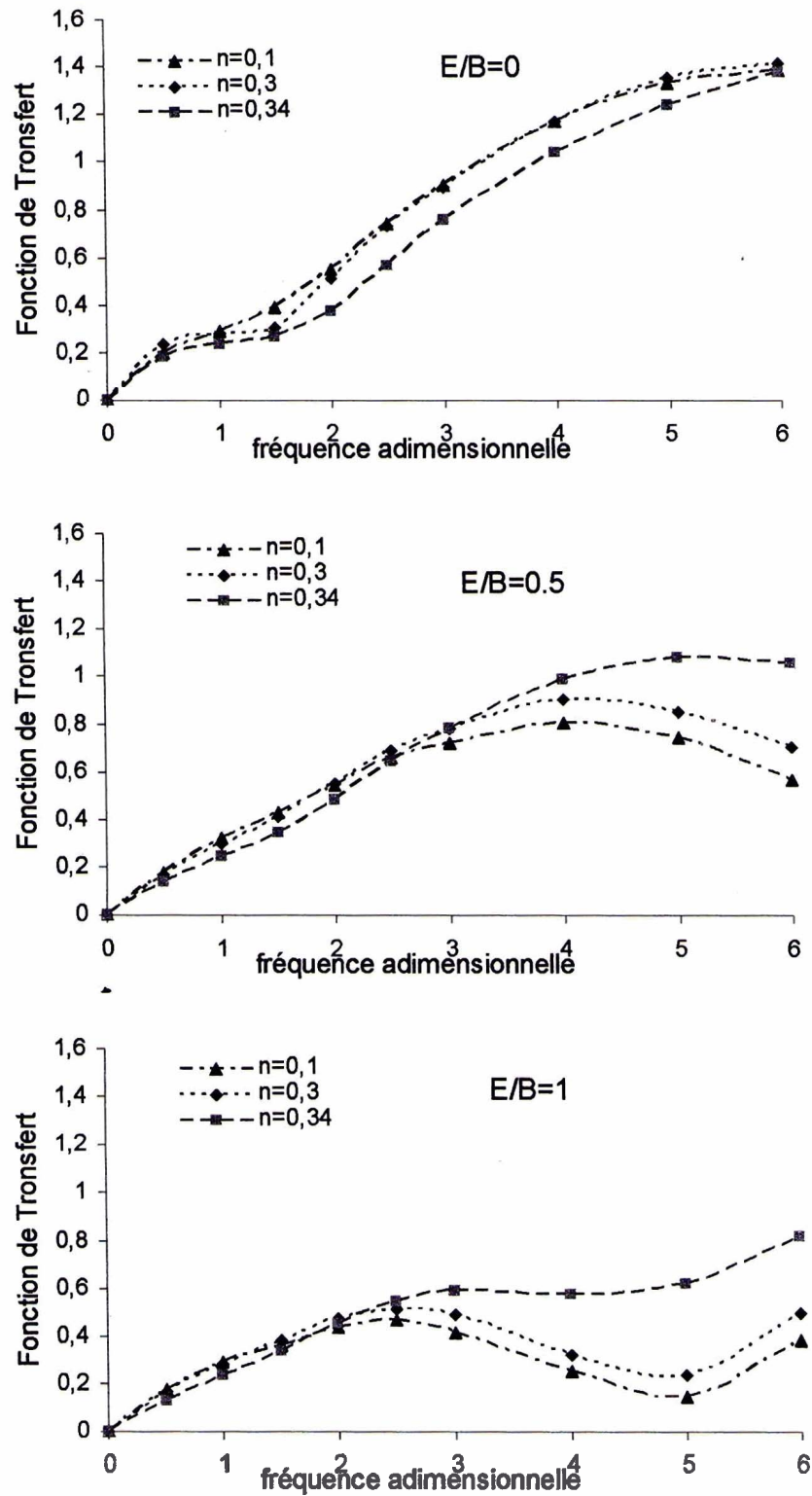


Figure 6.14 Effet de la porosité sur le balancement d'une fondation sollicitée par l'incidence d'onde P_1

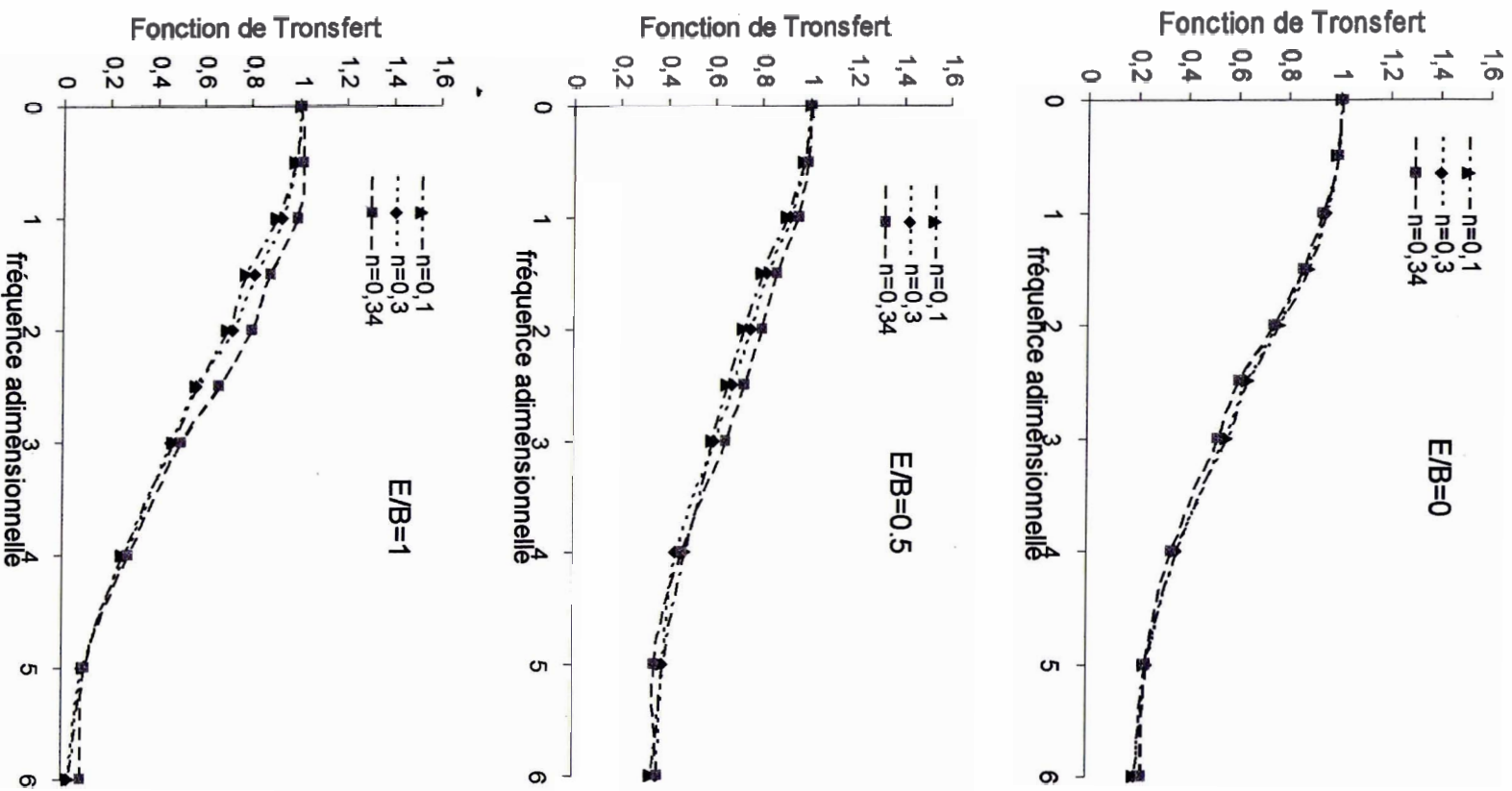


Figure 6.15 Effet de la porosité sur le déplacement horizontal d'une fondation sollicitée par l'incidence d'onde SV

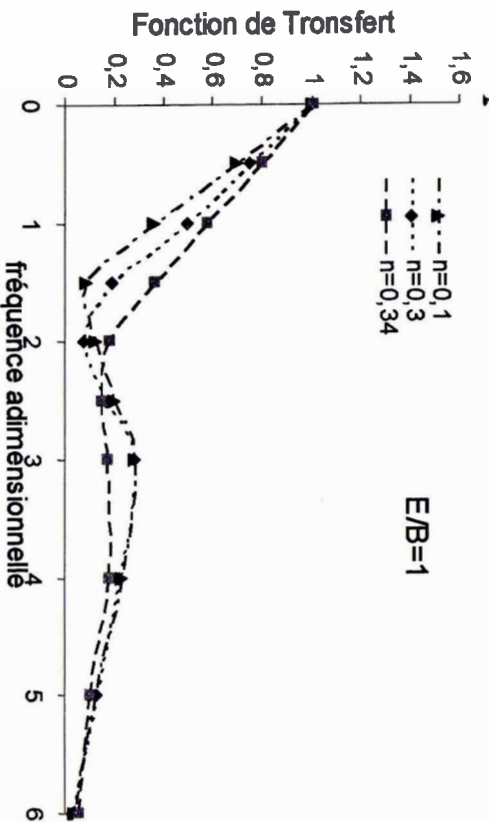
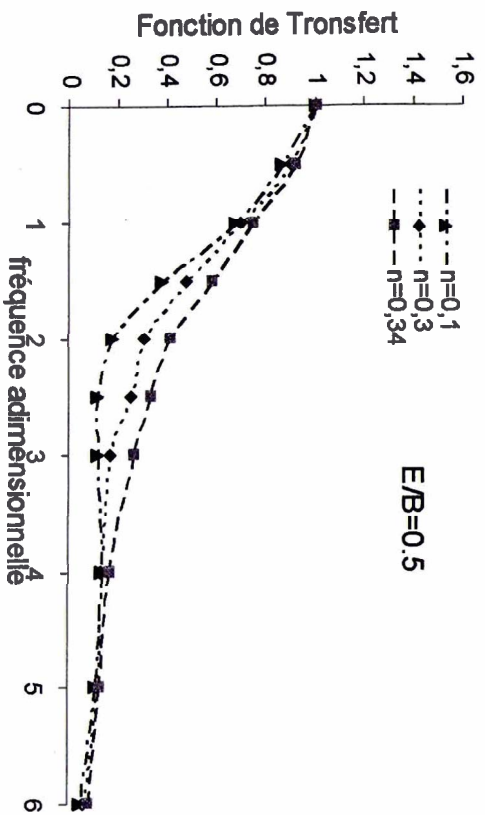
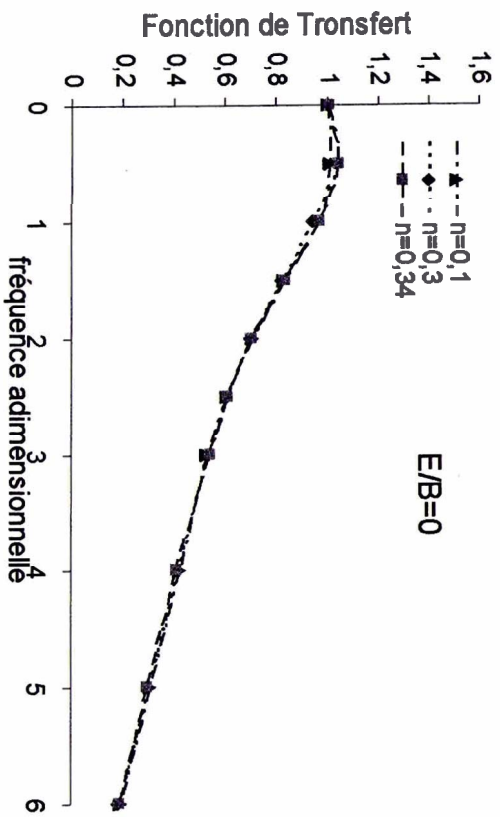


Figure 6.16 Effet de la porosité sur le déplacement vertical d'une fondation sollicitée par l'incidence d'onde SV

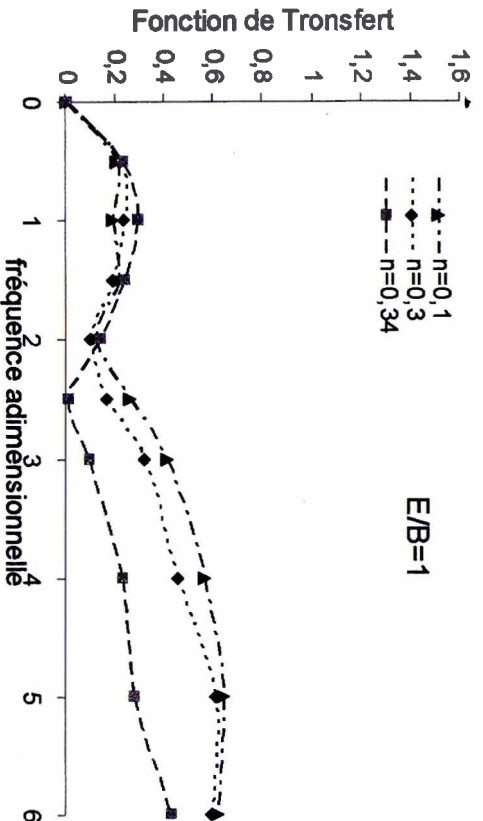
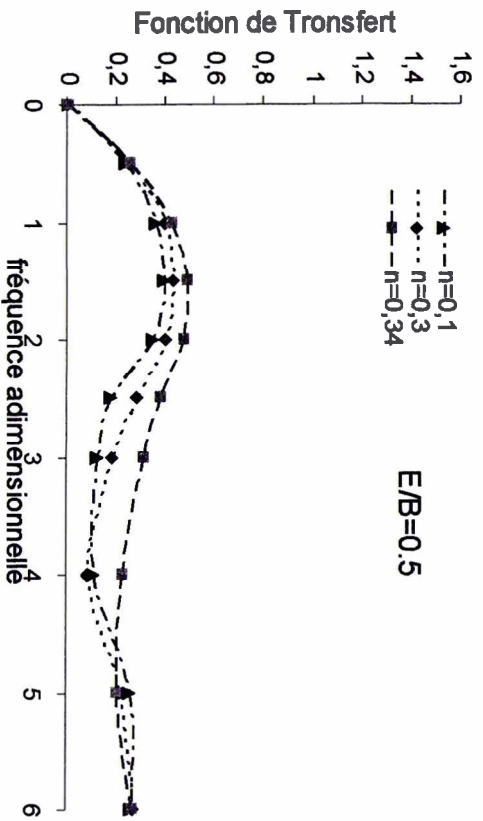
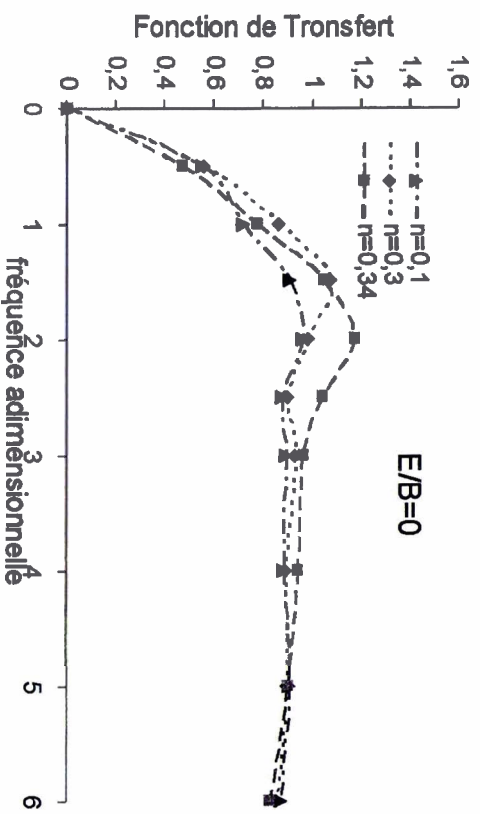


Figure 6.17 Effet de la porosité sur le balancement d'une fondation sollicitée par l'incidence d'onde SV

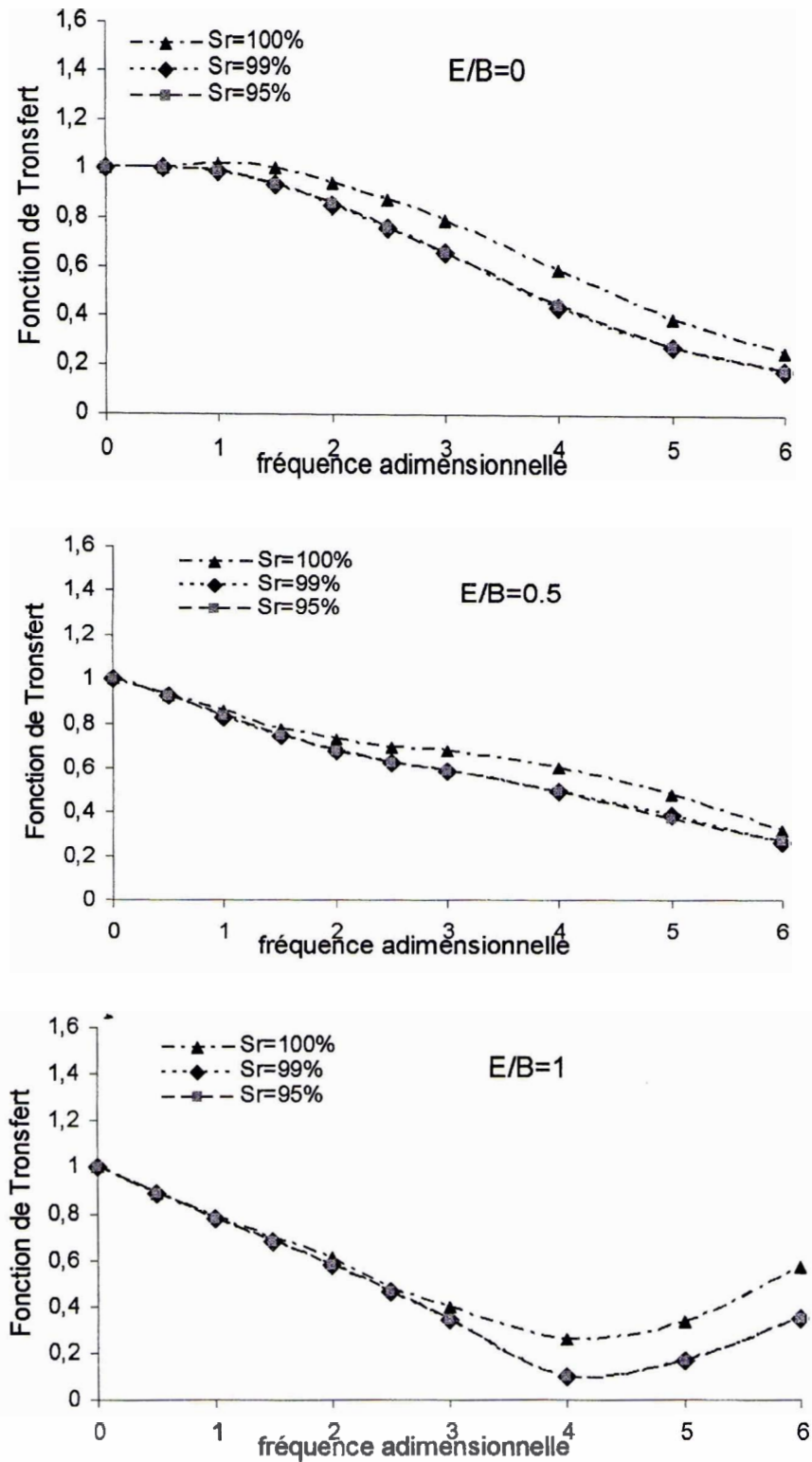


Figure 6.18 Effet du degré de saturation sur le déplacement horizontal d'une fondation sollicitée par l'incidence d'onde P_1

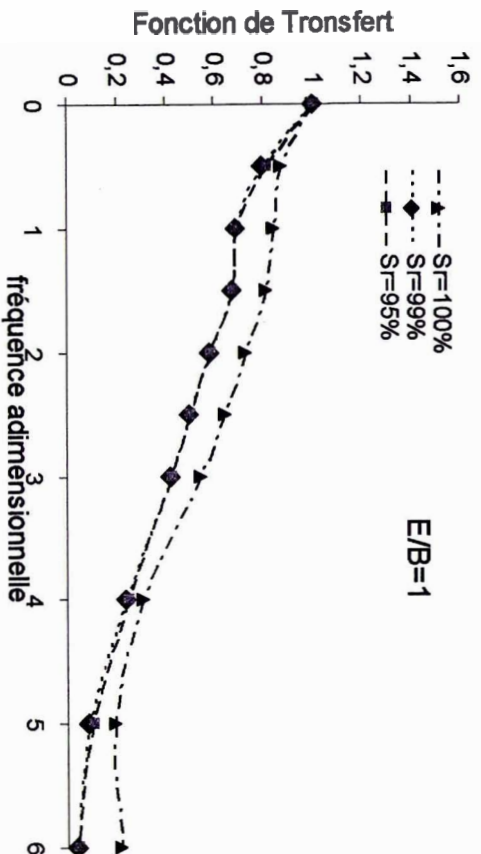
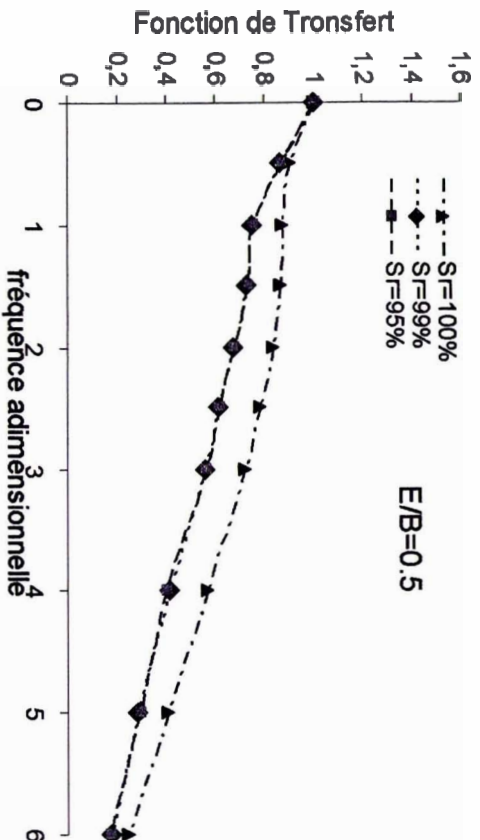
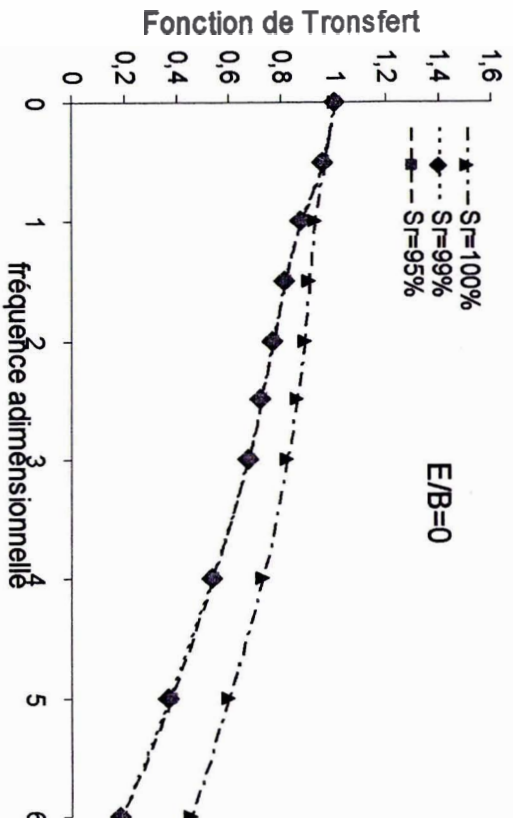


Figure 6 19 Effet du degré de saturation sur le déplacement vertical d'une fondation sollicitée par l'incidence d'ondes P_1

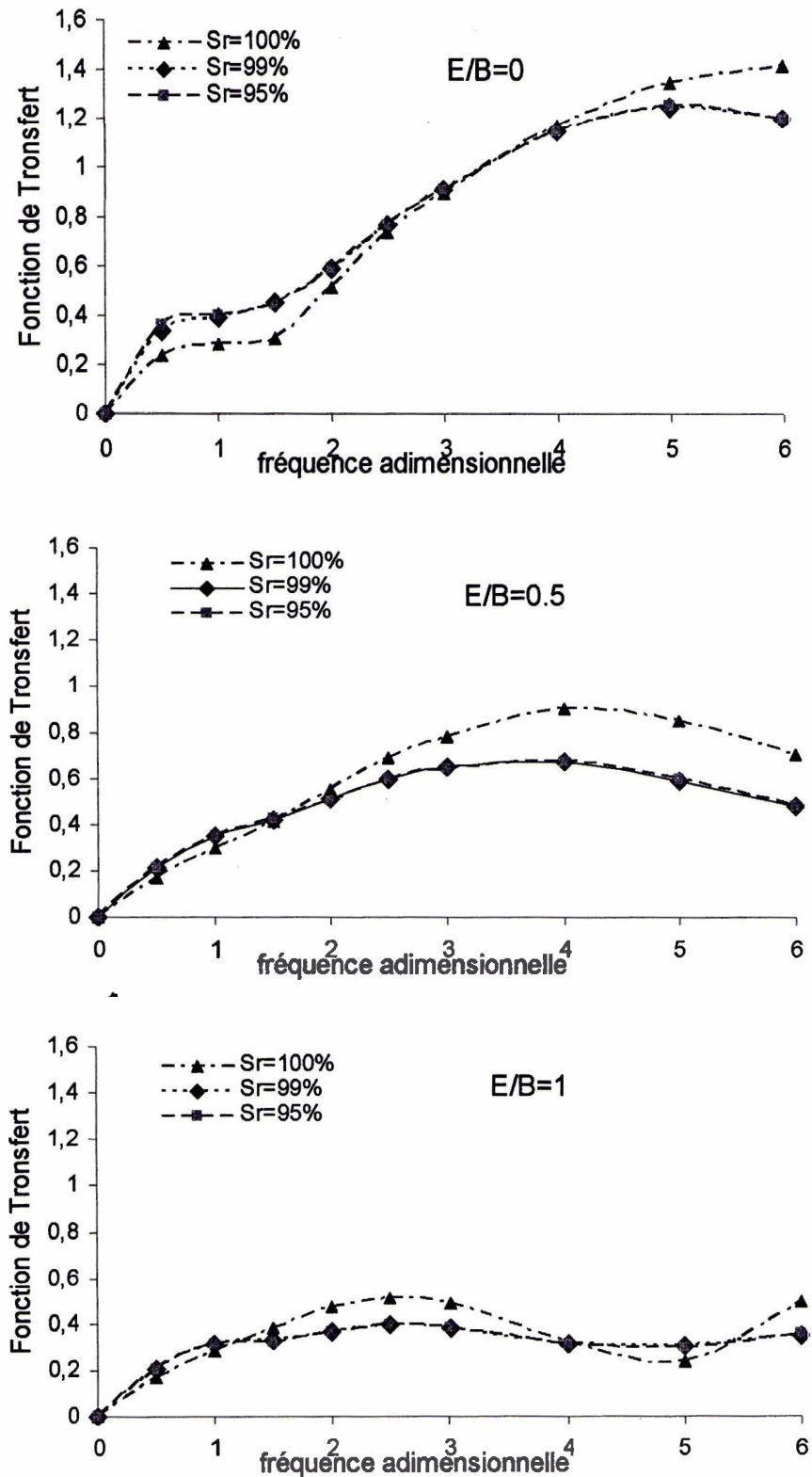


Figure 6 20 Effet du degré de saturation sur le balancement d'une fondation sollicitée par l'incidence d'onde P_1

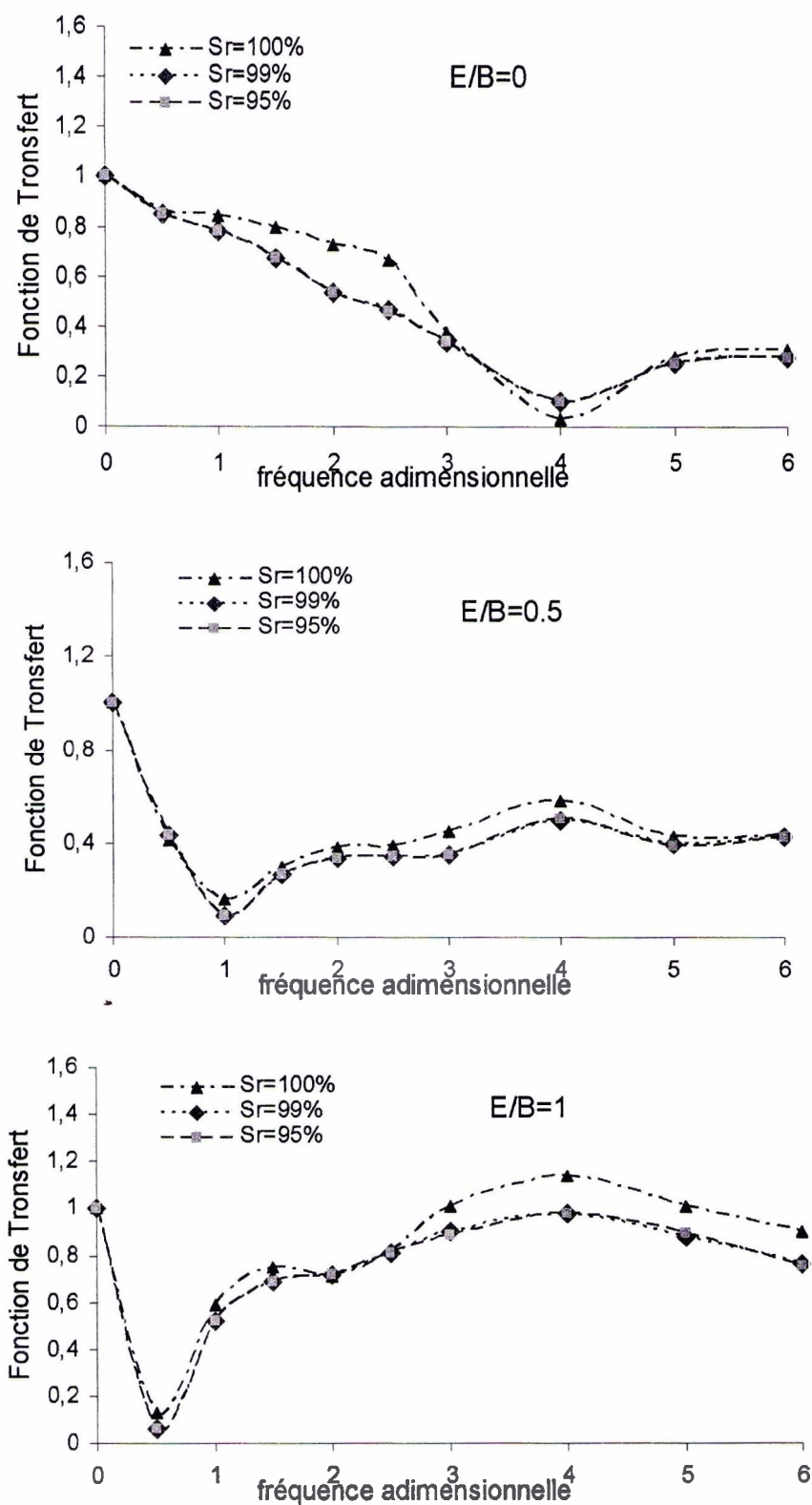


Figure 6 21 Effet du degré de saturation sur le déplacement horizontal d'une fondation sollicitée par l'incidence d'onde SV

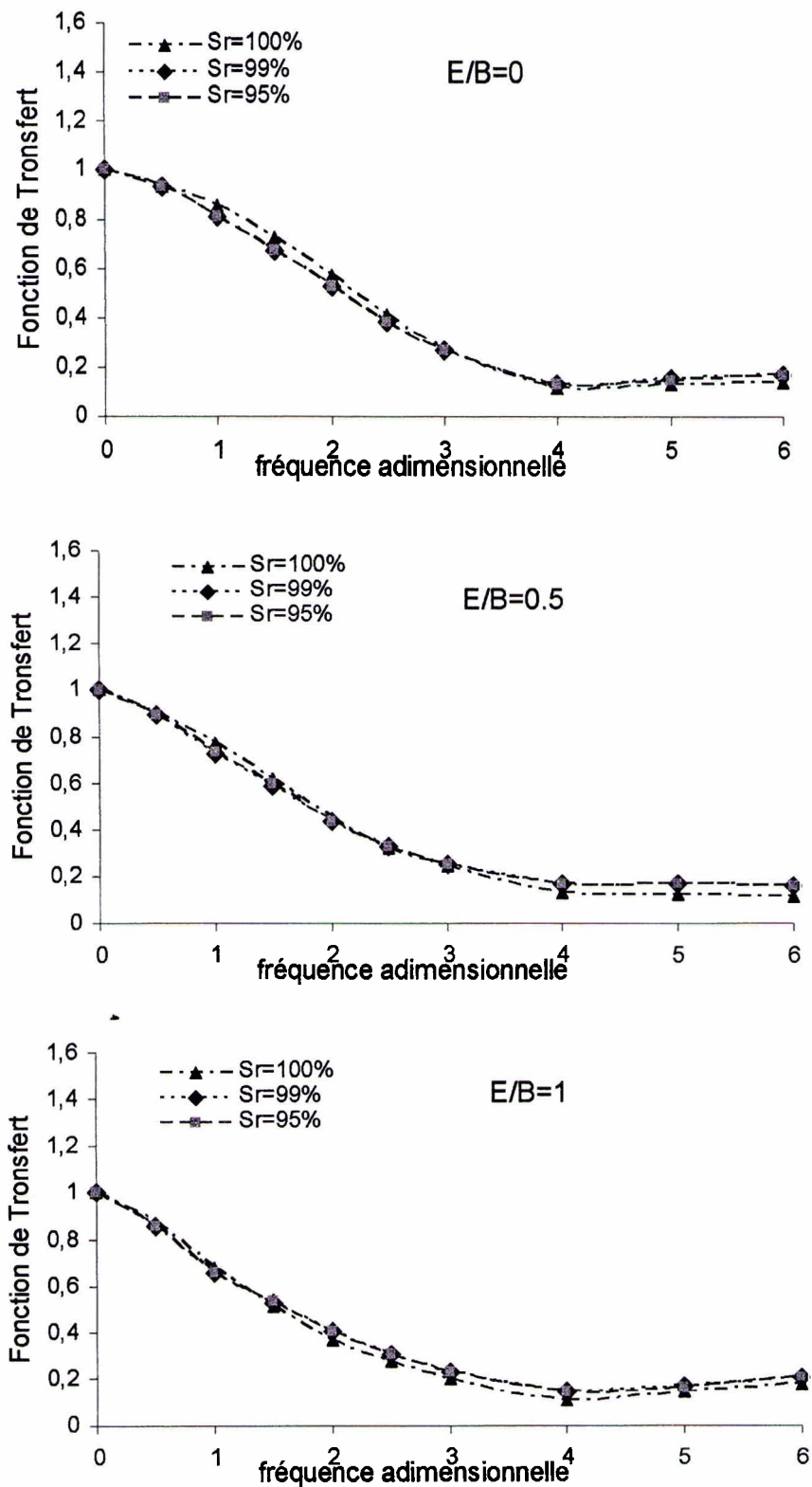


Figure 6.22 Effet du degré de saturation sur le déplacement vertical d'une fondation sollicitée par l'incidence d'onde SV

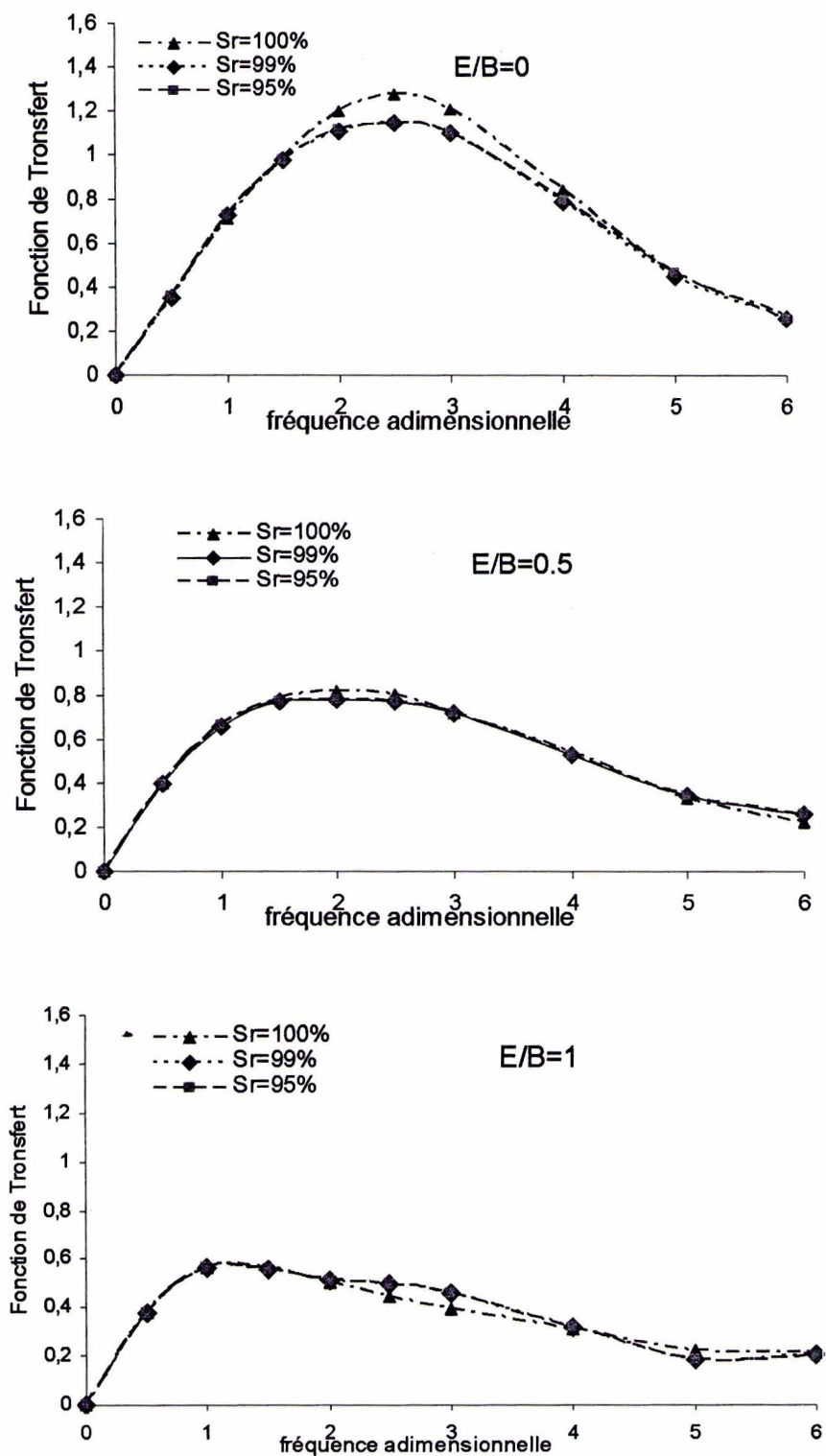


Figure 6 23 Effet du degré de saturation sur le balancement d'une fondation sollicitée par l'incidence d'onde SV

CONCLUSION GENERALE ET RECOMMANDATIONS

La conception des structures a connu une évolution importante depuis que les charges dynamiques ont été prises en compte. Les séismes étant des charges dynamiques ayant des effets très néfastes pour les structures, ils ont fait l'objet de nombreuses recherches dans le domaine du génie parasismique. La position et l'énergie dégagée par le tremblement de terre n'étant pas connues à l'avance, on se trouve contraint à jouer entre la sécurité de la vie humaine et le risque à prendre pour la structure.

Dans le cadre de la conception parasismique des structures, la méthode des sous structures se présente comme une approche très attrayante dans la résolution des problèmes d'interaction sol-structure. L'évaluation de la réponse cinématique des fondations constitue une étape importante par cette approche. Dans notre travail, nous avons proposé de déterminer cette interaction cinématique pour des fondations filantes rigides reposant sur un demi-espace poro-viscoélastique. La méthode des éléments de frontière a été utilisée dans ce travail compte tenu de ses nombreux avantages.

L'analyse d'un problème de dynamique des sols saturés implique l'établissement d'un ensemble d'équations décrivant les différents aspects intervenant dans le comportement de ces derniers. A travers le troisième chapitre, nous avons présenté dans la théorie des milieux poreux ainsi que l'ensemble des équations du modèle de Biot. Cette théorie établit un système d'équations aux dérivées partielles couplées régissant les mouvements du squelette et du fluide interstitiel avec l'apparition des nouvelles constantes matérielles. Ces constantes ou les quatre modules d'élasticité peuvent être déterminés à partir du module de cisaillement, ainsi que de la compressibilité du squelette solide, la compressibilité du système solide- fluide, et la compressibilité du fluide. Parmi les résultats importants de la théorie de Biot était l'identification de trois ondes de volume, deux ondes de compression et une onde de cisaillement.

L'application de la méthode des éléments de frontière aux problèmes poro-élastiques a été initialement limitée aux problèmes quasi-statiques (surtout des problèmes de consolidation

CONCLUSION GENERALE ET RECOMMANDATIONS

des sols saturés). Pour des problèmes dynamiques, les premières formulations ont été établies dans les domaines transformés (Fourrier ou Laplace). De plus, nous avons vu que, dans le domaine transformé de Fourier, seulement 3 variables, 2 composantes de déplacement du squelette u et la pression du fluide p , sont indépendantes. Basées sur ces 3 variables (4 variables en 3D), plusieurs formulations ont été publiées dans le domaine fréquentiel. Dans le quatrième chapitre, nous avons appliqué le traitement analytique et numérique de la méthode des équations intégrales en vue de son utilisation pour l'étude des problèmes de la poro-élastodynamique stationnaire bidimensionnelle.

Dans le chapitre cinq, en utilisant la méthode des éléments de frontière, nous avons formulé une approche matricielle pour le calcul de l'impédance dynamique des fondations filantes rigides superficielle et enterrées, dans un sol poro-élastique, nous avons étudié le cas d'une fondation reposant sur une demi-espace et le cas d'une fondation reposant sur un profil de sol surmontant un substratum rigide ou élastique. Un code de calcul a été développé et validé dans ce travail. Une étude paramétrique a été fournie à cet égard pour étudier l'influence de certains paramètres sur la fonction d'impédance tels que l'enterrement de la fondation, la perméabilité du sol, la porosité et le degré de saturation. L'effet de l'épaisseur du profil de sol ainsi que l'effet de la rigidité du substratum ont été aussi étudiés dans ce chapitre.

Dans le sixième chapitre, nous avons exposé la formulation matricielle de la méthode des éléments de frontières pour le calcul de la réponse sismique de la fondation filante et rigide, posée ou enterrées dans un demi-espace homogène poro-élastique non visqueux et exciter par divers types d'ondes sismiques (P_1 et SV) selon plusieurs angles d'incidences. Nous avons interprété quelques résultats relatifs à l'influence de l'angle d'incidence, du degré de saturation et de la porosité sur les déplacements adimensionnels de la fondation horizontal et vertical et de balancement.

Dans cette conclusion générale nous pouvons résumer les résultats essentiels de notre analyse comme suite :

- Le type de contact entre le sol et la fondation a une influence substantielle seulement dans les parties réelles des fonctions d'impédances verticales, et cette influence augmente avec la fréquence d'excitation.
- L'épaisseur de la couche de sol surmontant un substratum rigide à un effet très important sur les fonctions d'impédance de la fondation notamment pour les composantes horizontales avec un rapport de l'épaisseur de la couche h sur le demi largeur de la fondation B ($h/B \leq 8$), cet effet est plus faible pour les composantes verticales et de balancements, et on peut le négliger pour un rapport ($h/B \geq 4$).
- L'effet de la rigidité du substratum élastique pour un rapport de ($h/B = 2$), est très important sur les fonctions d'impédance et particulièrement sur la composante verticale.
- Les effets de la perméabilité et de la porosité ainsi que du degré de saturation peuvent être important sur les fonctions d'impédances notamment pour les modes vertical et de balancement dans les hautes fréquences.
- Pour une fondation reposant sur un profil de couche surmontant un substratum, nous constatons que les effets de la perméabilité, la porosité et de la saturation sont plus important que celles correspondant a une fondation sur un demi-espace, et peuvent changer substantiellement les valeur de la rigidité de la fondation notamment en hautes fréquences.
- Pour les deux types d'excitations (P_I et SV), nous pouvons conclure que les déplacements de translation se réduisent significativement aux fréquences moyennes et élevées. La réduction est plus importante pour les ondes de faible incidence que pour les ondes de grandes incidences.
- Il apparaît que pour les deux types d'excitations (P_I et SV) traités, qu'une légère diminution du degré de saturation en dessous des 100%, peut affecter les déplacements horizontal et vertical et de balancement de la fondation dans les hautes et moyennes fréquences.

Cette étude a permit d'apporter un éclaircissement concernant le phénomène complexe de l'interaction cinématique. Elle peut être utilisée pour une phase de conception préliminaire. L'investigation menée jusque-là laisse la porte grande ouverte sur plusieurs extensions possible:

L'application de la méthode des couches minces en poro-élasticité constitue un outil très efficace pour étudier l'effet l'interaction cinématique des fondations bidimensionnel et tridimensionnelles reposant sur un profil de sol multicouche poro-élastique.

- Une extension importante consiste à compléter l'étude en analysant l'interaction inertielle, l'opération pourra être faite par une analyse modale classique. La détermination du spectre de réponse sera alors d'un grand intérêt pour les ingénieurs.
- Etendre la formulation aux modèles de sols à comportement non linéaire et ce conjointement avec l'utilisation d'un couplage de la méthode des éléments finis avec la méthode des éléments de frontière.

- Abascale, R. and Dominguez, J., (1986). Vibrations of footings on Zoned Viscoelastic Soils, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.112, No. 5, pp433-447.
- Ahmed and Rupani, A. K., (1999). Horizontal Impédance of Square Foundation in Layered Soil, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 18, No. 1, pp. 59-69.
- Alarcon, E., Cano, J.J. and Dominguez, J., (1989) Boundary dynamic approach to the dynamic Stiffness Functions of Circular Foundations, *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.13, pp. 645-664.
- Alarcon, E., Dominguez, J. and Del Cano, F., (1980). Dynamic stiffness of Foundations, *New Developments in boundary element method, Computational Mechanics Publications*, pp. 264-280.
- Alarcon, E., Martin, A. and Paris, F. 1979, "Boundary Elements in Potential and Elasticity Theory", *computer and structures*, Volume.10, pp.351-362.
- Apsel, R. J., (1979). Dynamic Green's Function for Layered Media and Applications to boundary Value Problems, Ph.D. thesis, University of California, San Diego.
- Arnold, R. N., Bycroft, G. N. and Warburton, G. B., (1965). Forced Vibration of Body on an Infinite Elastic Solid, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol 22, pp. 391-400
- Airouche, H., (2000). Etude des Effets d'Interactions Dynamiques due au Trafics Urbains dans les systèmes Sol-Tunnel par la méthode des Equations Intégrales aux frontières, Thèse de Magister, Ecole Nationale Polytechnique.
- Barros FCP, Luco JE. Dynamic response of a two-dimensional semi-circular foundation embedded in a layered viscoelastic halfspace. *Soil Dyn Earthquake Eng* 1995;14:45-57.
- Biot M. A. General theory of three-dimensional consolidation. *J Appl Phys* 1941;12:155-64.
- Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, I: low frequency range. *J Acoust Soc Am* 1956; 28:168-78.
- Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, II: higher frequency range. *J Acoust Soc Am* 1956; 28:179-91.
- Biot M., A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *J Appl Phys* 1962;33:1482-98.

Berrah, M. K., et Hadid, M., (1996). Earthquake Response of Rigid Strip Foundations to Spatially Varying Ground Motion, Third European Conference on Structural Dynamics, Eurodyn 96', Italy, Vol.2 pp. 1045-1050.

Berryman JG. Confirmation of Biot's theory. Appl Phys Lett 1980;34(4):382-4.

Beskos, D. E., (1987). Boundary Element Methods in Dynamic Analysis, Applied Mechanics Reviews, Vol. 40, pp. 1-23.

Beskos, D. E., (1997). Boundary Element Methods in Dynamic Analysis: Part II (1986-1996), Applied Mechanics Reviews, Vol. 40, pp. 1-23.

Betti, R and Abdel-Ghaffar, A. G., (1994). Analysis of Embedded Foundations by Substructure Deletion Methode, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 120, pp. 1283-1303.

Bo. J., Hua L. Vertical dynamic response of a disk on a saturated poroelastic half-space. Soil Dyn Earthquake Eng 1999;18:437-43.

Bonnet, G., (1987). Basic singular solutions for a poroelastic medium in the dynamic range. Journal of acoustic society of america, 82(5) :1758-1762.

Bourbie T., Coussy O., Zinsner B. Acoustique des milieux poreux. Ed. Technip Paris, publications de l'Institut Français du pétrole, 1986

Bougacha S, Tassoulas JL, Roesset JM. Analysis of foundations on fluid-filled poroelastic stratum. J Eng Mech ASCE 1993;119(8): 1632-48.

Bougacha, S., Roesset JM. and Tassoulas JL. Dynamic stiffness of foundations on fluid filled poroelastic stratum. J Eng Mech ASCE 1993;119(8):1649-62.

Brebbia, C. A. and Domiguez, J., (1989). Boundary Elements: An Introduction Course, Computational Mechanics Publications and McGraw-Hill, Southampton and New YORK.

Cagniard ,L .1939," Réflexion et réfraction des ondes séismiques progressive" McGraw-Hill. and New York (1962).

Cao H., Lee VW. Scattering and diffraction of plane P waves by circular cylindrical canyons with variable depth-to-width ratio. Soil Dyn Earthquake Eng 1990;9(3):141-50.

Chang, J. and Dargush, G. (1995). Boundary element method for dynamic poroelastic and thermoelastic analyses. International journal of solids and structures, 32(15) :2257-2278.

Chang, A-D., Badmus, T., et Beskos, D. (1991). Integral equation for dynamic poroelasticity in frequency domain with BEM solution. Journal of engineering mechanics, 117(5) :1136-1157.

Chang, A-D. et Detournay, E. (1998). On singular equations and fundamental solutions of poroelasticity. *International journal of solids and structures*, 35(34-35) :4521-4555.

Chang, A. D. et Liggett, J. (1984). Boundary integral equation method for linear porous-elasticity with application to soil consolidation. *International methods in engineering*, 20 :279-296.

Chang, A, H, D., Badmus, T, and Beskos, D.E., (1991). "Integral equation for dynamic poroelasticity in frequency domain with boundary element solution", *J. Eng., ASCE*, Vol .117, PP.1136-1157

Cleary, T. (1977). Fundamental solutions for a fluid-saturated porous solid. *International journal solids and structures*, 13 : 785-806.

Clinton J. F., Bradford SK., Heaton TH. and Favela J. (2006) The observed wander of the natural frequencies in a structure. *Bull Seismological Soc Am* 2006;96(1):237-57.

Coussy, O. (1991) *Mécanique des milieux poreux*. Ed. Technip Paris.

Dargush, G. and Baerjee, P. A time domain boundary element method for poroelasticity. *International journal for numerical methods in engineering*, 28 :2423-2449.

Dargush, G. F., Chopra M. B. (1996). Dynamic analysis of axisymmetric foundations on poroelastic media. *J Eng Mech ASCE* 1996; 122(7):623-32.

Davis, C.A., Lee VW, Bardet J. P. (2001). Transverse response of underground cavities and pipes to incident SV waves. *Earthquake Eng Struct Dyn* 2001;30(3):383-410.

Deressiewicz, H. the effect of boundaries on wave propagation in a filled porous solid :I. *Bull Seismol Soc Am* 1960; 50(4):599-68

Deressiewicz, H. the effect of the boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: II. Love wave in porous layer. *Bull Seismol Soc Am* 1961; 51(1):51-9

Deressiewicz, H. the effect of boundaries on wave propagation in a filled porous solid: IV. Surface Wave in half-space. *Bull Seismol Soc Am* 1962; 52(4):627-38

Deressiewicz, H. the effect of the boundaries on wave propagation in liquid-filled porous solid: VI. Love wave in a double surface layer. *Bull Seismol Soc Am* 1964; 54(1):417-23

Deressiewicz, H. the effect of the boundaries on wave propagation liquid-filled porous solid: VII. Surface Wave solid in half-space in the presence of a liquid layer *Bull Seismol Soc Am* 1964; 54(1):425-30

Deressiewicz, H. the effect of the boundaries on wave propagation liquid-filled porous solid: IX. Love wave in porous internal stratum. Bull Seismol Soc Am 1961; 51(1):51-9

Deressiewicz, H. the effect of the boundaries on wave propagation liquid-filled porous solid: VII. Love wave in porous layer. Bull Seismol Soc Am 1965; 55(5):919-23

Deressiewicz, H. Rice J. T. the effect of the boundaries on wave propagation liquid-filled porous solid: III. Reflection of plan Waves at a free plan boundary. Bull Seismol Soc Am 1962; 52(3):595-625

Deressiewicz, H. Rice J. T. the effect of the boundaries on wave propagation liquid-filled porous solid: V. Transmission across of plan interface . Bull Seismol Soc Am 1964; 54(1):409-16

Deressiewicz, H. The effects of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: I. Reflection of plane waves at a free plane boundary (non-dissipative case). Bull Seismological Soc Am 1960; 50(4):599-607.

Dominguez, J., (1978a). Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations, Report No. R78-20, Department of civil engineering, Massachusetts Institute of technology, Cambridge, Massachusetts.

Dominguez, J., (1984). "Application of Boundary Element Methodes in Elastodynamics," in BETECH 85 , C. A. Brebbia and B.J. Nage, Eds Springer-Verlag, Berlin, pp. 105-127.

Domiguez, J. (1991). "An Integral Formulation For Dynamic Poroelasticity" , J Appl. Mech. ASME , Vol.58,pp.588-591.

Domiguez, J. (1992). "Boundary Element Approach For Dynamic Poroelastic Problem" Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.35,pp.307-324.

Dvorkin, J., Nur A. and Yin H. Elasticity for high-porosity sandstones: theory for two North Sea data sets. Geophysics 1996; 61(5): 1363-70

Emperador, J. M. and Dominguez, J., (1989). Dynamic Response of Axsymmetric Embedded Foundations, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 18, pp. 1105-1117.

Gal, D., Drorkin J., Nur A. A physical model for porosity reduction in sandstones. Geophysics 1998;63 : 454-9

Gomez-Lera, M. S., Dominguez, J and Alarcon, E., (1985). On the Use of 3-D Fundamental Solutions for Axisymetric Steady-State Dynamic Problems, Proceeding of the Seventh international Conference on BEM in Engineering, Ed. C.A. Brebbia, Springer- Verlag, pp.6.127-6.136.

Hadid, M., (1995). analyse de l'Interaction Cinématique Déterministe et stochastique pour les fondations rigides Bidimensionnelles par une approche Intégrale aux frontières. Thèse de Magister, Ecole nationale polytechnique, Algérie.

Hadid, M., (2003) Approche Intégrale pour le Traitement des Problèmes d'Interactions Multiples entre Structures via le Sol. Thèse doctorat d'état , Ecole nationale polytechnique, Algérie.

Hadid, M. and Berrah. M. K.,(1995). Boundary Element Method Applied to Elastodynamic Problems: Application to Sol-Foundation Interaction, Algerian Journal of Technology; Ecole nationale polytechnique, Serie A, Vol.11, No .1. pp 1-12.

Hadid, M. and Berrah. M. K.,(2001). Structural Response for Stochastic Kinematic Interaction, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.30 , No .1, pp0 79-114.

Halpern, M. R., Christiano, P. Steady-state harmonic response of a rigid plate bearing on a liquid-saturated poroelastic half space. Earthquake Eng Struct Dyn 1986;14:439–54.

Han D. Effects of porosity and clay content on acoustic properties of sandstones and unconsolidated sediments. PhD Thesis. Stanford University ; 1986.

Jin, B., Liu H. Horizontal vibrations of a disk on a poroelastic halfspace. Soil Dyn Earthquake Eng 2000;19:269–75.

Jin, B., Liu, H. Rocking vibrations of rigid disk on saturated poroelastic medium. Soil Dyn Earthquake Eng 2000;19:469–72.

Karabalis, D. L. and Beskos, D. E., (1984). Dynamic Response of 3-D Rigid Surface Foundations by Time Domain Boundary Element Method, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 12, pp, 73-94.

Kausel, E. (1974). Forced Vibration of Circular Foundations on Layered Media, Report No. 74/11, Departement of Civil Engineering, Massachusetts institute of technology, Cambridge Massachusetts.

Korobi, T., Minai, R. and Dhinozaki, Y., (1973) Vibration of a Rigid Circular Disk on an Elastic Half-Space Subjected to plan Waves, Theoretical and Applied Mechanics, vol. 21, pp. 109-119.

Lamb, C. V. (1974). Dynamic Response of Structures in Layered Soils, Reprt No. R74-10, Departemnt of Civil Engineering, Massachusetts Institue of Technoloy, Cambridge, Massachusetts.

Luco, J. E., (1976). Torsional Response of Structures for SH Waves: the cas of Hemispherical Foundations, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 66, pp. 109-123.

Hadid, M., (1995). analyse de l'Interaction Cinématique Déterministe et stochastique pour les fondations rigides Bidimensionnelles par une approche Intégrale aux frontières. Thèse de Magister, Ecole nationale polytechnique, Algérie.

Hadid, M., (2003) Approche Intégrale pour le Traitement des Problèmes d'Interactions Multiples entre Structures via le Sol. Thèse doctorat d'état , Ecole nationale polytechnique, Algérie.

Hadid, M. and Berrah. M. K.,(1995). Boundary Element Method Applied to Elastodynamic Problems: Application to Sol-Foundation Interaction, Algerian Journal of Technology; Ecole nationale polytechnique, Serie A, Vol.11, No .1. pp 1-12.

Hadid, M. and Berrah. M. K.,(2001). Structural Response for Stochastic Kinematic Interaction, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.30 , No .1, pp0 79-114.

Halpern, M. R., Christiano, P. Steady-state harmonic response of a rigid plate bearing on a liquid-saturated poroelastic half space. Earthquake Eng Struct Dyn 1986;14:439–54.

Han D. Effects of porosity and clay content on acoustic properties of sandstones and unconsolidated sediments. PhD Thesis. Stanford University ; 1986.

Jin, B., Liu H. Horizontal vibrations of a disk on a poroelastic halfspace. Soil Dyn Earthquake Eng 2000;19:269–75.

Jin, B., Liu, H. Rocking vibrations of rigid disk on saturated poroelastic medium. Soil Dyn Earthquake Eng 2000;19:469–72.

Karabalis, D. L. and Beskos, D. E., (1984). Dynamic Response of 3-D Rigid Surface Foundations by Time Domain Boundary Element Method, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 12, pp, 73-94.

Kausel, E. (1974). Forced Vibration of Circular Foundations on Layered Media, Report No. 74/11, Department of Civil Engineering, Massachusetts institute of technology, Cambridge Massachusetts.

Korobi, T., Minai, R. and Dhinozaki, Y., (1973) Vibration of a Rigid Circular Disk on an Elastic Half-Space Subjected to plan Waves, Theoretical and Applied Mechanics, vol. 21, pp. 109-119.

Lamb, C. V. (1974). Dynamic Response of Structures in Layered Soils, Reprt No. R74-10, Departemnt of Civil Engineering, Massachusetts Institue of Technoloy, Cambridge, Massachusetts.

Luco, J. E., (1976). Torsional Response of Structures for SH Waves: the cas of Hemispherical Foundations, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 66, pp. 109-123.

Luco, J. E., (1986). On Relation Between Radiation and Scattering Problems for Foundations Embedded in an Elastic Half-space, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 5. pp. 97-101.

Luco, J. E. Dynamic interaction of a shear wall with the soil. J Eng Mech ASCE 1969;95:333-46.

Lin, C. H., Lee VW, Trifunac MD. On the reflection of elastic waves in a poroelastic half-space saturated with non-viscous fluid. Report CE 01-04, Department of Civil Engineering, University of Southern California.

Lin, C. H., Lee V. W. and Trifunac M. D. The reflection of plane waves in a poroelastic half-space saturated with inviscid fluid. Soil Dyn Earthquake Eng 2005;25:205-23.

Lee, V. W., Cao, H. Diffraction of SV waves by circular cylindrical canyons of various depths. A.S.C.E., Eng Mech Div 1989;115(9): 2035-56.

Lysmer, j. And richard, f.e., (1966). Dynamic response of footings to vertical loading, Journal of soil Mechanics Foundation Division, ASCE, vol.92, no. Sm1, pp. 65-91

Maria, I., Todorovska, and Youcef Al Rjoub. Plain strain soil-structure interaction model for a building supported by a circular foundation embedded in a poroelastic half-space. Soil Dyn Earthquake Eng 26 (2006) 694-707

Manolis, G. et Beskos, D. (198). Integral formulation and fundamental solution of dynamic poroelasticity and thermoelasticity. Acta Mechanica, 76 :89-104.

Mohammadi, M. et Karabalis, D. L., (1990) 3-D Soil-Structure Interaction Analysis by BEM : Comparison Studies and Computational Aspects, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 9, pp. 96-108.

Nogami, T. M., Kazama : Dynamic response analysis of submerged soil by thin layer element method. Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 1992. 11. 17-26.

Nue, A. Critical porosity and the seismic velocities in rocks. EOS 1992 ; 73(43) supplement : Abstract U31A-2, 66

Philippacopoulos, A. J. Axisymmetric vibration of disk resting on saturated layered half space. J Eng Mech Div ASCE 1989;115(10): 2301-22.

Plona, T. (1980). Observation of a second bulk compressional wave in poreus medium at ultrasonic frequencies. App. Phys. Let., 36 : 259-261.

Avec

$$f_j = \frac{A/V_{\alpha,j}^2 - \rho_{11}R + \rho_{12}Q}{\rho_{12}R - \rho_{22}Q} \quad (j=1,2) \quad (3.35)$$

Solution pour les l'ondes S :

Substituant les équation (3.31b) dans l'équation (3.29), et après l'élimination de Ψ , l'équation de l'onde S pour le squelette solide devient :

$$(\nabla^2 + k_\beta^2)\psi = 0 \quad (3.36)$$

Avec

$$k_\beta = \frac{\omega}{V_\beta} \quad (3.37a)$$

k_β : est les nombre d'onde associée a l'onde S

$$V_\beta = \sqrt{\frac{\mu\rho_{22}}{C}} \quad (3.38b)$$

V_β est la vitesse de l'onde S.

Le potentiel fluide de l'onde S peut être obtenue comme suite :

$$\Psi = f_3\psi \quad (3.39)$$

Avec

$$f_3 = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}} \quad (3.40)$$

3.4.3 Conditions de frontière pour les milieux poreux

Dans les problèmes de la propagation des ondes, l'utilisation des états de frontière appropriés mène à la solution spécifique. Pour établir des conditions de frontière pour des milieux poreux, en plus du comportement élastique du squelette solide, l'interaction liquide solide du sol doit être considérée, Deresiewicz et shalak (1963), Cruz et Spanos (1989) ont proposé des conditions de frontière pour deux milieux poreux différents en contact :

1. Les effets d'une frontière plane libre sur la propagation des ondes dans un demi-espace poro-élastique ont été étudiés par Deresiewicz (1960), où les conditions pour la frontière libre incluent: (1) contrainte nulle du squelette de solide dans les directions normales et tangentielles du plan ; et (2) pression nulle de fluide de pore sur le plan. Dans ce cas, les pores sont ouverts et permet le drainage du fluide.

Prévost, J. (1980a). Constitutive theory for soils. In Proceedings of the workshop on limit equilibrium plasticity and generalized stress-strain in geotechnical engineering. ASCE, Mac Gill University.

Prévost, J. (1980b) Mechanics of continuous porous media. *Int. J. Engng Sci.*, 18: 787-800

Rajapakse, R. K. N. D. and Shah, A. H., (1988). Impedances of Embedded Rigid Strip foundation, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 16, pp. 255-273.

Rajapakse R. K. N. D, Senjuntichai T. Dynamic response of a multilayered poroelastic medium. *Earthquake Eng Struct Dyn* 1995; 24:703–22.

Reissner, e., (1936). Stationäre Axialsymmetrische, Durch eine Schüttelnde Masse Erregte Schwingung eines homogenen elastischen, *Ingenieur Archiv*. Vol. 7, pp. 381-396.

Richard, F. E., Hall, J. R. and Woods, D., (1970). *Vibration of soil and foundations*, Prentice Hill, New Jersey.

Saha, O., (1997). *Investigation Numérique de la Réponse Sismique Déterministe et Stochastique des Fondations Tridimensionnelles*, Thèse de Magister, Ecole Nationale Polytechnique, Algérie.

Sato, T., KAWASE, H. and Yoshida, K., (1983). Dynamic Response of Rigid Foundations Subjected to seismic Waves by Boundary Element Method, *Boundary Element*, Ed. C. A. Brebbia et al. Springer-Verlag, Berlin, pp. 765-774.

Senjuntichai, T., Mani, S. and Rajapakse R.K.N.D. Vertical vibration of an embedded rigid foundation in a poroelastic soil. *Soil Dyn Earthquake Eng* 2006, this issue, doi:10.1016/j.soildyn.2006.01.013.

Spyrakos, C. C. and Beskos, D.E., (1986a). Dynamic Response of rigid Strip Foundation by time domain Boundary Element Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.23 , pp. 1547-1565.

Spyrakos, C. C. and Beskos, D.E., (1986b). Dynamic Response of flexible Strip Foundation by Boundary and Finite Element Method, *Soil Dynamics and earthquake Engineering*, Vol.5, pp.84-96.

Tadeu, A. J. B., Kausel, E. and Verettos, C., (1996). Scattering of Waves by subterranean Structures via the boundary Element Method, *Soil Dynamics And earthquake Engineering*, Vol. 15 , pp. 378-397.

Todorovska, M. I. Effects of the wave passage and the embedment depth during building-soil interaction. *Soil Dyn Earthquake Eng* 1993;12(6):343–55.

Todorovska, M. I. In-plane foundation-soil interaction for embedded circular foundations. *Soil Dyn Earthquake Eng* 1993;12 (5):283–97.

- Todorovska, M. I., Al Rjoub Y. Effects of rainfall on soil–structure system frequency: examples based on poroelasticity and a comparison with full-scale measurements. *Soil Dyn Earthquake Eng* 2006, this issue, doi:10.1016/j.soildyn.2006.01.019.
- Trifunac, M. D. Interaction of a shear wall with the soil for incident plane SH-waves. *Bull Seismological Soc Am* 1972;62:63–83.
- Veletsos, A. S. and Verbic, B. (1973). *Vibration of Viscoelastic Foundation, Earthquake Enngeneering and Structural Dynamics, Vol. 2, pp. 87-102.*
- Waas, G. (1972). *Analysis Méthode for footing Vibrations Through layered Media, Ph.d. Thesis, University of California, Berkeley.*
- Wang, S. and Schmid, G. (1992). Dynamic-structure-soil interaction by FEM and BEM, *Computational Mechanics, Vol. 9, pp. 347-357.*
- Whitman, R. V. and Richard, F. E. (1967). *Design Procedures for Dynamically Loaded Foundations, Journal of Soil Mechanics Foundations Engineering Division, ASCE, Vol.93, SM6, pp. 169-193.*
- Wolf, J. P. (1985). *Dynamic soil-structure interaction, ,Prentice Hall, Engelwoold Cliffs N.J., USA*
- Wolf, J. P. and Darbre, G. R. (1984a). *Dynamic-stiffness Matrix of soil by Boundary-Element Method: Conceptual Aspects, Earthquake engineering and structural dynamics, Vol.12, 385-400.*
- Wolf, J. P. and Darbre, G. R. (1984b). *Dynamic-stiffness Matrix of soil by Boundary-Element Method: Embedded foundations, Earthquake engineering and structural dynamics, Vol.12, 401-416.*
- Wong, H. L. and Luco, J. E. (1978). *Dynamic response of foundations of arbitrary shape, Earthquake engineering and structural dynamics, Vol.4, 579-587.*
- Wong, H. L. and Luco, J. E. (1978). *Dynamic response of foundations to obliquely incident seismic waves, Earthquake engineering and structural dynamics, Vol.6, 3-16.*
- Wong, H. L., Trifunac, M. D. (1974). *Interaction of shear wall with the soil for incident plane SH waves: elliptical rigid foundation. Bull Seismological Soc Am 1974;64:1825–42.*
- Yew, C., Jogi, P. and Gray, K. (1979). *Estimation of mechanical properties of fluide-saturated rocks using the measured wave motions. J. Energy. Mes., Tech., 101 : 112-116.*

Yoshida, K., Sato, T. and Kawase., H., (1984). Dynamique response of rigide foundations subjected to Various types of seismic, Eighth word conference on earthquake engineering, San Francisco, T3, pp. 745-752.

Zeng, X., Rajapakse, R.K.N.D. Vertical vibrations of a rigid disk embedded in a poroelastic medium. *Int J Numer Analyt Meth Geomech* 1999;23:2075–95.

Zhao, J. X. and Moss, P. J. (1997). Calculating the Dynamic Stiffness Matrix of 2-D Foundations by Discrete Wave Number Indirect Boundary Element Methods, *Erarhquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 26, pp. 115-133.

Zienkiewicz, O. and Bettess, P. (1982) Soils and other saturated media under transient, dynamic condition : General fomulation and the validity of various simplifying assumptions. In *Soils Mecanics – transient and cyclic leads*. John Wiley , Son Ltd.

Zeinkiewicz, O., Chan, A., Pastor, M., Paul, D., and Shiomi, T. (1990). Static and dynamic behaviour of soils : A rational approach to quantitative solutions. I-Fully saturated problems. In *Proc. R. Soc. Lond*, pages 285-309.

A1 La méthode des éléments de frontière en élastodynamique :

A1.1 Les équations d'équilibre dynamique :

Plaçons nous dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, nous pouvons alors écrire les équations gouvernant les milieux élastiques exercée sur un solide linéairement élastique, homogène et isotrope occupant un domaine Ω et délimité par une frontière Γ de masse volumique ρ pour une densité d'effort volumique $f(\mathbf{x}, t)$ (figure A1.1).

Les équation d'équilibre dynamique sont définies par :

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (\text{A1.1})$$

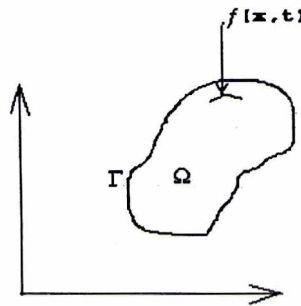


Figure A1.1

L'équation constitutive du matériau est donnée par la loi de Hooke généralisée :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (\text{A1.2})$$

μ et λ : constantes de Lamé.

Les équations du mouvement appelées équations de Navier-Couchy :

$$(c_1^2 - c_2^2) u_{i,ij} + c_2^2 u_{i,ij} + f_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (\text{A1.3})$$

Avec c_1 , c_2 sont les vitesses de propagation des ondes de cisaillement (S) et de compression (P) respectivement. Elle sont donné par :

$$\begin{cases} c_1^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho \\ c_2^2 = (\mu / \rho) \end{cases}$$

A1.2 Théorème de réciprocité

$$\int_{\Gamma} p^{(n)}(x) u^1(x) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho f(x) u^1(x) d\Omega = \int_{\Gamma} p^{1(n)}(x) u(x) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho f^1(x) u(x) d\Omega \quad (\text{A1.4})$$

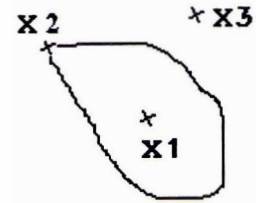
Où, n représente la normale unitaire, extérieure à Ω , sur la frontière Γ

A1.3 Equations intégrales régularisées

$$C_{ij}(\xi)u_i(\xi, \omega) = \int_{\Gamma} \left\{ u_{ij}^*(x, \xi, \omega)q_j(x, \omega) - t_{ij}^*(x, \xi, \omega)u_j(x, \omega) \right\} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho u_{ij}^*(x, \xi, \omega)f_j(x, \omega) d\Omega \quad (\text{A1.5})$$

$C_{ij}(\xi)$: coefficient de la géométrie locale de la frontière défini comme étant :

$$C_{ij}(\xi) = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } \xi = x_1 \\ \frac{1}{2} \delta_{ij} & \text{si } \xi = x_2 \\ 0 & \text{si } \xi = x_3 \end{cases}$$



En utilisant la notation matricielle, la représentation intégrale pour le point 'i' avec une densité volumique f nulle peut être écrite sous la forme :

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} T^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} U^* p d\Gamma \quad (\text{A1.6})$$

Avec :

u et p sont les vecteurs de déplacements et de contraintes :

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad p = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

U^* et T^* sont les tenseurs des solutions fondamentales en termes de déplacements et de contraintes respectivement, associées au plan infini dans le domaine des fréquences, ils sont exprimée comme suit:

$$U^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{21}^* \\ u_{12}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \quad T^* = \begin{bmatrix} t_{11}^* & t_{21}^* \\ t_{12}^* & t_{22}^* \end{bmatrix}$$

A1.4 Formulation intégrale discrétisée : (élément constant)

Supposant maintenant que le contour soit divisé en N éléments. L'équation intégrale (A1.5) se met en omettant l'intégrale du domaine sous la forme discrétisée suivante :

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} T^* d\Gamma \right\} u^j = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} U^* d\Gamma \right\} p^j \quad (\text{A1.7})$$

Utilisant la notation traditionnelle de la BEM, on peut écrire alors l'équation (A1.6) comme suite

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \hat{H}^{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G^{ij} p^j \quad (\text{A1.8})$$

$$\sum_{j=1}^N H^{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G^{ij} p^j \quad (\text{A1.9})$$

avec

$$H^{ij} = \hat{H}^{ij} \quad i \neq j \quad (\text{A1.10})$$

$$H^{ij} = \hat{H}^{ij} + c^i \quad i = j \quad (\text{A1.11})$$

et finalement on a

$$Hu = Gp \quad (\text{A1.12})$$

avec H et G sont des matrices de taille (2N x 2N)

A1.5 Fonction de Green du milieu infini en élastodynamique

On donne ci-dessous les expressions des fonctions de Green stationnaires du type déplacement et contrainte dans-le-plan dans le cas bidimensionnel.

$$u_{ij}^*(x_k, x_l) = \frac{1}{2\pi\rho c_2^2} \left\{ \left[\left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 K_2 \left(\frac{sr}{c_1} \right) - K_2 \left(\frac{sr}{c_2} \right) \right] r_{,j} r_{,j} - \left[\left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \frac{c_1}{sr} K_1 \left(\frac{sr}{c_1} \right) - \frac{c_2}{sr} K_1 \left(\frac{sr}{c_2} \right) - K_0 \left(\frac{sr}{c_2} \right) \right] \delta_{ij} \right\} \quad (\text{A1.13})$$

$$t_{ij}^*(x_k, x_l) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \begin{aligned} & \frac{s}{c_1} \left[\left(2 \left(\frac{c_1}{c_1} \right)^2 - 1 \right) r_{,i} n_{,j} - 2 \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 r_{,j} r_{,j,n} \right] K_1 \left(\frac{sr}{c_1} \right) \\ & + \frac{s}{c_2} \left[2 r_{,j} r_{,j,n} - \delta_{ij} r_{,n} - r_{,j} n_{,i} \right] K_1 \left(\frac{sr}{c_2} \right) \\ & - \frac{2}{r} \left[r_{,j} n_{,i} + r_{,j} n_{,j} + \delta_{ij} r_{,n} - 4 r_{,j} r_{,j,n} \right] \left[K_2 \left(\frac{sr}{c_2} \right) - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 K_2 \left(\frac{sr}{c_1} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.14})$$

Où ω est la fréquence circulaire de l'excitation ; c_1, c_2 sont respectivement les vitesses des ondes de dilatation et de cisaillement ; ρ est la masse volumique du milieu ; $s = i \omega$ est un paramètre complexe ; n_k indiquent les composantes du vecteur normale unitaire à une surface ; δ_{ij} est le symbole de Kronecker ; $r = |x_k - x_l|$ est la distance entre la source et le récepteur, enfin K_m et $H_m^{(2)}$ sont respectivement les fonction de Bessel modifiées et de Hankel de seconde espèce d'ordre m .

A1.6 Traitement des Intégrales singulières (Hadid et Berrah, 1995, 2001)

Dans le cas où l'on suppose des champs de déplacement et de contrainte constants au sein de chaque élément, l , les fonctions à intégrer sont les suivantes

$$H_{ij}^{kl} = \int_{\Gamma_l} t_{ij}^*(x_k, x_l, n_l) d\Gamma \quad (\text{A1.15})$$

$$G_{ij}^{kl} = \int_{\Gamma_l} u_{ij}^*(x_k, x_l) d\Gamma \quad (\text{A1.16})$$

Quand l'élément à intégrer dans l'équation ne coïncide pas avec l'élément chargé, les fonctions à intégrer sont non singulières et l'intégration peut être faite par la méthode de quadrature de Gauss standard avec quatre points. Cependant, en ce qui concerne l'élément chargé, les fonctions intégrées sont singulières.

Intégrant pour le cas de charge dans le -plan l'élément singulier, de longueur $2L$ dans le repère local (ξ, η) (figure--). Vu que $r.n_l = 0$, en remarquant que tous les termes $H_{ij}^{kl} = 0$ et $G_{12}^{kl} = G_{21}^{kl} = 0$. Par conséquent, seuls les termes G_{11}^{kl} et G_{22}^{kl} sont à évaluer.

En utilisant les relations de récurrence des fonctions de Bessel suivantes (Abramowitz et Stegun, 1970)

$$K_n(z) = K_{n-2}(z) + \frac{2n}{z} K_{n-1}(z)$$

$$\text{et } K_n'(z) = -K_{n-1}(z) + \frac{n}{z} K_n(z)$$

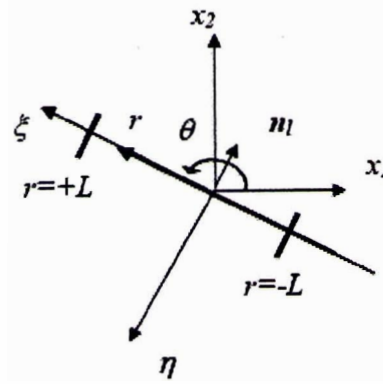


Figure A1.1 axes locales

On peut démontrer que (Hadid et Berrah, 1995)

$$G_{11}^{II} = \frac{1}{\pi \rho c_2^2} \left\{ \left[-\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{c_1}{s} K_1\left(\frac{sL}{c_1}\right) + \frac{c_2}{s} K_1\left(\frac{sL}{c_2}\right) \right] + \int_0^L K_0\left(\frac{sr}{c_2}\right) dr \right\} \quad (\text{A1.17})$$

$$G_{22}^{II} = \frac{1}{\pi \rho c_2^2} \left\{ \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{c_1}{s} K_1\left(\frac{sL}{c_1}\right) - \frac{c_2}{s} K_1\left(\frac{sL}{c_2}\right) + \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 + \int_0^L K_0\left(\frac{sr}{c_2}\right) dr \right\} \quad (\text{A1.18})$$

Par intégration de $K_0(\)$ comme suit : (Hadid et Berrah, 2001)

$$\begin{aligned} \int_0^L K_0\left(\frac{sr}{c}\right) dr &= -\frac{1}{2} \pi i \int_0^L H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r}{c}\right) dr = -\frac{1}{2} \pi i \int_0^L \left[J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) - i Y_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) \right] dr \\ &= -\frac{1}{2} \pi i \left[Q_1\left(\frac{\omega L}{C}\right) - i Q_2\left(\frac{\omega L}{c}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A1.19})$$

On a

$$G_{11}^{II} = \frac{1}{\pi \rho c_2^2} \left\{ \left[-\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{c_1}{s} K_1\left(\frac{sL}{c_1}\right) + \frac{c_2}{s} K_1\left(\frac{sL}{c_2}\right) \right] - \frac{iL}{2 \rho c_2^2} \left[Q_1\left(\frac{\omega L}{c_2}\right) - i Q_2\left(\frac{\omega L}{c_2}\right) \right] \right\} \quad (\text{A1.20})$$

$$G_{22}^{II} = \frac{1}{\pi \rho c_2^2} \left\{ \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{c_1}{s} K_1\left(\frac{sL}{c_1}\right) - \frac{c_2}{s} K_1\left(\frac{sL}{c_2}\right) + \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 - \frac{iL}{2 \rho c_1^2} \left[Q_1\left(\frac{\omega L}{c_1}\right) - i Q_2\left(\frac{\omega L}{c_1}\right) \right] \right\} \quad (\text{A1.21})$$

L'expression de la sous-matrice G^{II} dans le repaire globale se calcule donc aisément par le biais de la matrice de rotation, Θ , comme suit

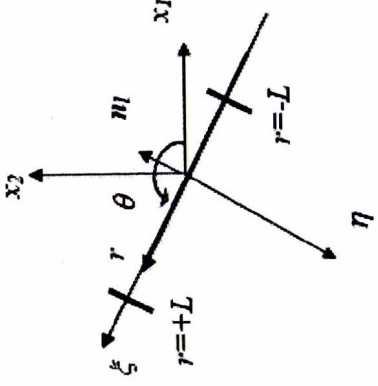


Figure A1.1 axes locales

On peut démontrer que (Hadid et Berrah, 1995)

$$G_{11}^H = \frac{1}{\pi \rho c_2^2} \left\{ - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \frac{c_1}{s} K_1 \left(\frac{sL}{c_1} \right) + \frac{c_2}{s} K_1 \left(\frac{sL}{c_2} \right) + \int_0^L K_0 \left(\frac{sr}{c_2} \right) dr \right\} \quad (\text{A1.17})$$

$$G_{22}^H = \frac{1}{\pi \rho c_2^2} \left\{ \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \frac{c_1}{s} K_1 \left(\frac{sL}{c_1} \right) - \frac{c_2}{s} K_1 \left(\frac{sL}{c_2} \right) + \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 + \int_0^L K_0 \left(\frac{sr}{c_2} \right) dr \right\} \quad (\text{A1.18})$$

Par intégration de $K_0(\)$ comme suit : (Hadid et Berrah, 2001)

$$\begin{aligned} \int_0^L K_0 \left(\frac{sr}{c} \right) dr &= -\frac{1}{2} \pi i \int_0^L H_0^{(2)} \left(\frac{\omega r}{c} \right) dr = -\frac{1}{2} \pi i \int_0^L \left[J_0 \left(\frac{\omega r}{c} \right) - i Y_0 \left(\frac{\omega r}{c} \right) \right] dr \\ &= -\frac{1}{2} \pi i \left[Q_1 \left(\frac{\omega L}{C} \right) - i Q_2 \left(\frac{\omega L}{c} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A1.19})$$

On a

$$G_{11}^H = \frac{1}{\pi \rho c_2^2} \left\{ - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \frac{c_1}{s} K_1 \left(\frac{sL}{c_1} \right) + \frac{c_2}{s} K_1 \left(\frac{sL}{c_2} \right) - \frac{iL}{2 \rho c_2^2} \left[Q_1 \left(\frac{\omega L}{c_2} \right) - i Q_2 \left(\frac{\omega L}{c_2} \right) \right] \right\} \quad (\text{A1.20})$$

$$G_{22}^H = \frac{1}{\pi \rho c_2^2} \left\{ \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \frac{c_1}{s} K_1 \left(\frac{sL}{c_1} \right) - \frac{c_2}{s} K_1 \left(\frac{sL}{c_2} \right) + \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 - \frac{iL}{2 \rho c_1^2} \left[Q_1 \left(\frac{\omega L}{c_1} \right) - i Q_2 \left(\frac{\omega L}{c_1} \right) \right] \right\} \quad (\text{A1.21})$$

L'expression de la sous-matrice G^H dans le repaire globale se calcule donc aisément par le biais de la matrice de rotation, Θ , comme suit

$$(G^{II})^{global} = \Theta^T (G^{II})^{local} \Theta \quad (A1.22)$$

$$\text{Où } \Theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (A1.23)$$

Dans le cas où l'on considère des champs de déplacement et de contrainte linéaire ou quadratique, le traitement des intégrales singulières causées par les fonctions de Green, u_{ij}^* et τ_{ij}^* , peut être accompli en utilisant une procédure numérique employée en l'élastostatique (Brebbia et Dominguez, 1989).

A2 La méthode des éléments de frontière en poro-élastodynamique :

A2.1 Fonction de Green du milieu infini en poro-élastodynamique

Les solutions fondamentales (fonctions de Green du milieu infini) en poro-élasticité sont données comme suite :

$$\psi_{kj} = \sum_{m=1}^3 \left\{ A_{kjm} K_0(i\lambda_m r) + (B_{kjm} r_{,j} + C_{kjm} r_{,k} + D_{kjm} \frac{1}{r}) K_1(i\lambda_m r) + E_{kjm} r_{,k} r_{,j} K_2(i\lambda_m r) \right\} \quad (A2.1)$$

Avec :

$$\mu_{kj}^* = \psi_{kj} \quad \text{pour } k=1,2, \quad j=1,3$$

$$\tau_{ij}^* = \psi_{3j}$$

$K_0(i\lambda_m r)$ et $K_1(i\lambda_m r)$, $K_2(i\lambda_m r)$ sont les fonctions de Bessel modifiées du deuxième type et d'ordre 1 et 2 respectivement.

λ_1 et λ_2 sont les nombre d'ondes de compression P_1 et P_2

λ_3 est le nombre d'ondes de l'onde de cisaillement.

Les différentes termes A_{kjm} , B_{kjm} , C_{kjm} , D_{kjm} , E_{kjm} sont exprimée comme suit :

$$A_{kjm} = (1 - \delta_{k3})(1 - \delta_{j3}) \frac{\delta_{kj} \delta_{3m}}{2\pi\mu} + c_m \delta_{k3} \delta_{j3} \quad (A2.2)$$

$$B_{kjm} = -\lambda_m b_m w \eta \delta_{k3} (1 - \delta_{j3}) \quad (A2.3)$$

$$C_{kjm} = i \lambda_m b_m \gamma \delta_{j3} (1 - \delta_{k3}) \quad (A2.4)$$

$$D_{kjm} = i \lambda_m \delta_{kj} a_m (1 - \delta_{k3})(1 - \delta_{j3}) \quad (A2.5)$$

$$E_{kjm} = \lambda_m^2 a_m (1 - \delta_{k3})(1 - \delta_{j3}) \quad (A2.6)$$

A2.2 Traitement des Intégrales singulières (Dominguez, 1991)

on peut annuler la singularité et les élément nulle dans les sous -matrices sont devenu comme suivant :

$$G^{ii} = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H^{ii} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & H_{23} \\ 0 & H_{32} & -\frac{J}{2} \end{bmatrix}$$

Avec $G_{11}, G_{22}, G_{33}, \hat{H}_{23}, H_{32}$ sont donné comme suite :

$$G_{11}^{ii} = \frac{1}{i \lambda_3 \pi \mu} I_1 + \sum_{m=1}^3 2a_m K_1(i \lambda_m l / 2) i \lambda_m \quad (A2.14)$$

$$G_{22}^{ii} = \frac{1}{i \lambda_3 \pi \mu} I_1 - \sum_{m=1}^3 2a_m i \lambda_m (I_1 + K_1(i \lambda_m l / 2)) \quad (A2.15)$$

$$G_{33}^{ii} = \sum_{m=1}^3 2C_m \frac{1}{i \lambda_m} I_1 \quad (A2.16)$$

$$H_{32}^{ii} = \sum_{m=1}^3 -2i\lambda_m b_m \left[(\lambda + 2\mu)I_1 + 2\mu K_1(i\lambda_m l/2) + \frac{Q}{R} G_{33}^{ii} \right] \quad (A2.17)$$

$$H_{23}^{ii} = -2J \left\{ \sum_{m=1}^3 \lambda_m b_m \omega [I_0 + K_1(i\lambda_m l/2)] \right\} - ZG_{22}^{ii} \quad (A2.18)$$

A3. Réponse d'un demi-espace poro-élastique

On note que θ défini l'angle entre le vecteur direction de propagation et l'axe vertical y . Les champs de déplacements et de contraintes totaux créés par la réflexion des ondes planes incidentes P_1 , SV sur la surface libre du semi-espace $y = 0$ sont donnés dans le demi-espace, poro-élastique, $y \leq 0$, par

A3.1 Déplacements et contraintes pour une onde d'incidence P_1

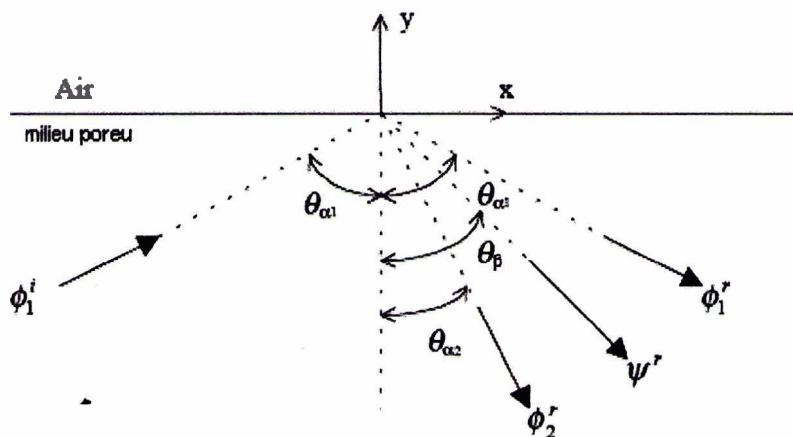


Figure A1. Demi espace poro-élastique soumis à une onde plane P_1

On note :

$$k_0 = k_\beta \sin \theta_\beta = k_{\alpha 1} \sin \theta_{\alpha 1} = k_{\alpha 2} \sin \theta_{\alpha 2}$$

k_{ij} est le nombre d'onde.

Nous pouvons exprimé les contraintes et les déplacements comme suite :

$$u_x = a_0 G_{31,1} e^{ik_{\alpha 1}(x \sin \theta_{\alpha 1} + y \cos \theta_{\alpha 1})} + a_1 G_{31,1} e^{ik_{\alpha 1}(x \sin \theta_{\alpha 1} - y \cos \theta_{\alpha 1})} + a_2 G_{31,2} e^{ik_{\alpha 2}(x \sin \theta_{\alpha 2} - y \cos \theta_{\alpha 2})} - b G_{32} e^{ik_{\beta}(x \sin \theta_{\beta} - y \cos \theta_{\beta})} \quad (\text{A3.1})$$

$$u_y = a_0 G_{41,1} e^{ik_{\alpha 1}(x \sin \theta_{\alpha 1} + y \cos \theta_{\alpha 1})} + a_1 G_{41,1} e^{ik_{\alpha 1}(x \sin \theta_{\alpha 1} - y \cos \theta_{\alpha 1})} + a_2 G_{41,2} e^{ik_{\alpha 2}(x \sin \theta_{\alpha 2} - y \cos \theta_{\alpha 2})} - b G_{42} e^{ik_{\beta}(x \sin \theta_{\beta} - y \cos \theta_{\beta})} \quad (\text{A3.2})$$

$$\tau_{yy} = a_0 \mu G_{11,1} e^{ik_{\alpha 1}(x \sin \theta_{\alpha 1} + y \cos \theta_{\alpha 1})} + a_1 \mu G_{11,1} e^{ik_{\alpha 1}(x \sin \theta_{\alpha 1} - y \cos \theta_{\alpha 1})} + a_2 \mu G_{11,2} e^{ik_{\alpha 2}(x \sin \theta_{\alpha 2} - y \cos \theta_{\alpha 2})} - b \mu G_{12} e^{ik_{\beta}(x \sin \theta_{\beta} - y \cos \theta_{\beta})} \quad (\text{A3.3})$$

$$\tau_{xy} = a_0 \mu G_{21,1} e^{ik_{\alpha 1}(x \sin \theta_{\alpha 1} + y \cos \theta_{\alpha 1})} + a_1 \mu G_{21,1} e^{ik_{\alpha 1}(x \sin \theta_{\alpha 1} - y \cos \theta_{\alpha 1})} - a_2 \mu G_{21,2} e^{ik_{\alpha 2}(x \sin \theta_{\alpha 2} - y \cos \theta_{\alpha 2})} + b \mu G_{22} e^{ik_{\beta}(x \sin \theta_{\beta} - y \cos \theta_{\beta})} \quad (\text{A3.4})$$

$$\sigma = a_0 \mu G_{61,1} e^{ik_{\alpha 1}(x \sin \theta_{\alpha 1} + y \cos \theta_{\alpha 1})} + a_1 \mu G_{61,1} e^{ik_{\alpha 1}(x \sin \theta_{\alpha 1} - y \cos \theta_{\alpha 1})} + a_2 \mu G_{61,2} e^{ik_{\alpha 2}(x \sin \theta_{\alpha 2} - y \cos \theta_{\alpha 2})} \quad (\text{A3.5})$$

A3.2 Déplacements et contraintes pour une onde d'incidence SV

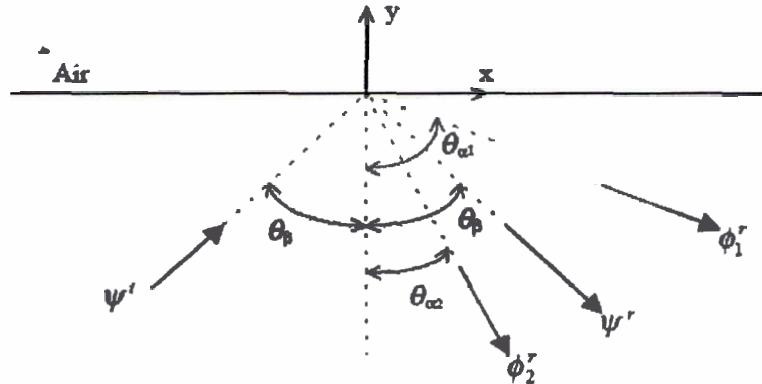


Figure A2. Demi espace poro-élastique soumis à une onde plane SV

avec :

$$k_0 = k_{\beta} \sin \theta_{\beta} = k_{\alpha 1} \sin \theta_{\alpha 1} = k_{\alpha 2} \sin \theta_{\alpha 2}$$

k_{ij} est le nombre d'onde

on note :

$$v_{\beta} = ik_{\beta} \cot \theta_{\beta} = i\sqrt{k_{\beta}^2 - k_0^2}$$

$$v_{\alpha 1} = ik_0 \cot \theta_{\alpha 1} = \begin{cases} i\sqrt{k_{\alpha 1}^2 - k_0^2} & \text{Lorsque } V_0 \geq V_{\alpha 1} \\ -\sqrt{k_0^2 - k_{\alpha 1}^2} & \text{Lorsque } V_0 < V_{\alpha 1} \end{cases}$$

$$v_{\alpha 2} = ik_0 \cot \theta_{\alpha 2} = \begin{cases} i\sqrt{k_{\alpha 2}^2 - k_0^2} & \text{Lorsque } V_0 \geq V_{\alpha 2} \\ -\sqrt{k_0^2 - k_{\alpha 2}^2} & \text{Lorsque } V_0 < V_{\alpha 2} \end{cases}$$

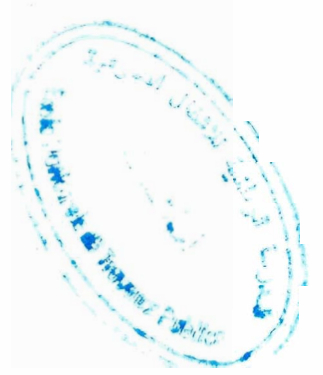
$$\begin{aligned} u_x = & b_0 G_{32}^* e^{ik_0 x + v_{\beta} y} + a_1 G_{31,1}^* e^{ik_0 x - v_{\alpha 1} y} \\ & + a_2 G_{31,1}^* e^{ik_0 x - v_{\alpha 2} y} - b G_{32}^* e^{ik_0 x - v_{\beta} y} \end{aligned} \quad (\text{A3.6})$$

$$\begin{aligned} u_y = & b_0 G_{42}^* e^{ik_0 x + v_{\beta} y} - a_1 G_{41,1}^* e^{ik_0 x - v_{\alpha 1} y} \\ & - a_2 G_{41,2}^* e^{ik_0 x - v_{\alpha 2} y} + b G_{42}^* e^{ik_0 x - v_{\beta} y} \end{aligned} \quad (\text{A3.7})$$

$$\begin{aligned} \tau_{yy} = & b_0 \mu G_{12}^* e^{ik_0 x + v_{\beta} y} + a_1 \mu G_{11,1}^* e^{ik_0 x - v_{\alpha 1} y} \\ & + a_2 \mu G_{11,2}^* e^{ik_0 x - v_{\alpha 2} y} - b \mu G_{12}^* e^{ik_0 x - v_{\beta} y} \end{aligned} \quad (\text{A3.8})$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = & b_0 \mu G_{22}^* e^{ik_0 x + v_{\beta} y} - a_1 \mu G_{21,1}^* e^{ik_0 x - v_{\alpha 1} y} \\ & - a_2 \mu G_{21,2}^* e^{ik_0 x - v_{\alpha 2} y} + b \mu G_{22}^* e^{ik_0 x - v_{\beta} y} \end{aligned} \quad (\text{A3.9})$$

$$\sigma = a_1 \mu G_{61,1}^* e^{ik_0 x - v_{\alpha 1} y} + a_2 \mu G_{61,2}^* e^{ik_0 x - v_{\alpha 2} y} \quad (\text{A3.10})$$



Le tableau suivant illustre les différentes notations de G

$G_{11,j} = -k_{\alpha_j}^2 (M_j - 2 \sin^2 \theta_{\alpha_j})$	$G_{11,j}^* = 2k_0^2 - M_j k_{\alpha_j}^2$
$G_{12} = k_{\beta}^2 \sin 2\theta_{\beta}$	$G_{12}^* = -2ik_0 v_{\beta}$
$G_{21,j} = -k_{\alpha_j}^2 \sin 2\theta_{\alpha_j}$	$G_{21,j}^* = 2ik_0 v_{\alpha_j}$
$G_{22} = -k_{\beta}^2 \cos 2\theta_{\beta}$	$G_{22}^* = 2k_0^2 - k_{\beta}^2$
$G_{31,j} = ik_{\alpha_j}^2 \sin \theta_{\alpha_j}$	$G_{31,j}^* = ik_0$
$G_{32} = ik_{\beta} \cos \theta_{\beta}$	$G_{32}^* = v_{\beta}$
$G_{41,j} = ik_{\alpha_j} \cos \theta_{\alpha_j}$	$G_{41,j}^* = v_{\alpha_j}$
$G_{42} = -k_{\beta} \sin \theta_{\beta}$	$G_{42}^* = -ik_0$
$G_{51,j} = -k_{\alpha_j}^2 (M_j - 2 \cos^2 \theta_{\alpha_j})$	$G_{51,j}^* = -2k_0^2 - (M_j - 2)k_{\alpha_j}^2$
$G_{52} = -k_{\beta}^2 \sin 2\theta_{\beta}$	$G_{52}^* = 2ik_0 v_{\beta}$
$G_{61,j} = -k_{\alpha_j}^2 S_j$	$G_{61,j}^* = -S_j k_{\alpha_j}^2$

Tableau A3.1

Avec $M_j = (P + f_j Q) / \mu$ $S_j = (Q + f_j R) / \mu$