République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique
École Nationale Supérieure des Travaux Publics

**ENSTP**




# MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Matériaux et structures

# EFFET DE LA VARIABILITE SPATIALE DES PROPRIETES DE SOL SUR LA REPONSE DES FONDATIONS FILANTES REPOSANT SUR UN PROFIL DE SOL VISCOELASTIQUE MULTICOUCHE

Préparé par

**Mlle. ZAHAFI AMNA**

Ingénieur d'état en Travaux Publics
Diplômée de L'École Nationale Des Travaux Publics d'Alger-ENTP

Soutenu le 14/12/2010 devant le Jury composé de :

| | | |
|---|---|---|
| Z. DERRICHE | Professeur, ENSTP | Présidente |
| M.HADID | Maître de conférences, ENSTP | Rapporteur |
| N. LAOUAMI | Directeur de Recherche, CGS | Examinateur |
| M. BENSAIBI | Maître de Conférences, U. Blida | Examinateur |
| M.LEBLOUBA | Docteur, ENSTP | Invité |

---

Année universitaire 2009/2010
Ecole Nationale Supérieure des Travaux Publics-ENSTP
Rue Sidi Garidi- Vieux Kouba – Alger

*A mes chers parents*

# Remerciements

D’abord et avant tout, je dois remercier ALLAH le tout puissant de m’avoir donné la force et la patience pour achever mon travail.

Je remercie mon encadreur monsieur M.HADID maître de conférences à l’École Nationale Supérieure des Travaux Publics pour tous ces efforts et ces encouragements continus durant deux années de travail. Monsieur, vous êtes vraiment un modèle de l’excellent professeur qui allie l’expérience de l’encadreur à la sympathie de l’enseignant. Que vous trouviez ici monsieur mes respectueuses considérations.

Je remercie aussi le professeur Z. DERRICHE de me faire l’honneur de présider le jury.

Je remercie monsieur N. LAOUAMI et monsieur M. BENSAIBI d’avoir consacré leur temps précieux pour corriger mon mémoire.

J’adresse un grand remerciement à monsieur M.LEBLOUBA. Je suis très reconnaissante à vous pour votre acceptation d’être un membre de mon jury.

Ce travail aurait été impossible sans le soutien et l’aide des membres de ma famille, qu’ils trouvent ici l’expression de toute ma gratitude.

Enfin, je ne pourrais finir ces remerciements sans penser à mon fiancé dont le soutien et l'encouragement constants ont fortement contribué à l'aboutissement de ce travail. Qu'il trouve ici ma profonde gratitude et reconnaissance.

## ملخص

إن موضوع هذا البحث في تحضيرالماجستيريتمثل في دراسة تأثير التغير الفضائي لعناصر التربة على أجوبة الأساسات. من أجل تقييم هذا التأثير، تم استخدام طريقة التمثيل الغير مباشر للحقول العشوائية الغير ڤوسية (Non-Gaussian). هكذا، نقرن التوزيع الاحتمالي أللوغاريتمي (Lognormale) بالمتغير العشوائي الغير محدود (معامل الإمالة)، و نقرن التوزيع الاحتمالي بيطا (Beta) بالمتغير العشوائي المحدود (معامل التخميد ، نسبة بواسون Poisson، والكتلة الحجمية). لحساب أجوبة الأساسات استخدمنا طريقة المعادلات التكاملية، هذه الطريقة تم استعمالها بصفة مشتركة مع دالات (Green) المتقطعة ل kausel-Peek-Seale. إن النتائج العددية المقدمة تشير إلى أن تأثير التغير الفضائي لعناصر التربة على أجوبة الأساسات مهم جدا وينبغي أخذه بعين الاعتبار و لو بشكل تقريبي في تصميم الهياكل و المقاوم للزلازل.



## SUMMARY

The objective of this work is to study the effect of spatial variability of the soil properties on the response of foundations using probabilistic method of indirect simulation field random non-Gaussian for simulation of soil properties. Hence, one associates the lognormal distribution to the unbounded random variable (shear modulus), and to the bounded one (damping ratio, Poisson's ratio, density), the beta distribution. For calculation of the response of the foundations we used a formulation of boundary elements using discrete Green's functions. The presented numerical results indicate that the effect of spatial variability of the soil properties on the response of foundations is important and should be considered in earthquake resistant design.



## RESUME

L'objectif de ce travail consiste à étudier l'effet de la variabilité spatial des propriétés du sol sur la réponse des fondations en utilisant la méthode probabiliste de simulation indirecte de champs aléatoires non-Gaussien pour la simulation des propriétés de sol. Ainsi, on associe à la variable aléatoire non bornée la loi de distribution lognormale (module de cisaillement), et à la variable aléatoire bornée la loi de distribution beta (coefficient d'amortissement, coefficient de Poisson et la masse volumique). Et pour le calcul de la réponse des fondations on a utilisé une formulation en éléments de frontière avec l'utilisation des fonctions de Green discrètes du milieu stratifié. Les résultats numériques présentés indiquent que l'effet de la variabilité spatiale des propriétés du sol sur la réponse des fondations est important et devrait être considéré dans la conception parasismique des structures.

# Sommaire

**Introduction Générale** 1

**Chapitre 1 Recherche bibliographique** 6

1.1 Introduction 6
1.2 L'interaction sol-structure 7
1.2.1 Généralités sur l'interaction sol-structure 7
1.2.2 Formulation d'un problème d'interaction sol-structure 7
1.2.3 Les méthodes d'analyse de l'interaction sol-structure 10
1.2.4 Évaluation de l'interaction cinématique 11
1.3 La méthode des couches minces (TLM) 12
1.3.1 Introduction 12
1.3.2 Historique de la TLM 13
1.3.3 Les concepts fondamentaux de la TLM 16
1.4 Les méthodes stochastiques de simulations de la variabilité spatiale du sol 18
1.4.1 Introduction 18
1.4.2 Les techniques statistiques pour la modélisation de la variabilité spatiale du sol 18
1.4.3 État de l'art sur l'investigation stochastique des milieux hétérogènes 19
1.5 Conclusion 24

**Chapitre 2 Formulation de la méthode des couches minces** 25

2.1 Introduction 25
2.2 Équation d'ondes continue 26
2.3 Équation d'onde discrète 28
2.4 Modes de propagation 32
2.4.1 Cas dans le plan 32
2.4.2 Cas anti-plan 34

2.5 Fonctions de Green pour les déplacements 34
2.5.1 Cas dans le plan 34
2.5.2 Cas anti-plan 36
2.6 Fonctions de Green pour les contraintes 37
2.6.1 Cas dans le plan 37
2.6.2 Cas anti-plan 40
2.7 Extension de la *TLM* au calcul des fonctions de Green discrètes pour un milieu stratifié semi-infini 40
2.8 Conclusion 42

**Chapitre 3 Méthode des éléments de frontière** 43

3.1 Introduction 43
3.2 Formulation intégrale 44
3.3 Formulation intégrale aux frontières 45
3.4 Formulation intégrale aux frontières discrètes 47
3.5 Évaluation des intégrales aux frontières 47
3.5.1 Charge virtuelle hors de l'élément 48
3.5.2 Charge virtuelle à l'intérieur de l'élément 48
3.6 L'interaction dynamique sol-fondation 49
3.7 Validation des algorithmes développés 50
3.7.1 Fondations filantes superficielles reposant sur un demi-plan homogène 50
3.7.2 Fondation superficielle reposant sur un monocouche homogène surmontant un substratum rocheux 53
3.8 Conclusion 55

**Chapitre 4 Simulation des propriétés physiques et mécaniques des sols** 56

4.1 Introduction 56
4.2 Simulation des propriétés du sol 57
4.3 Variabilité spatiale des propriétés du sol non-bornées 60
4.4 Variabilité spatiale des propriétés du sol bornées 63
4.5 Conclusion 68

**Chapitre 5 Analyse probabiliste de la fonction d'amplification d'un profil de sol** 69

5.1 Introduction 69

5.2 Équation de mouvement 70

5.3 Fonction d'amplification 72

5.4 Variabilité de la fonction d'amplification 74

5.4.1 Données du problème 74

5.4.2 Étude paramétrique sur la fonction d'amplification d'un profil de sol homogène 75

5.5 Conclusion 79

**Chapitre 6 Analyse probabiliste de la réponse des fondations** 80

6.1 Introduction 80

6.2 Variabilité de la réponse des fondations 81

6.2.1 Données du problème 81

6.2.2 Résultats et analyse 82

6.3 Étude paramétrique sur la réponse des fondations reposant sur un profil de sol homogène 86

6.3.1 Influence de la variabilité du module de cisaillement 86

6.3.2 Influence de la variabilité de la masse volumique 86

6.3.3 Influence de la variabilité du coefficient d'amortissement 89

6.3.4 Influence de la variabilité du coefficient de Poisson 89

6.4 Analyse probabiliste de la réponse des fondations reposant sur un profil de sol non homogène 92

6.4.1 Influence du paramètre de non homogénéité $'p'$ sur la réponse des fondations 93

6.4.2 Influence du coefficient de variation 95

6.5 Conclusion 105

**Conclusion générale et recommandations** 107

**Références bibliographiques** 111

# Liste des figures


Figure 1.1 : Schéma d'un système structure fondation soumis aux charges dynamiques 07

Figure 1.2 : Théorème de superposition pour l'interaction sol-structure 08

Figure 2.1 : Discrétisation d'un sol multicouche 28

Figure 3.1: Fondation superficielle reposant sur un demi-espace homogène 51

Figure 3.2 : Déplacement horizontal, vertical et de balancement d'une fondation filante superficielle reposant sur un demi-espace homogène 52

Figure 3.3: Fondation superficielle sur un monocouche homogène reposant sur un substratum rocheux 53

Figure 3.4: Déplacement horizontal, vertical et de balancement de fondation filante superficielle reposant sur un substratum rocheux 54

Figure 4.1 : Dix réalisations du module de cisaillement pour différentes valeurs de $CV_G$ 61

Figure 4.2 : Réalisation typique des histogrammes du module de cisaillement pour différentes valeurs de $CV_G$ 62

Figure 4.3 : 10 réalisations du coefficient de poisson pour différentes valeurs de $CV\upsilon$; ($\upsilon_0$=0.28; $\upsilon_{min}$=0.08; $\upsilon_{max}$=0.48) 66

Figure 4.4 : Réalisation typique des histogrammes du coefficient de poisson pour différentes valeurs de $CV\upsilon$; ($\upsilon_0$=0.28; $\upsilon_{min}$=0.08; $\upsilon_{max}$=0.48) 67

Figure 5.1: Sol stratifié reposant sur un substratum rocheux 73

Figure 5.2: Organigramme du programme informatique 74

Figure 5.3: Monocouche homogène reposant sur un substratum rocheux 75

Figure 5.4: L'amplification en fonction de la variabilité du module de cisaillement G 76

Figure 5.5: L'amplification en fonction de la variabilité de la masse volumique $\rho$ 77

Figure 5.6: L'amplification en fonction de la variabilité du coefficient d'amortissement $\beta$ 78

Figure 5.7: L'amplification en fonction de la variabilité du coefficient de Poisson $\upsilon$ 78

Figure 6.1: Organigramme du programme informatique 82

Figure 6.2: Fondation superficielle sur un monocouche homogène reposant sur un substratum rocheux 83

Figure 6.3 : Réalisation typique des cartes du module de cisaillement, de la masse volumique, du coefficient de Poisson et du coefficient d'amortissement 83

Figure 6.4 : Dix réalisations du déplacement (a) horizontal $F_{xx}$, (b) vertical $F_{zz}$ et (c) de balancement $F_{rr}$ 84

Figure 6.5 : Réalisation typique des histogrammes du déplacement (a) horizontal $F_{xx}$, (b) vertical $F_{zz}$ et (c) de balancement $F_{rr}$ pour *f=1Hz* 85

Figure 6.6 : Déplacement horizontal $F_{xx}$ , vertical $F_{zz}$ et de balancement $F_{rr}$ en fonction de la variabilité de G 87

Figure 6.7 : Déplacement horizontal $F_{xx}$ , vertical $F_{zz}$ et de balancement $F_{rr}$ en fonction de la variabilité de ρ 88

Figure 6.8 : Déplacement horizontal $F_{xx}$ , vertical $F_{zz}$ et de balancement $F_{rr}$ en fonction de la variabilité de β 90

Figure 6.9 : Déplacement horizontal $F_{xx}$ , vertical $F_{zz}$ et de balancement $F_{rr}$ en fonction de la variabilité de υ 91

Figure 6.10: Profil de sol non-homogène et distribution du module de cisaillement en fonction de la profondeur 92

Figure 6.11: L'allure du module de cisaillement en fonction de 'p' 93

Figure 6.12: Valeur absolue des déplacements d'une fondation superficielle reposant sur un profil de sol non-homogène 94

Figure 6.13: Déplacement horizontal $F_{xx}$ , vertical $F_{zz}$ et de balancement $F_{rr}$ en fonction de la variabilité de G pour *p=0.5* 96

Figure 6.14 : Déplacement horizontal $F_{xx}$ , vertical $F_{zz}$ et de balancement $F_{rr}$ en fonction de la variabilité de G pour *p=1* 97

Figure 6.15 : Déplacement horizontal $F_{xx}$ , vertical $F_{zz}$ et de balancement $F_{rr}$ en fonction de la variabilité de ρ pour *p=0.5* 98

Figure 6.16 : Déplacement horizontal $F_{xx}$ , vertical $F_{zz}$ et de balancement $F_{rr}$ en fonction de la variabilité de ρ pour *p=1* 99

Figure 6.17 : Déplacement horizontal $F_{xx}$ , vertical $F_{zz}$ et de balancement $F_{rr}$ en fonction de la variabilité de β pour *p=0.5* 101

Figure 6.18 : Déplacement horizontal $F_{xx}$ , vertical $F_{zz}$ et de balancement $F_{rr}$ en fonction de la variabilité de β pour *p=1* 102

Figure 6.19 : Déplacement horizontal $F_{xx}$ , vertical $F_{zz}$ et de balancement $F_{rr}$ en fonction de la variabilité de υ pour *p=0.5* 103

Figure 6.20 : Déplacement horizontal $F_{xx}$ , vertical $F_{zz}$ et de balancement $F_{rr}$ en fonction de la variabilité de υ pour *p=1* 104

# Introduction générale

Ces dernières années, plusieurs modèles numériques ont été développés pour modéliser les vibrations dans les sols. Ces modèles contiennent des éléments liés à la caractérisation de la source, à la propagation des ondes dans le sol, et à la réponse des structures. La propagation des ondes dans le sol est régie par les propriétés dynamiques de ce dernier, les plus importantes sont le module de cisaillement et le coefficient d'amortissement, elles sont déterminées au moyen des essais in situ ou au laboratoire.

Les propriétés du sol sont fondamentalement variables d'un point à un autre de l'espace. Idéalement, il est préférable d'établir des fonctions déterministes permettant de décrire la variabilité spatiale des propriétés du sol. Cependant, la description déterministe n'est pas faisable à cause du coût prohibitif du prélèvement d'échantillons et des incertitudes induites par les erreurs de mesure. De plus, la variabilité spatiale des propriétés du sol est extrêmement irrégulière et complexe, car les dépôts de sols sont caractérisés souvent par des discontinuités et des anisotropies (Jaksa, 1995). Par conséquent, la recherche dans la matière s'est beaucoup concentrée sur un nombre limité de techniques statistiques pour modéliser et estimer la variabilité spatiale des caractéristiques géotechniques. Parmi ces techniques, on peut citer l'analyse par régression, la géostatistique ainsi que les techniques basées sur les champs aléatoires.

Dans la littérature, la plupart des auteurs ne s'intéressent qu'à des milieux faiblement hétérogènes (coefficient de variation ne dépassant pas les 20 %). Cette limitation est due à une représentation peu réaliste du champ aléatoire qui ne peut pas s'appliquer pour le cas des sols, du fait que les propriétés mécaniques du sol ne sont pas bornées notamment le module élastique. En effet, elles présentent dans la nature des variations spatiales très importantes tel que souligné dans beaucoup d'études en géostatistique. De plus, il a été souligné la non prise en compte d'une manière adéquate de la variabilité spatiale des variables bornées. Dans le cas des sols, on entend par variables bornées, l'ensemble des paramètres ayant des variations faibles et limitées tels que le coefficient de Poisson, la masse volumique, l'angle de frottement et le coefficient d'amortissement.

Le présent travail de magister propose l'utilisation d'une méthode robuste et originale (Nour et al., 2002 et 2003) pour la simulation des champs aléatoires non bornés et bornés, appelée méthode probabiliste de simulation indirecte de champs aléatoires non-Gaussien. Ainsi, on associe à la variable aléatoire non bornée la loi de distribution lognormale (module de cisaillement), et à la variable aléatoire bornée la loi de distribution beta (coefficient d'amortissement, masse volumique).

Basée sur la théorie des champs aléatoires, cette approche considère une hypothèse de base qui consiste à décomposer la variable aléatoire en une tendance déterministe, et en une composante aléatoire décrivant la variabilité autour de cette tendance. Dans une telle décomposition, la tendance représente l'effet des phénomènes qui influencent la formation du sol pendant de longues périodes, tandis que la composante aléatoire décrit les fluctuations de courte durée des états de formation du sol. Ainsi, on associe à la variable aléatoire non bornée la loi de distribution lognormale, et à la variable aléatoire bornée la loi de distribution beta. La détermination du champ beta est obtenue en utilisant une technique de cadrage sur le diagramme de la fonction de distribution de probabilité dont la solution est donnée par la résolution d'une équation non-linéaire. Cette technique permet de calculer analytiquement les paramètres de la distribution beta, en connaissant les données statistiques à savoir, la moyenne, l'écart type et les valeurs extrêmes, et ensuite sa variabilité spatiale par le processus d'itérations via la technique proposée.

Dans ce travail, on propose de calculer la fonction d'amplification d'un profil de sol multicouches viscoélastique ainsi que la réponse des fondations filantes, rigides, reposant sur un profil de sol multicouches viscoélastique et ce, par la méthode des couches minces (TLM). Cette méthode consiste à subdiviser les couches d'un sol en sous couches suffisamment minces, ainsi, il est possible de linéariser les fonctions transcendantales incluses dans la matrice de rigidité et aboutir à des expressions algébriques. La TLM tient compte de la non-homogénéité du sol ainsi que de la radiation à l'infini, de manière implicite et ne nécessite pas un effort numérique supplémentaire. Cette technique a été utilisée par Kausel et Peek (1982), Seale et Kausel (1989) pour l'obtention des fonctions de *Green* en déplacement dues à divers types de charges, dans un profil de sol multicouches surmontant un substratum rocheux ou un semi-espace.

Un programme informatique est développé dans ce sens. On commence d'abord, par la simulation des propriétés du sol, ainsi, on associe à la variable aléatoire non bornée la loi de distribution lognormale (module de cisaillement), et à la variable aléatoire bornée la loi de distribution beta (densité, coefficient d'amortissement et coefficient de Poisson). Ensuite, on calcul la fonction d'amplification d'un profil de sol multicouches viscoélastique et la réponse des fondations filantes rigides, reposant sur un profil de sol multicouches viscoélastique.

Le travail présenté dans ce mémoire est organisé en six (06) chapitres comme suit

- ***Chapitre 1 : Recherche bibliographique***

Ce chapitre est un exposé de l'état de l'art en matière d'analyse de l'interaction sol-structure et des aspects théoriques et techniques des méthodes d'analyse et en particulier, la méthode des couches minces traitant le problème d'interaction sol multicouches viscoélastique-fondation ainsi que les méthodes stochastique de simulations de la variabilité spatiale du sol.

- ***Chapitre 2 : Formulation de la méthode des couches minces***

Ce chapitre consiste à poser les formulations mathématiques associées à la méthode des couches minces *TLM* conduisant aux expressions des déplacements et des contraintes dans un massif de sol multicouches dus à des charges appliquées en surface ou à l'intérieur de ce milieu.

- ***Chapitre 3 : Méthode des éléments de frontière***

Dans ce chapitre, on va d'abord exposer d'une manière succincte la formulation de la méthode des éléments de frontière en élastodynamique. Ensuite, on va s'intéresser à l'application de la méthode des éléments de frontière pour l'évaluation des fonctions d'impédance, et la détermination de la réponse des fondations filantes, rigides, reposant sur des milieux viscoélastiques homogènes ou stratifiés. La méthode des éléments de frontière ainsi formulée utilise les fonctions de Green discrètes de milieu stratifié semi-infini.

- ***Chapitre 4 : Simulation des propriétés du sol***

Dans ce chapitre, on présentera une formulation stochastique pour la simulation des propriétés du sol non bornées (module de cisaillement) et bornées (densité, coefficient d'amortissement et coefficient de Poisson), appelée méthode probabiliste de simulation indirecte de champs aléatoires non-Gaussien (Nour et al., 2002 et 2003). Ainsi, on associe à la variable aléatoire non bornée la loi de distribution lognormale (module de cisaillement), et à la variable aléatoire bornée la loi de distribution beta (coefficient d'amortissement, coefficient de Poisson, la masse volumique).

- ***Chapitre 5 : Analyse probabiliste de la fonction d'amplification d'un profil de sol***

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la propagation des ondes SH, plus particulièrement, à la formulation de la fonction d'amplification d'un profil de sol homogène reposant sur un substratum rocheux ou un demi-plan en utilisant la méthode des couches minces TLM. Pour l'analyse de la variabilité de la fonction d'amplification on va appliquer la méthode probabiliste de simulation indirecte de champs aléatoires non-Gaussien (Nour et al., 2002 et Nour 2003). Une étude paramétrique détaillée est effectuée sur l'influence du coefficient de variation du module de cisaillement, de la densité, du coefficient d'amortissement et du coefficient de Poisson sur les statistiques de la fonction d'amplification d'un profil de sol viscoélastique homogène.

- ***Chapitre 6 : Analyse probabiliste de la réponse des fondations***

Dans ce dernier chapitre, on s'est intéressé à l'application de la méthode probabiliste de simulation indirecte de champs aléatoires non-Gaussien (Nour et al., 2002 et 2003) pour l'analyse de la variabilité de la réponse des fondations filantes, rigides, reposant sur des milieux viscoélastiques homogènes et non homogène. La prédiction des statistiques du

déplacement des fondations est réalisée en utilisant les simulations de Monte Carlo. Une étude paramétrique détaillée est effectuée sur l'influence du coefficient de variation du module de cisaillement, de la densité, du coefficient d'amortissement et du coefficient de Poisson sur les statistiques du déplacement des fondations.

- ***Conclusion générale et recommandations***

On termine ce mémoire par un récapitulatif des résultats obtenus accompagnés de quelques recommandations pour des études futures.

# Chapitre 1

# Recherche bibliographique

## 1.1 Introduction

Les endommagements causés par les séismes indiquent que les propriétés locales du sol telles que le module de cisaillement, l'amortissement, le rapport d'impédance, la géométrie de la fondation, la profondeur de l'enterrement, la stratification du sol, etc. jouent un rôle déterminant dans le comportement dynamique du système sol-fondation.

Il est bien connu que les propriétés du sol sont fondamentalement variables d'un point à un autre de l'espace. Cela est dû principalement à des processus variés et complexes qui ont des effets directs sur la formation des dépôts de sol. Parmi ces effets, on note la sédimentation, les effets climatiques et d'érosion, la topographie, les failles sismiques (déformations tectoniques) etc. De ce fait, la variabilité spatiale pour les sols est une caractéristique naturelle, elle ouvre plusieurs axes de recherches dans des disciplines variées telles que : la géotechnique de l'ingénieur, la géophysique, le génie minier et récemment le génie parasismique.

Ce chapitre est consacré à un exposé de l'état de l'art en matière d'analyse de l'interaction sol-structure et des aspects théoriques et techniques des méthodes d'analyse et en particulier, la méthode des couches minces traitant le problème d'interaction sol multicouches viscoélastique-fondation ainsi que les méthodes stochastique de simulations de la variabilité spatiale du sol.

## 1.2 L'interaction sol-structure

### 1.2.1 Généralités sur l'interaction sol-structure

On entend généralement par interaction sol-structure: L'étude du comportement d'une structure soumise soit à une sollicitation sismique si l'excitation provient du sol, ou bien à une charge appliquée directement à la structure tel qu'un choc ou alors des charges dues au vent comme illustré par la figure 1.1 (Peker, 1984 ; Davidovici, 1985).

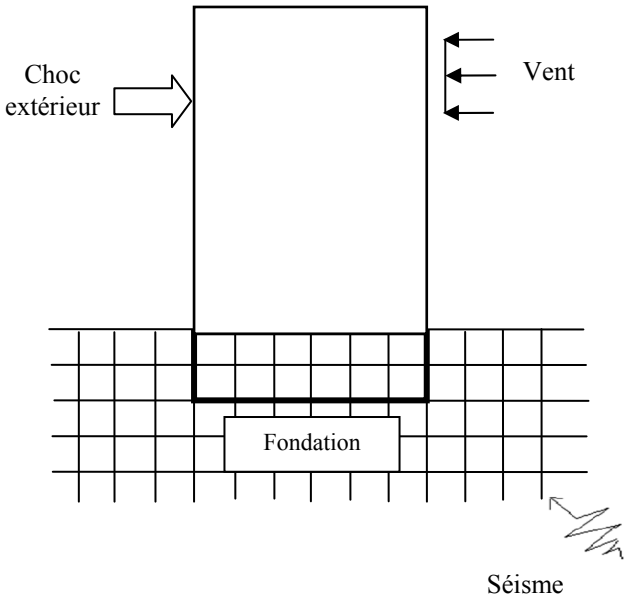



***Figure 1.1 : Schéma d'un système structure fondation soumis aux charges dynamiques***

Cette interaction traduit la modification du mouvement du sol ou de la structure, qui est plus ou moins importante suivant la nature du sol, les caractéristiques de l'ouvrage et son mode de fondation, pour certains ouvrages fondés superficiellement elle peut être négligeable. En revanche l'étude de la réponse sismique du système sol-fondation rend les analyses d'interaction sol-structure impérieuses pour une partie grandissante d'ouvrages importants tels que: barrages, centrales nucléaire, réservoirs, etc.

### 1.2.2 Formulation d'un problème d'interaction sol-structure

Les calculs d'interaction sol-structure s'effectuent à partir de la modélisation du sol et de la structure et d'une définition de la sollicitation sismique. La modélisation tridimensionnelle du sol – milieu tridimensionnel en le considérant comme milieu semi-infini à comportement complexe constitue l'aspect le plus délicat, en effet, l'analyse complète d'un problème d'interaction sol-structure doit prendre en compte (Peker, 1984 ; Davidovici, 1985) :

- La variation des caractéristiques du sol avec la profondeur
- Le comportement non linéaire du sol
- Le schéma complexe de la propagation des ondes qui engendre le mouvement
- L'interaction avec les structures avoisinantes
- La radiation de l'onde en champ lointain

Le respect de ces critères pour les modèles analytiques est difficile, voir impossible. En effet, beaucoup de simplifications doivent être apportées pour permettre le traitement du problème. Le recourt donc à des modèles numériques telles que la méthode des éléments finis est inévitable. Pour les systèmes linéaires, le principe de superposition est admis, les équations de mouvement sont obtenues par référence à la figure 1.2 qui schématise un ensemble sol-structure.

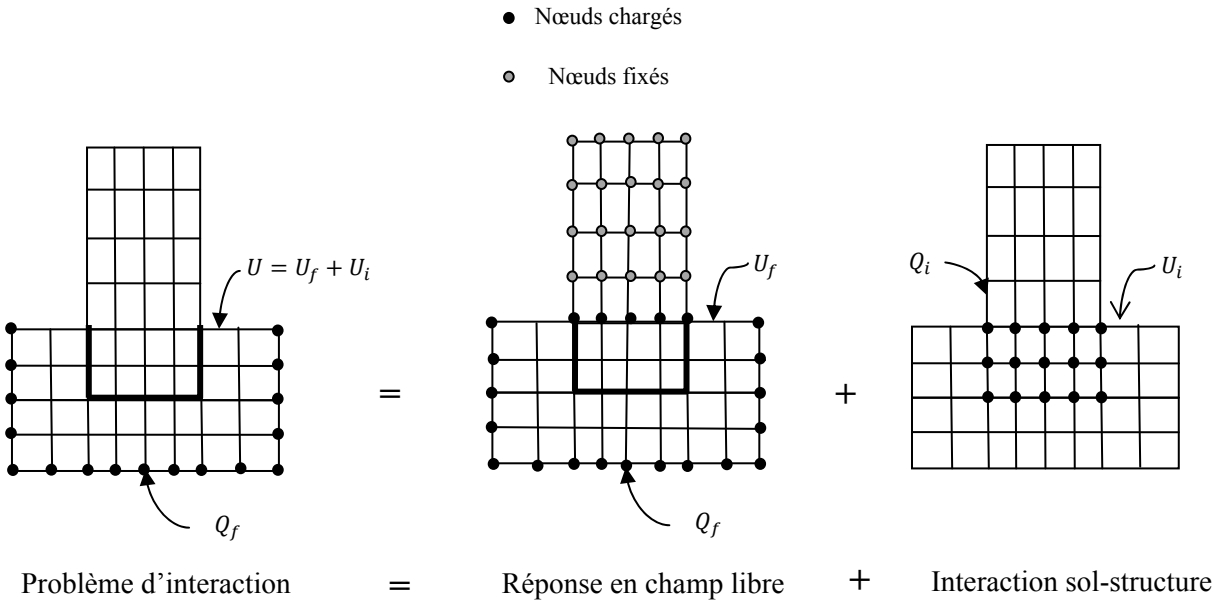



***Figure 1.2 : Théorème de superposition pour l'interaction sol-structure***

Désignons par [M], [C] et [K] les matrices masse, amortissement et rigidité du système. L'équation du mouvement est donnée par (Peker, 1984)

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{Q_f\} \tag{1.1}$$

$\{Q_f\}$ désigne le vecteur chargement induit par un séisme.

En l'absence de la structure, l'équation du mouvement en champ libre est similaire à l'équation 1.1, les indices ***f*** désignent les matrices masse, amortissement et rigidité relatives au champ libre seul. L'équation s'écrira alors (Peker, 1984)

$$[M_f]\{\ddot{U}_f\} + [C_f]\{\dot{U}_f\} + [K_f]\{U_f\} = \{Q_f\} \tag{1.2}$$

D'après le principe de superposition le déplacement total est la somme du déplacement en champ libre et du déplacement de l'interaction.

$$\{U\} = \{U_i\} + \{U_f\} \tag{1.3}$$

Le déplacement de l'interaction $\{U_i\}$ doit satisfaire l'équation suivante :

$$[M_i]\{\ddot{U}_i\} + [C_i]\{\dot{U}_i\} + [K_i]\{U_i\} = \{Q_i\} \tag{1.4}$$

Avec

$$\{Q_i\} = \left[[M] - [M_f]\right]\{\ddot{U}_f\} + \left[[C] - [C_f]\right]\{\dot{U}_f\} + \left[[K] - [K_f]\right]\{U_f\} \tag{1.5}$$

Le vecteur $\{Q_i\}$ est déterminé à partir des déplacements en champ libre. Pour les systèmes linéaires, le problème de l'interaction est décomposé en la somme d'un problème en champ libre (1.2) et d'un problème source (1.4), où les forces $\{Q_i\}$ n'ont de composantes non nulles qu'aux nœuds communs à la structure et le sol. L'équation 1.5 met clairement en évidence qu'il y a interaction dès qu'il y a différence de masse ou de rigidité entre le sol et la structure. En négligeant l'amortissement et dans le cas d'une fondation superficielle infiniment rigide, le dernier terme de l'équation 1.5 s'annule, et le vecteur $\{Q_i\}$ se réduit alors à l'équation suivante

$$\{Q_i\} = \left[[M] - [M_f]\right]\{\ddot{U}_f\} \tag{1.6}$$

Les forces $\{Q_i\}$ appliquées à la base de la structure engendrent un mouvement de support équivalent à un champ de forces d'inerties dans la structure, connu sous le nom ***d'interaction inertielle***. A l'opposé, si on suppose une structure enterrée dont la masse est nulle hors du sol et égale (en valeur et en répartition) à celle du sol pour la partie en terre, les forces $\{Q_i\}$ ont alors pour expression

$$\{Q_i\} = \left[[K] - [K_f]\right]\{U_f\} \tag{1.7}$$

Elles ne résultent que de la différence de rigidité pour la partie en terre entre le sol et la structure, il y a donc interaction même sans différence de masse, on lui donne alors le nom ***d'interaction cinématique***. Elle résulte de la rigidité de la fondation qui l'empêche de suivre les mouvements imposés par le sol. Dans le cas général, l'interaction sol-structure résulte d'une interaction inertielle et d'une interaction cinématique.

### 1.2.3 Les méthodes d'analyse de l'interaction sol-structure

Pour apprécier l'interaction sol-structure il faudra l'évaluer. A cet effet, deux grandes catégories de techniques de résolution sont à distinguer (Peker, 1984 ; Davidovici, 1985)

i) Les méthodes globales (directes)

ii) Les méthodes des sous-structures.

#### 1.2.3.1 Les méthodes globales (directes)

La solution est obtenue en résolvant directement l'équation de mouvement dans le domaine temporel, en utilisant la méthode des éléments finis pour la discrétisation de l'espace, et la méthode des différences finies pour la discrétisation du temps. Les méthodes globales conduisent à une détermination simultanée du mouvement dans le sol et la structure. Ces méthodes ne font pas intervenir la notion de superposition, elles sont donc susceptibles d'appréhender le comportement non linéaire d'un matériau (le sol le plus souvent), ou aux interfaces sol-structure (décollement ou glissement d'ouvrages sur leurs fondations).
Les méthodes globales sont généralement très coûteuses du point de vue temps de calcul, elles ont l'avantage de prendre en compte les hétérogénéités résultant des variations des caractéristiques du sol avec la profondeur. Elles sont en général les plus adaptées et faciles à mettre en œuvre pour les ouvrages enterrés.

#### 1.2.3.2 Les méthodes des sous-structures

Ces méthodes s'appuient sur la décomposition montrée sur la figure 1.2, ou sur une décomposition analogue pour résoudre le problème par étapes, généralement dans le domaine des fréquences. Cette méthode est particulièrement attrayante dans le cas ou une partie du système à une géométrie simple (fondation par exemple) alors que la structure requiert une analyse plus poussée, elle permet aussi d'apprécier la part relative de chaque composante (interaction cinématique ou inertielle) contribuant à la réponse globale. D'autre part, il y a lieu de citer l'avantage de la facilité de mise en œuvre de cette méthode et son aptitude à réutiliser les résultats de l'analyse d'une partie d'un système global qui se retrouverait dans un système global différent. Notons au passage la limitation de cette approche à l'analyse des domaines linéaires, car elle est basée sur le théorème de superposition.

### 1.2.4 Évaluation de l'interaction cinématique

La détermination des solutions exactes (solutions analytiques) d'un problème d'interaction cinématique est très complexe, des solutions analytiques ne sont disponibles que pour quelques configurations géométriques spécifiques. Kobori et al. (1973) ont analysé la vibration d'un disque circulaire reposant sur un demi-espace élastique sollicité par une onde incidente oblique de type *SH* en réduisant le problème à la résolution numérique des équations intégrales de Fredholm. En utilisant une approche similaire, tout en séparant l'effet cinématique de l'effet inertiel, Luco (1976) a déterminé la réponse tortionnelle d'un disque et d'une fondation hémisphérique enterrée et excitée par une onde incidente *SH*. Apsel et Luco (1976) ont généralisé ces derniers résultats au cas d'une fondation ellipsoïdale enterrée. Wong et Trifunac (1974) ont analysé le cas d'une fondation filante avec un enterrement semi-elliptique, sollicité par une onde *SH*.

Pour d'autres formes géométriques, l'utilisation des méthodes numériques est nécessaire ; telles que la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments de frontière (BEM). La BEM apparaît comme un outil de calcul précis et efficace, car ces problèmes d'interaction sont, en général, traités dans des milieux infinis. En effet, les conditions de radiation des ondes à l'infini sont incluses dans la formulation de manière inhérente et la discrétisation n'est nécessaire que sur l'interface sol-fondation en général.

La BEM nécessite l'utilisation de solutions fondamentales appelées ***fonctions de Green***, lesquelles représentent le déplacement dynamique en champ libre quand une charge unitaire est appliquée en un point dans le domaine. Ces solutions fondamentales sont généralement difficiles à obtenir analytiquement, ce qui limite l'utilisation de la BEM. Lorsque le domaine dans lequel on les considère est infini, on obtient explicitement des fonctions de Green classiques du milieu infini. Pour les problèmes de dynamique des sols certains auteurs utilisent les fonctions de Green du demi-espace homogène avec des conditions aux limites de surface libre. L'utilisation de ces fonctions de Green dans une formulation intégrale permet de s'affranchir de la surface libre ce qui réduit le contour à discrétiser. Cependant, elles ne sont pas obtenues sous une forme explicite et malgré la réduction du maillage elles demandent en général un effort de calcul plus important que celles du milieu infini (calcul d'intégrale non bornée). En plus, la stratification du milieu à étudier ajoute une complexité additionnelle au problème, ce qui rend impossible le traitement en utilisant les fonctions de Green classiques d'un milieu infini ou d'un milieu semi-infini d'où, la nécessité d'utiliser des fonctions de

Green discrètes et explicites, développées par Kausel et Peek (1982), bien adaptées à ce type de problème. La mise en œuvre numérique de la méthode des éléments de frontière basée sur les fonctions de Green plane de type infini a fait l'objet de nombreux travaux de recherche dont Banerjee et Butterfield (1981), Brebbia et Dominguez (1989), Hadid (1995), Saha (1997) et Airouche (2000). La détermination de ces fonctions de Green est basée sur une approche consistant à linéariser les termes de rigidité entrant dans la formulation de la matrice de rigidité dynamique (Kausel et Roesset, 1981) en subdivisant le profil du sol en couches minces, cette méthode est appelée '*Méthode des Couches Minces*' (*Thin Layer Method, TLM*).

## 1.3 La méthode des couches minces (Thin Layer Method, TLM)

### 1.3.1 Introduction

La méthode des couches minces (TLM) est un outil très puissant pour l'analyse dynamique (statique) des systèmes mécaniques, dont leurs propriétés matérielles changent suivant une seule direction de l'espace. Les origines de cette méthode datent depuis la fin des années soixante et le début des années soixante-dix. Depuis cette époque, la TLM a trouvé une large gamme d'applications : la simulation sismique, la propagation des ondes à travers les sols multicouches, l'interaction sol-structure et fluide-structure, les vibrations des plaques stratifiées (épaisses) et les essais non destructifs des chaussées.

La TLM est basée sur une discrétisation partielle de l'équation d'onde, dans la direction de la stratification, alors une solution en élément finis est utilisée pour cette direction et d'autres approches numériques sont utilisées pour les autres directions.

Le principal avantage de cette méthode est la substitution des expressions transcendantes par des expressions algébriques, transformant le problème de valeurs propres contenant des fonctions transcendantes, dont la résolution nécessite des techniques numériques onéreuses, en un problème aux valeurs propres algébriques qui peut être résolu par des techniques standards. Un autre avantage, qui est à notre avis très important, est le fait que la TLM permet la détermination analytique des déplacements causés par des charges placées aux interfaces des couches (calcul des transformées de Fourier explicitement) diminuant ainsi l'effort numérique nécessaire.

### 1.3.2 Historique de la méthode des couches minces TLM

Depuis son commencement dans les années 70, la TLM s'est transformée en une technique efficace pour l'analyse du mouvement d'onde dans les sols multicouches et d'autres milieux stratifiés. Puisque la TLM est basée sur une technique de discrétisation partielle, elle exige des efforts informatiques relativement petits en comparaison à d'autres méthodes de discrétisation complètes telles que la méthode de différence finie et la méthode d'élément fini. En outre, la TLM peut être facilement couplée aux méthodes d'éléments finis standard pour des buts pratiques tels que des problèmes d'interaction sol-structure ou des systèmes stratifiés de formes irrégulières. En conclusion, la TLM peut fournir de diverses fonctions de Green pour les milieux multicouches sans n'importe quelle difficulté supplémentaire, qui sont très utiles une fois combinés avec les méthodes d'élément de frontière.

Du point de vue historique, l'origine de la TLM peut être tracée au travail de Lysmer (1970) où il a formulé les équations caractéristiques pour l'analyse de l'onde généralisée de Rayleigh dans des milieux stratifiés. Quelques ans après, Waas (1972) et Lysmer et Waas (1972) ont dérivé les équations caractéristiques directement du principe des travaux virtuels. Waas (1972) a intensivement analysé les mouvements des ondes de Rayleigh et Love dans des problèmes plats et axisymétriques. En outre, ils ont obtenu des frontières de transmission pour les représentations en éléments finis des milieux de sol irréguliers.

À la même période, Nelson et al. (1971), Dong et Nelson (1972), Nelson et Dong (1973) ont développé essentiellement la même méthode qu'ils ont appelé la technique de Ritz, elle permet d'étudier les vibrations libres des plaques orthotropes stratifiés et des cylindres circulaires. Dans leurs études, une fonction quadratique d'interpolation est utilisée pour rapprocher des champs de déplacement dans la direction de la stratification et le principe d'Hamilton est employé pour arriver aux équations libres de vibration. En outre, Datta et al. (1988) ont utilisé les polynômes cubiques d'Hermite et ont obtenu une équation caractéristique du quatrième ordre en nombre d'ondes horizontales pour le cas de la contrainte plane. Alekeseyev et Mikhaylenko (1976) ont développé une technique pour analyser les demi-espaces élastiques verticalement non homogènes (stratifiés) sur la base d'une extension de la méthode de séparation partielle des variables en utilisant la méthode des différences finies au lieu de la méthode des éléments finis. Rukos (1978) a traité la discrétisation partielle du problème aux valeurs limites de l'élastostatique, et a illustré l'exactitude de la méthode pour des domaines finis, semi-infinis et infinis.

Drake (1972a, 1972b, 1980) a appliqué les frontières de transmission de Waas (1972) et Lysmer et Waas (1972) pour analyser les ondes de Love et de Rayleigh dans des milieux stratifiés irréguliers. En même temps, Kausel (1974) a formulé les frontières de transmission dans un système de coordonnées cylindriques pour analyser le comportement vibratoire des fondations circulaires. Kausel et Roesset (1977) ont développé l'hyper-élément semi-analytique pour l'analyse des sols stratifiés finis et infinis. Kausel et Roesset (1981) ont dérivé les matrices de rigidité pour les sols stratifiés sous forme de solutions exactes et discrètes, et ont également présenté leurs avantages par rapport à la matrice de transfert de Haskell-Thompson. Tassoulas et Kausel (1983) ont obtenu les solutions particulières semi-discrètes satisfaisant les conditions de frontières non homogènes pour évaluer le comportement dynamique des fondations circulaires et annulaires.

Kausel (1981) a fourni le cadre le plus général pour le calcul des fonctions de Green pour des milieux stratifiés isotropes au moyen de la TLM. Dans son étude, il a considéré diverses charges dynamiques avec des caractéristiques spatial-temporelles arbitraires par l'intermédiaire des transformations de Fourier et de Hankel. Basé sur ce travail, Kausel et Peek (1982a) ont présenté les fonctions de Green pour les charges dynamiques de divers types tels que des charges de disque, d'anneau, concentrées, des couples sismiques (simples et doubles), etc. Une technique semblable a été également développée indépendamment par Tajimi (1980) pour étudier la rigidité dynamique des fondations superficielles. Olsen et Orcutt (1984) ont formulé la méthode de nombre d'onde /élément fini en utilisant la décomposition discrète en nombre d'onde pour la dépendance horizontale du mouvement d'onde en termes de série de Fourier-Bessel.

Kausel (1986) a étendu la TLM pour modéliser la propagation d'ondes dans les systèmes stratifiés et anisotropes. En outre, Kausel (1993, 1994) a formulé la TLM dans le domaine temporel pour calculer les fonctions de Green dans les systèmes stratifiés entièrement anisotropes. En même temps, Touhei (1994) a formulé une méthode de superposition modale en nombre d'ondes discrets, qui s'est avérée être tout à fait semblable au travail de Kausel (1994). Geller et Ohminato (1994) et Geller et Hatori (1995) ont analysé des milieux latéralement hétérogènes au moyen de la dite méthode de solution directe. Cummins (1994) et Cummins et al. (1994) ont formulés des séismogrammes complets au moyen de la méthode de solution directe d'expansion linéaire pour le cas symétrique et sphérique (SH et SV-P). Park (1998) a formulé la TLM dans le système de coordonnée cylindrique, appelé la méthode des

couches minces cylindrique CTLM, pour obtenir les fonctions de Green pour des milieux élastiques, anisotropes, cylindrique et stratifiés. Kausel (1998a, 1998b et 2006) a présenté les fonctions de Green pour des milieux stratifiés soumis à une classe de source dynamique concentrée telle que des dipôles de force, des explosions et des bi-moments (dipôles de moment).

La modélisation des milieux stratifiés surmontant des demi-espaces élastiques a été développée avec l'application de l'approximation paraxiale (Seale 1985 ; Kausel et Seale 1987 ; Seale et Kausel 1989). Maeda et Kausel (1991) et Kausel (1992) ont intensivement étudié l'exactitude et la stabilité de l'approximation paraxiale dans des demi-espaces et les milieux stratifiés surmontant un substratum élastique.

Kausel et Peek (1982b) ont appliqué les fonctions de Green obtenues avec la TLM à la méthode d'élément de frontière pour l'étude des milieux stratifies avec des irrégularités telles que des cavités et des inclusions. Prosper (2001) a développé la méthode d'élément de frontière basée sur les fonctions de Green calculées au moyen de la TLM et il l'a appliquée à la détection des décollements dans des plaques stratifiés. Schepers (2001) a optimisé la TLM pour calculer des fonctions de Green plus précises pour les champs proches dans le contexte de la méthode d'élément de frontière et a étudié le comportement des fondations sur les demi-espaces élastiques.

Tan (1989) a formulé une méthode d'éléments finis pour des milieux stratifiés solide-fluide au moyen de la formulation des milieux solides, prenant le module de cisaillement dans le domaine liquide égal à zéro. Ghibril (1992) a illustré les possibilités d'utilisation de la TLM pour le problème des ondes dispersées dues aux fissures dièdres finies. En outre, il a analysé les systèmes stratifiés couplés fluide-solide au moyen de la TLM, où il a imposé des conditions de continuité entre les milieux solides et liquides d'une façon rigoureuse au lieu d'employer un module de cisaillement nul pour le fluide. Liu et Achenbah (1994, 1995) ont formulé une méthode d'élément de bande et ont étudié les ondes dispersées par des fissures dans des plaques stratifiés anisotropes. Il convient de noter que la méthode d'élément de bande de Liu et Achenbah est pratiquement identique à la TLM et les hyper-éléments semi-analytiques formulés par Kausel et Roesset (1977), Kausel (1981), et Tassoulas et Kausel (1983). XI et al. (2000) ont appliqué la méthode d'élément de bande pour analyser l'onde dispersée par une fissure dans un cylindre stratifié, axisymétrique et immergé.

Schevenls et al (2007) ont étudié les fonctions de Green d'un sol hétérogène avec des caractéristiques aléatoires. Le module de cisaillement du sol est simulé comme un processus aléatoire non gaussien qui change dans la direction verticale et est caractérisé par une fonction marginale de densité de probabilité et une fonction de corrélation. La méthode d'élément fini stochastique est appliquée à une formulation hybride couche mince – rigidité directe (la TLM pour le profil de sol et la méthode de rigidité pour le demi espace) afin d'obtenir les équations stochastiques de système, qui sont résolues au moyen d'une simulation de Monte Carlo. L'influence des variations du module de cisaillement sur les fonctions de Green est illustrée pour différentes fréquences d'excitation et positions de récepteur.

### 1.3.3 Les concepts fondamentaux de la TLM

La TLM combine les avantages des méthodes des éléments finis avec ceux des méthodes analytiques (Kausel, 1986)

- Le milieu est discrétisé (les couches physiques sont divisées en sous-couches minces).
- Les fonctions d'interpolation sont utilisées pour la variation des déplacements dans la direction de la stratification.
- Les principes des résidus pondérés sont utilisés pour manipuler l'équation d'onde et les conditions aux limites. Les équations du mouvement discrètes résultantes ne contiennent pas des dérivées partielles par rapport à la direction de la discrétisation, mais elles restent continues dans les autres directions et aussi dans le temps.
- Les équations du mouvement sont résolues pour un ou plusieurs termes de sources c.à.d. pour différent second membre de l'équation.
- La version discrète de l'équation d'onde ainsi obtenue est un système d'équations à dérivées partielles qui ne contient pas des dérivées spatiales dans la direction verticale. Pour les ondes SH, le système est de la forme suivante (Kausel, 1986)

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Gu = p(x,t) \tag{2.8}$$

Avec

- *M*, *A* et *G* sont des matrices bloc-triangulaire et symétriques et qui dépendent seulement de l'ordre d'expansion et des propriétés matérielles des couches (Kausel, 1994) ;
- $u = u(x,t)$ est le vecteur déplacement du mouvement à l'interface des couches;
- *p(x,t)* est le vecteur chargement;

- $x$ est la coordonnée horizontale ;
- $t$ est le temps.

Pour résoudre ce systeme d'équations différentielles couplées, on commence par transformer la coordonnée spatialle $x$ en un nombre d'ondes horizontales $k$ en utilisant la transformée de Fourier (Kausel, 1986)

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (k^2 A + G)u = p(k,t) \tag{2.9}$$

Il existe quatre façons différentes pour résoudre cette équation (Kausel, 1986)

1. On utilise le schéma différence finie pour le temps, on résoud à chaque étape de temps pour un réseau dense de nombres d'ondes et on intègre numériquement.

2. On transforme l'equation (2.9) au domaine fréquentiel en utilisant la transformé de Fourier, on résoud cette equation pour les déplacements dans l'espace fréquence-nombre d'ondes et on intègre numériquement selon les fréquences et les nombres d'ondes. Dans ce cas, les matrices de rigidité des couches discrètes n'offrent aucun vrai avantage plus que les matrices de rigidité exactes, données par Kausel et Roessert, 1981, les matrices exactes sont non seulement capables de traiter arbitrairement les couches épaisses mais restent également symétriques et tridiagonales.

3. On transforme l'equation (2.9) au domaine fréquentiel en utilisant la transformé de Fourier, on résoud à chaque fréquence $\omega$ un problème de valeurs propres tridiagonal quadratique avec les valeurs propres $k_l$ (généralement complexes) s'intègrent analytiquement sur les nombres d'onde $k$ et numériquement sur les fréquences en utilisant la FFT. Pour éviter le bouclage temporel, on utilise les fréquences complexes. Pour inclure un espace élastique, on utilise une approximation paraxiale. C'est la solution modale dans le domaine fréquentiel.

4. On transforme l'equation (2.9) au domaine fréquentiel en utilisant la transformé de Fourier, on résoud pour chaque nombre d'onde $k$ un problème en valeures propres tridiagonal et lineaire avec des valeures propres réelles $\omega_l$, on intègre analytiquement selon les fréquences $\omega$ et numériquement selon les nombres d'onde $k$. C'est la solution modale dans le domaine temporel.

## 1.4 Les méthodes stochastiques de simulations de la variabilité spatiale du sol

### 1.4.1 Introduction

La plupart des propriétés des sols sont fortement variables et sont rarement homogènes. L'hétérogénéité du sol peut être classée en deux principales catégories (Elkateb et al., 2003). La première est l'hétérogénéité lithologique qui se manifeste sous la forme de couches minces molles ou fermes ancrées dans un milieu ferme ou mou. La seconde source de l'hétérogénéité est attribuée à la variabilité spatiale inhérente des sols, qui représente la variation des propriétés du sol d'un point à un autre due aux différentes conditions de dépôts des sols et aux différentes histoires de chargement. Les regains d'intérêts envers l'hétérogénéité du sol, sa compréhension phénoménologique, sa modélisation et son influence sur le comportement des ouvrages, ont été entrepris grâce à l'ingénierie pétrolière, où beaucoup d'efforts ont été dévoués dans le cadre de la recherche et la prospection pétrolières.

### 1.4.2 Les techniques statistiques pour la modélisation de la variabilité spatiale du sol

Les outils conventionnels utilisés pour tenir compte de l'hétérogénéité du sol en géotechnique consistaient à introduire d'importants coefficients de sécurité, et de se servir de l'expérience locale. D'où le besoin de développer des outils fiables pour incorporer l'hétérogénéité du sol d'une manière quantitative exploitable par les ingénieurs lors du dimensionnement et du calcul des ouvrages.

Idéalement, il serait préférable d'établir des fonctions déterministes permettant de décrire la variabilité spatiale des propriétés du sol. Cependant la description déterministe n'est pas faisable à cause du coût prohibitif du prélèvement d'échantillons et des incertitudes induites par les erreurs de mesure. De plus, la variabilité spatiale des propriétés du sol est extrêmement irrégulière et complexe, car les dépôts de sols présentent souvent des discontinuités et des anisotropies (Jaksa, 1995). Par conséquent, la recherche dans la matière s'est beaucoup concentrée sur un nombre limité de techniques statistiques pour modéliser et estimer la variabilité spatiale des caractéristiques géotechniques.

Parmi ces techniques, on note, l'analyse par régression, la géostatistique ainsi que les techniques basées sur des champs aléatoires. Le concept des statistiques classiques utilisé pour l'analyse par régression n'est pas suffisant car les matériaux en géotechnique ne sont pas totalement indépendants, mais ils sont autocorrélés. L'utilisation des analyses par régression n'est recommandée que pendant les phases préliminaires d'explorations géotechniques, ou

quand le nombre d'échantillons est relativement petit et les distances entre échantillons sont larges. Alors que les techniques basées sur les géostatistiques s'avèrent très efficaces, leur application en géotechnique doit se faire avec une grande prudence. Cela est dû principalement au fait que pour les applications en géotechnique, le nombre d'échantillons requis est très petit comparé à celui exigé par les géostatistiques. Par conséquent, cette situation génère des erreurs statistiques qui jouent un rôle important dans l'évaluation de la fiabilité.

L'application de la théorie des champs aléatoires en géotechnique, a démontré son utilité comme outil très efficace pour caractériser la variabilité spatiale des sols. Plusieurs approches ont été développées, les unes plus performantes que les autres. On peut citer la technique de la moyenne mobile (MA), le modèle auto-régressive (AR), la méthode de la ligne tournante, la technique de la moyenne subdivisée (LAS) et enfin, la technique basée sur la transformée de Fourier et l'analyse spectrale. Soulignons tout de même l'efficacité et l'attractivité des deux dernières techniques pour leur précision et leur domaine d'application large.

### 1.4.3 État de l'art sur l'investigation stochastique des milieux hétérogènes

Pendant longtemps, les systèmes dynamiques étaient toujours supposés avoir des propriétés bien définies, ou du moins, les variations de ces propriétés étaient faibles devant les variations des forces appliquées. Par conséquent, la plupart des travaux introduisaient l'aléa au niveau de l'excitation sismique en considérant la structure et/ou le sol comme homogène. Dans sa thèse, Romo-Organista (1977) a analysé l'interaction sol-structure dans un environnement stochastique (charge sismique). Vanmarcke (1977a et 1977b) a exposé l'étendue de l'applicabilité des outils de la théorie des vibrations aléatoires aux problèmes de dynamique des sols, à savoir, la détermination de la réponse sismique non-linéaire des profils de sol, ainsi que l'estimation du potentiel de liquéfaction. Faccioli (1977) a proposé une méthodologie pour évaluer l'amplification des profils de sols sous excitation stochastique. Gazetas et al. (1982) ont investigué la réponse non-linéaire d'un barrage en terre sous une excitation non stationnaire. Hao (1992) a analysé la réponse sismique d'une plaque rigide à supports multiples où la variabilité spatiale de l'excitation est spécifiée par le modèle de cohérence de Harichandran et Vanmarcke (1986).

Le développement récent de la méthode des éléments finis stochastiques, a offert une nouvelle dimension à l'analyse des systèmes complexes incertains en dynamique. En dynamique des sols, on peut citer les travaux utilisant un modèles 1D. Tian et Jie (1992) ont

analysé l'influence des caractéristiques mécaniques aléatoires sur la réponse sismique des sites, Zaiguang et Goucheng (1992) ont déterminé la réponse sismique d'un profil de sol multicouche à caractéristiques mécaniques aléatoires, Suzuki et Asano (1992) se sont intéressés à l'évaluation des fonctions de transferts d'un profil de sol à caractéristiques incertaines.

Rahman et Yeh (1999) ont investigué la variabilité de la réponse sismique des profils de sols par une formulation en utilisant la méthode des éléments finis à paramètres stochastiques. Les auteurs dans leur travail ont introduit l'aléa au niveau de l'excitation sismique ainsi qu'au niveau du module de cisaillement. Ils ont utilisé une formulation probabiliste basée sur la méthode des éléments finis déterministes. Le champ aléatoire du module de cisaillement est simulé en le considérant suivre une loi normale (Gaussienne), cela a limité les analyses pour des coefficients de variations ne dépassant pas les 30%. Ainsi, les simulations de Monte Carlo ont été utilisées pour générer le champ aléatoire (1000 réalisations), et analyser des profils de sols à caractéristiques mécaniques non-linéaires.

D'autre part, Wang et Hao (2002), ont investigué l'effet de la variation aléatoire des propriétés du sol sur l'amplification sismique des sites. Les propriétés du sol considérées sont le module de cisaillement, les coefficients de Poisson et d'amortissement, ainsi que le niveau de la nappe phréatique. La méthode de Rosenblueth (1975 ; 1981) a été utilisée pour le calcul de la réponse probabiliste dynamique des sites. Une étude paramétrique a été menée pour étudier l'effet des divers paramètres sur l'amplification des ondes sismiques des sites. Les réponses moyennes et maximales à la surface du sol des sites sont estimées. Les résultats obtenus indiquent que les mouvements estimés à la surface libre diffèrent sensiblement si la variation aléatoire des propriétés du sol et du niveau de la nappe phréatique est prise en compte dans l'analyse.

D'autres auteurs ont mené des analyses avec des modèles 2D/3D ; ainsi, Fenton (1990), Fenton et Vanmarcke (1991 ; 1998) ont étudié la variation spatiale du risque de liquéfaction en utilisant la méthode de simulation de Monte Carlo combinée avec un modèle d'éléments finis déterministes. Les auteurs ont analysé le risque de liquéfaction en considérant la variabilité spatiale de l'input sismique ainsi que celle des propriétés du sol. Ils ont mené une analyse 3D pour la simulation de la variabilité spatiale de l'input sismique, et des propriétés du sol, en l'occurrence, le module élastique, la perméabilité, la porosité, le coefficient de Poisson et l'angle de frottement. La perméabilité et le module élastique ont été modélisés en considérant la distribution lognormale. Les autres propriétés du sol sont considérées comme des champs aléatoires bornés, et modélisés par la fonction de Botlzman sous sa forme

exponentielle. Le problème avec cette modélisation est que le coefficient intégrant la largeur de la bande de la fonction de Botlzman est déterminé par tâtonnement et n'obéit à aucune règle physique, comme mentionné par les auteurs. Malgré que la simulation est en 3D, l'analyse déterministe menée est 1D approximative 3D, car les auteurs ont analysé plusieurs colonnes de sol 1D permettant de donner un nuage de points dans l'espace pour estimer le risque de liquéfaction d'un site donné. De leur côté, Zerva et Harada (1997) ont analysé analytiquement l'effet de la stochasticité des formations géologiques en surface sur la cohérence du mouvement sismique.

Concernant l'interaction sol-structure, Hoshiya et Ishii (1983 ; 1984) ont investigué l'interaction cinématique entre le sol et la structure et cela par l'exploitation des enregistrements en surface libre et sur la structure. Les incertitudes sont introduites au niveau du mouvement en champs libres ignorant toutes incertitudes dans la modélisation du système interactif. Cela est aussi le cas des contributions de Velestos (1989), Gupta et Trifunac (1990) et Lutes et Sarkani (1995). D'autres analyses ont été menées, où les incertitudes sur les propriétés du sol sont introduites. Dans ce contexte, Harren et Fossum (1991) ont développé une approche probabiliste et ont analysé une structure enterrée. Leur approche utilise la méthode des éléments finis, et s'avère moins intensive du point de vue temps machine que la technique de simulation de Monte Carlo. Le sol est modélisé en déformation plane, tandis que l'aléa est introduit au niveau du chargement (propagation d'ondes) ainsi qu'aux propriétés du sol.

Toubalem (1996) et Toubalem et al. (1999) ont utilisé les simulations de Monte Carlo pour une identification probabiliste des fonctions de transfert des sols présentant une variabilité de rigidité horizontale et verticale. Les auteurs ont présenté un modèle constitué par un continuum de ressorts, et ils ont étudié l'effet de la variabilité du milieu sur les valeurs propres et la fonction de transfert. Ils ont aussi adopté le concept de la fondation de Winkler sur un modèle bidimensionnel constitué par un cylindre rigide reposant sur des ressorts à caractéristiques stochastiques dont le mouvement se caractérise par trois degrés de liberté. Ils ont bien observé que la variabilité de la rigidité du sol fait apparaître des modes propres de vibration qui n'apparaissent pas pour le cas d'un sol homogène ; il s'agit des modes stochastiques de balancement et de soulèvement.

D'autres part, Lutes et Sarkani (1995) ont développé une procédure d'analyse modale non classique utilisée pour investiguer la réponse sismique d'un système d'interaction sol-structure avec des propriétés du sol incertaines. Dans leur analyse, les auteurs ont utilisé le modèle simplifié de l'interaction sol-structure développé par Wolf (1994). Cette méthode est

implémentée en utilisant une technique d'intégration de quadrature de Gauss, dont le but est de trouver dans le domaine fréquentiel, la réponse stochastique du système sol-structure. L'étude paramétrique menée a illustré l'effet principal des incertitudes des propriétés du sol sur le système sol-structure, qui est d'altérer la réponse modale au voisinage des fréquences de résonance.

Koutsourelakis et al. (2002) ont estimé le potentiel de liquéfaction en menant une analyse dynamique, 2D, non-linéaire et stochastique d'un système sol-structure. L'objectif est d'évaluer le dommage causé par la liquéfaction sur le système sol-structure sous l'effet des séismes à différentes intensités. Les simulations de Monte Carlo ont été utilisées combinées avec une procédure d'éléments finis. Les auteurs ont modélisé la variabilité spatiale stochastique des propriétés du sol ainsi que l'input sismique, et ils ont déterminé pour deux types de spectres de réponse sélectionnés, les statistiques du tassement et du devers d'une fondation superficielle.

Une analyse critique de ces contributions montre que dans leur majorité, ils s'intéressent à des milieux faiblement hétérogènes (coefficient de variation ne dépassant pas les 20 %). Cette limitation est due à une représentation peu réaliste du champ aléatoire qui ne peut pas s'appliquer pour le cas des sols, du fait que les propriétés mécaniques du sol non bornées et principalement le module élastique présentent dans la nature des variations spatiales importantes tel que souligné dans beaucoup d'études en géostatistique. Additionnellement, il a été souligné la non prise en compte d'une manière adéquate de la variabilité spatiale des variables bornées. Dans le cas des sols, on entend par variables bornées, l'ensemble des paramètres ayant des variations faibles et limitées tels que le coefficient de Poisson, la porosité, l'angle de frottement et le coefficient d'amortissement. Par ailleurs, les quelques contributions récentes qui considèrent le caractère fortement hétérogène des sols (coefficient de variation des variables non-bornées supérieur à 20%) et qui ont pris en compte aussi la variabilité des propriétés du sol bornées sont l'œuvre de Fenton (1990), et Fenton et Vanmarcke (1998) dans une étude portant sur la liquéfaction des sols. Cependant, si les auteurs ont bien tenu compte de la variation bornée du coefficient de Poisson, l'angle de frottement et la porosité en choisissant un champ aléatoire adéquat, il n'en demeure pas moins que la simulation de ces paramètres obéît plus à un tâtonnement qu'à une contrainte physique comme souligné d'ailleurs par les auteurs.

Nour et al. (2002 et 2003) ont proposé une alternative robuste pour la simulation des champs aléatoires non bornés et surtout bornés, appelée méthode probabiliste de simulation indirecte de champs aléatoires non-Gaussien. Ainsi, on associe à la variable aléatoire non bornée la loi de distribution lognormale, et à la variable aléatoire bornée la loi de distribution beta.

La technique de simulation proposée est utilisée conjointement avec la méthode de simulation de Monte Carlo combinée avec la méthode des éléments finis déterministes (MEFD). Cette dernière est considérée comme un outil attractif pour la simulation des milieux incertains à large variabilité, surtout que les techniques basées sur la méthode des éléments finis stochastiques (MEFS) ne s'avèrent pas être pratiques pour les problèmes de sols, car elle considère une variabilité du milieu ne dépassant pas les 20%; d'où son intérêt et son utilisation large pour le cas de structures.

Basée sur la théorie des champs aléatoires, cette approche considère une hypothèse de base qui consiste à décomposer la variable aléatoire en une tendance déterministe, et en une composante aléatoire décrivant la variabilité autour de cette tendance. Dans une telle décomposition, la tendance représente l'effet de phénomènes qui influencent la formation du sol pendant de longues périodes, tandis que la composante aléatoire décrit les fluctuations de courte durée des états de formation du sol. Ainsi, on associe à la variable aléatoire non bornée la loi de distribution lognormale, et à la variable aléatoire bornée la loi de distribution beta. La détermination du champ beta est obtenue en utilisant une technique de cadrage sur le diagramme de la fonction de distribution de probabilité dont la solution est donnée par la résolution d'une équation non-linéaire. Cette technique permet de calculer analytiquement les paramètres de la distribution beta connaissant les données statistiques à savoir, la moyenne, l'écart type et les valeurs extrêmes, et ensuite sa variabilité spatiale par le processus d'itérations via la technique proposée.

## 1.5 Conclusion

A travers cette recherche bibliographique, on a pu montrer l'intérêt et la nécessité de la prise en compte de l'interaction sol-structure dans la conception parasismique des ouvrages. On a exposé aussi les aspects théoriques et techniques des méthodes d'analyse telle que l'approche directe et les méthodes globales et les méthodes des sous-structures.

Il ressort de cette recherche bibliographique que l'interaction dynamique de fondations filantes, rigides reposant ou enterrées dans un profil de sol multicouches viscoélastique est étudiée par la méthode des couches minces *TLM*. Cette méthode consiste à subdiviser les couches d'un sol en sous couches suffisamment minces, ainsi, il est possible de linéariser les fonctions transcendantales inclues dans la matrice de rigidité et aboutir à des expressions algébriques. Cette technique a été utilisée par *Kausel, Peek* et *Seale* pour l'obtention de fonctions de *Green* en déplacement dues à divers types de charges, dans un multicouche surmontant un substratum ou un semi espace.

On a également présenté les principaux travaux de recherche portant sur l'investigation stochastique en dynamique des milieux hétérogènes. D'une façon générale, les auteurs utilisent deux méthodologies, la première est numérique, basée essentiellement sur la méthode des éléments finis, elle est donc la mieux indiquée pour les simulations de Monte Carlo pour le cas des sols ; la deuxième est analytique et elle s'appuie sur la théorie des vibrations aléatoires. Il faut noter l'absence ou la rareté d'approches expérimentales.

# Chapitre 2

# Formulation de la méthode des couches minces (*TLM*)

## 2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, on a présenté les méthodes d'analyse de l'interaction sol-fondation et en particulier, la méthode des couches minces afin de traiter le problème d'interaction sol multicouches viscoélastique-fondation. L'avantage principal de cette méthode est de modéliser le comportement complexe du milieu considéré par un modèle linéaire (linéarisation des déplacements, des contraintes, etc.) on peut ainsi considérer un grand nombre de paramètres (avantage des méthodes numériques). En outre, l'utilisation des intégrations analytiques (transformées de Fourier) permet de diminuer d'une façon considérable le temps de calcul, un autre avantage, qui est à notre avis très important, est le fait que la *TLM* introduit des outils mathématiques généralement réservés à la mécanique des structures (problèmes aux valeurs propres, matrice de rigidité, etc.).

Dans ce chapitre, on exposera les formulations mathématiques associées à la *TLM* conduisant aux expressions des déplacements et des contraintes dans un massif de sol multicouches dus à des charges appliquées en surface ou à l'intérieur de ce milieu.

## 2.2 Équation d'ondes continue

La formulation des équations d'équilibre en élastodynamique d'un corps déformable élastique, occupant le volume Ω de frontière $\Gamma$ peut être établie à partir des équations classiques de l'élastostatique, la contribution des forces d'inertie $\boldsymbol{\rho\ddot{u}}$, dans la configuration de référence du système est comptabilisée dans le bilan des forces élémentaires. En utilisant le repère de référence, $(o, x, y, z)$, les équations d'équilibre et les lois gouvernantes peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante

$$L^t\sigma + f - \rho\ddot{u} = 0 \tag{2.1}$$

$$\sigma = D\,\varepsilon \tag{2.2}$$

$$\varepsilon = L\,u \tag{2.3}$$

où

$u = \{u_x\ u_y\ u_z\}^t$ et $\ddot{u} = \{\ddot{u}_x\ \ddot{u}_y\ \ddot{u}_z\}^t$ sont respectivement les vecteurs déplacement et accélération,

$\sigma = \{\sigma_{xx}\sigma_{yy}\ \sigma_{zz}\ \sigma_{yz}\ \sigma_{xz}\ \sigma_{xy}\}^t$ est le vecteur associé au tenseur symétrique des contraintes

$\varepsilon = \{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\ \varepsilon_{zz}\ \varepsilon_{yz}\ \varepsilon_{xz}\ \varepsilon_{xy}\}^t$ est le tenseur des déformations

$f = \{f_x\ \ f_y\ \ f_z\}^t$ est le vecteur des forces volumiques réparties

$D$ : matrice d'élasticité

$\rho$ : masse volumique du matériau constituant le solide

$L$ : opérateur différentiel exprimé comme suit

$$L^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & . & . & . & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ . & \frac{\partial}{\partial y} & . & \frac{\partial}{\partial z} & . & \frac{\partial}{\partial x} \\ . & . & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & . \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Les solutions doivent aussi satisfaire les conditions aux limites naturelles et essentielles sur la surface $\Gamma$. Les conditions aux limites essentielles ou les conditions aux limites de type déplacements sont données dans ce cas par

$$u = \bar{u} \tag{2.5}$$

où $\bar{u} = \{\bar{u}_x\ \bar{u}_y\ \bar{u}_z\}^t$ est le vecteur des déplacements imposés sur la frontière $\Gamma$.

Les conditions aux limites naturelles ou de type contraintes peuvent être écrites comme suit

$$\Xi^t \sigma = t \tag{2.6}$$

où $t = \{t_x\ t_y\ t_z\}^t$ est le vecteur forces surfaciques appliquées sur la frontière $\Gamma$ et $\Xi$ est la matrice des cosinus directeurs de la normale extérieure *n* à la frontière, exprimée comme suit

$$\Xi = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & 0 & n_z & n_y \\ 0 & n_y & 0 & n_z & 0 & n_x \\ 0 & 0 & n_z & n_y & n_x & 0 \end{bmatrix}^t \tag{2.7}$$

Les conditions initiales sont les suivantes

$$\text{Pour: } t = 0\ sec;\ \begin{cases} u = u_0 = \{u_{0x}\ u_{0y}\ u_{0z}\}^t \\ \dot{u} = \dot{u}_0 = \{\dot{u}_{0x}\ \dot{u}_{0y}\ \dot{u}_{0z}\}^t \end{cases} \tag{2.8}$$

Substituant les équations (2.2) et (2.3) dans l'équation (2.1), on a

$$L^t D L u + f - \rho \ddot{u} = 0 \tag{2.9}$$

D'autre part, l'opérateur différentiel *L* peut être écrit sous la forme

$$L = L_x \frac{\partial}{\partial x} + L_y \frac{\partial}{\partial y} + L_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{2.10}$$

où les matrices $L_x$ , $L_y$ , $L_z$ sont composées de zéros et uns, et obtenues à partir de l'opérateur différentiel par simple inspection. On peut donc réécrire le produit $L^t D L$ sous la forme suivante

$$L^t D L = D_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y}^2 + D_{zz} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2D_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2D_{xz} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + 2D_{yz} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \tag{2.11}$$

avec : $D_{\alpha\beta}$ sont des matrices dépendantes uniquement des propriétés du matériau et sont définies par

$$D_{\alpha\beta} = L_\alpha^t D\ L_\beta \tag{2.12}$$

Le vecteur des contraintes internes dans un plan horizontal $s = \{\sigma_{xz}\ \sigma_{yz}\ \sigma_{zz}\}^t$ est donné par

$$s = L_z^t \sigma = L_z^t D\ L u \tag{2.13}$$

Et finalement, les conditions aux limites dans les régions où les contraintes externes *t* sont prescrites sont de la forme

$$t - s_n = 0 \tag{2.14}$$

où $s_n$ est le vecteur des contraintes associé à la normale $\vec{n}$ .

## 2.3 Équation d'onde discrète

Le milieu physique est constitué de plusieurs couches on subdivise ces couches en sous-couches d'épaisseurs égales au sens des éléments finis de telle façon à pouvoir supposer que le champ de déplacement suit une loi polynomiale dans la direction verticale comme le montre la figure 2.1. Le nombre de sous-couches dépendra de l'ordre de l'interpolation choisie.

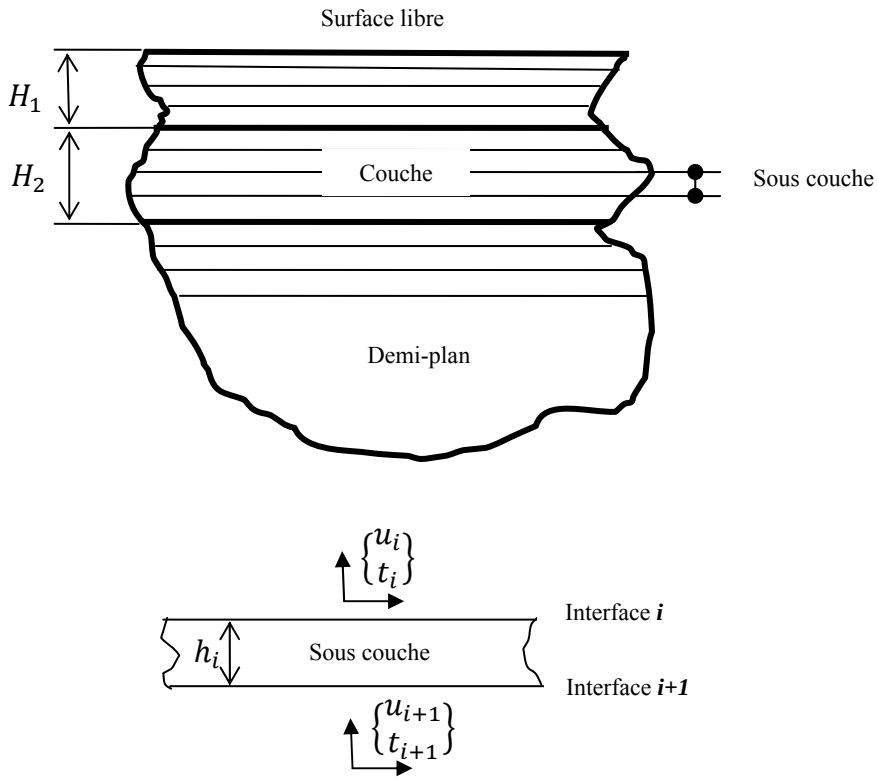



***Figure 2.1 : Discrétisation d'un sol multicouche***

Le champ de déplacement à l'intérieur d'une couche est approximé par l'interpolation suivante

$$u = NU \tag{2.15}$$

Avec $N = N(z)$ est une matrice contenant les fonctions d'interpolation et $U = U(x, y, t)$ est un vecteur colonne composé des déplacements aux interfaces

$$U = (U_1\ U_2\ .\ .\ U_i\ .\ .\ U_N)^t \tag{2.16}$$

En utilisant une interpolation linéaire, l'équation d'onde (2.9) et l'équation (2.14) représentant les conditions aux limites, deviennent non satisfaites du fait de l'approximation introduite, cependant elles exhibent à la fois des forces volumiques résiduelles $f_r = f_r(x, y, z, t)$ et des contraintes résiduelles au niveau des extrémités $t_r = t_r(x, y, z, t)$. D' où

$$L^t DLu + f - \rho\ddot{u} = f_r \tag{2.17a}$$

$$t - s_n = t_r \tag{2.17b}$$

Pour rétablir l'équilibre, on applique le principe des travaux virtuels, ce qui impose que le travail fourni par les forces résiduelles à travers un élément de la couche de volume $(dx\ dy\ dz)$ soit nul, c'est-à-dire

$$\left[\delta\ U_i^t t_{r,i} + \delta\ U_{i+m}^t t_{r,i+m} + \int_0^H \delta u^t f_r dz\right] dxdy = 0 \tag{2.18}$$

Les deux premiers termes représentent le travail virtuel réalisé par les contraintes résiduelles aux interfaces supérieures et inférieures de la couche, alors que le dernier terme correspond à la contribution des forces volumiques résiduelles. En substituant les équations (2.15) et (2.17) dans l'équation (2.18) en supposant que cette expression est valable pour une variation arbitraire du déplacement, on obtient, après intégration, l'équation d'équilibre dynamique d'une couche mince, qui est donnée par

$$P = M\ddot{U} - A_{xx}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - A_{xy}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - A_{yy}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \bar{B}_x\frac{\partial U}{\partial x} - \bar{B}_y\frac{\partial U}{\partial y} + GU \tag{2.19}$$

Et sous forme conventionnelle matricielle

$$P = M\ddot{U} + KU \tag{2.20}$$

où $P$ représente les forces dues aux contraintes externes agissant sur les interfaces d'une sous-couche et $M\ddot{U} + KU$ représente les forces d'inertie et les forces élastiques de déformation respectivement.

Avec

$$M = \int_0^H N^t N \, \rho dz \tag{2.21a}$$

$$A_{\alpha\alpha}=\int_0^H N^t D_{\alpha\alpha} N \, dz \quad \alpha = x, y \tag{2.21b}$$

$$A_{xy}=\int_0^H N^t (D_{xy} + D_{yx}) N \, dz \tag{2.21c}$$

$$\bar{B}_\alpha = \int_0^H N^t D_{\alpha z} N' \, dz - \int_0^H N'^t D_{z\alpha} N \, dz \quad \text{avec: } N' = \frac{\partial N}{\partial z} \tag{2.21d}$$

$$G = \int_0^H N'^t D_{zz} N' \, dz \tag{2.21e}$$

Les matrices $M, A$ et $G$ sont symétriques, alors que la matrice $\bar{B}$ est antisymétriques. Les expressions des matrices élémentaires $A_m, G_m, M_m \; et \; \bar{B}_m$sont données comme suit

$$A_m = \frac{h_m}{6}\begin{bmatrix} 2(\lambda_m + 2G_m) & 0 & 0 & \lambda_m + 2G_m & 0 & 0 \\ 0 & 2G_m & 0 & 0 & G_m & 0 \\ 0 & 0 & 2G_m & 0 & 0 & G_m \\ \lambda_m + 2G_m & 0 & 0 & 2(\lambda_m + 2G_m) & 0 & 0 \\ 0 & G_m & 0 & 0 & 2G_m & 0 \\ 0 & 0 & G_m & 0 & 0 & 2G_m \end{bmatrix} \tag{2.22a}$$

$$G_m = \frac{1}{h_m}\begin{bmatrix} G_m & 0 & 0 & -G_m & 0 & 0 \\ 0 & G_m & 0 & 0 & -G_m & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_m + 2G_m & 0 & 0 & -(\lambda_m + 2G_m) \\ -G_m & 0 & 0 & G_m & 0 & 0 \\ 0 & -G_m & 0 & 0 & G_m & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda_m + 2G_m) & 0 & 0 & \lambda_m + 2G_m \end{bmatrix} \tag{2.22b}$$

$$M_m = \frac{\rho_m h_m}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.22c}$$

$$\overline{B}_m = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -(\lambda_m - G_m) & 0 & 0 & \lambda_m + G_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_m - G_m & 0 & 0 & \lambda_m + G_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda_m + G_m) & 0 & 0 & \lambda_m - G_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\lambda_m + G_m) & 0 & 0 & -(\lambda_m - G_m) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22d)$$

Avec

- $\lambda_m$ : constante de Lamé de la sous couche $m$
- $G_m$ : module de cisaillement de la sous couche $m$
- $\rho_m$ : masse volumique de la sous couche $m$
- $h_m$ : épaisseur de la sous couche $m$

Il est clair que la discrétisation introduite dans l'équation d'onde dans le sens de la stratification élimine sa dépendance par rapport à la coordonnée *z* mais conduit à un système d'équations aux dérivées partielles dont la résolution reste délicate à cause de la présence des dérivées partielles. Pour éliminer cet inconvénient, la résolution doit se faire dans le domaine des fréquences-nombres d'onde. D'où, la réécriture de l'équation d'équilibre dynamique (équation 2.19) dans le domaine des fréquences-nombres d'onde sous la forme

$$\bar{P} = (k_x^2 A_{xx} + k_x k_y A_{xy} + k_y^2 A_{yy} + ik_x \bar{B}_x + ik_y \bar{B}_y + G - \omega^2 M)\bar{U} \quad (2.23)$$

où *k*= nombre d'ondes, *ω*= fréquence d'excitation. La barre indique que la grandeur considérée est représentée dans le domaine fréquence-nombre d'ondes.

Pour plus de simplicité, on considère le cas de déformation planes (en éliminant les termes dépendant de $y$ ) les autres cas seront traités ultérieurement.

Si on procède à la multiplication des composantes verticales du déplacement et de la charge ($U_z$ et $P_z$) par $i = \sqrt{-1}$ et en notant $k_x = k$, on aboutit à l'expression suivante

$$\bar{P} = (k^2 A + kB + G - \omega^2 M)\bar{U} \quad (2.24)$$

Dans l'équation (2.24), *B* est symétrique. L'expression de la matrice élémentaire $B_m$ est donnée comme suit

$$B_m = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_m - G_m & 0 & 0 & -(\lambda_m + G_m) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_m - G_m & 0 & 0 & \lambda_m + G_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_m + G_m & 0 & 0 & -(\lambda_m - G_m) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\lambda_m + G_m) & 0 & 0 & -(\lambda_m - G_m) & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

D'une autre manière, on peut écrire l'équation (2.24) comme suit

$$\bar{P} = K\bar{U} \tag{2.26}$$

où $K$ étant la matrice de rigidité dynamique, les déplacements $\bar{U}$ sont obtenus par inversion de cette matrice. En pratique, cette inversion est réalisée par décomposition spectrale de la matrice de rigidité, cela nécessite la résolution du problème aux valeurs propres quadratiques suivant

$$(k^2A + kB + G - \omega^2 M)\Phi = 0 \tag{2.27}$$

## 2.4 Modes de propagation

Les modes de propagation sont obtenus en résolvant le problème aux valeurs propres quadratiques défini par l'équation (2.27), ce problème peut être transformé en problème linéaire de dimension double. Vu la structure spéciale de la matrice de rigidité, cela ne s'avère pas nécessaire car on peut obtenir un problème aux valeurs propres linéaires de même dimension en réarrangeant la matrice de rigidité par degré de liberté au lieu que ce soit par interfaces (Kausel et Peek, 1982). En effet, on regroupe d'abord les degrés de liberté horizontaux (suivant $x$), ensuite les verticaux (suivant $z$) et enfin les anti-plan (suivant $y$), ce qui nous conduit en posant $C = G - \omega^2 M$ aux problèmes aux valeurs propres suivants

### 2.4.1 Cas dans le plan

$$\left(k^2{}_j\tilde{A} + \tilde{C}\right)z_j = 0 \tag{2.28a}$$

ou

$$y_i^t\left(\tilde{A}k_i^2 + \tilde{C}\right) = 0 \tag{2.28b}$$

où

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_x & \\ A_{xz}^t & A_z \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} C_x & B_{xz} \\ & C_z \end{bmatrix}, z_j = \begin{Bmatrix} \phi_{xj} \\ k_j\phi_{zj} \end{Bmatrix}, y_j = \begin{Bmatrix} k_j\phi_{xj} \\ \phi_{zj} \end{Bmatrix} \tag{2.29}$$

qui est un problème aux valeurs propres en $k^2$. Pré-multiplions l'équation (2.28a) par $y_i^t$, post-multiplions l'équation (2.28b) par $z_j$ et soustrayons les deux équations, les conditions d'orthogonalité sont obtenues

$$y^t{}_i \tilde{A} z_j = 0 \;\; i \neq j \; ; \;\; \neq 0 \;\; i = j \tag{2.30a}$$

$$y^t{}_i \tilde{C} z_j = 0 \;\; i \neq j \; ; \;\; \neq 0 \;\; i = j \tag{2.30b}$$

En définissant les matrices des vecteurs propres gauche et droite ainsi que la matrice des valeurs propres de Rayleigh comme suit

$$Y = \{y_j\} = \begin{bmatrix} \Phi_x K_R \\ \Phi_z \end{bmatrix}; \; Z = \{z_j\} = \begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_z K_R \end{bmatrix}; K_R = \text{diag}\{k_j\} \;\; j = 1,2,\dots,2N \tag{2.31}$$

Le problème aux valeurs propres défini dans l'équation (2.28) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$\tilde{A} Z K^2 + \tilde{C} Z = 0 \tag{2.32a}$$

et

$$\tilde{A}^t Y K^2 + \tilde{C}^t Y = 0 \tag{2.32b}$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des vecteurs propres gauche et droit par rapport aux matrices $\tilde{A}$ et $\widetilde{C}$ les vecteurs propres sont normalisés comme suit

$$Y^t \tilde{A} Z = K_R \tag{2.33a}$$

$$Y^t \tilde{C} Z = -K_R^3 \tag{2.33b}$$

Les valeurs propres sont choisies de telle façon que les modes correspondants aux ondes se propagent de la source vers l'infini. Ce choix correspond aux nombres d'ondes pour lesquels les déplacements à l'infini sont nuls. Un tel choix nous conduit à choisir 2*N* valeurs propres $k_j$ qui satisfont les conditions suivantes (Kausel et Peek, 1982)

- Pour les nombres d'ondes complexes, nous prenons ceux dont la partie imaginaire est négative
- Pour les nombres d'ondes réels, nous gardons ceux qui sont positifs

### 2.4.2 Cas anti-plan

$$\left(k^2{}_j A_y + C_y\right)\phi_{yj} = 0 \tag{2.34a}$$

où

$$\phi_{yi}^t\left(A_y k_i^2 + C_y\right) = 0 \tag{2.34b}$$

Pré-multiplions l'équation (2.34a) par $\phi_{yi}^t$ , post-multiplions l'équation (2.34b) par $\phi_{yj}$ et soustrayions les deux équations, les conditions d'orthogonalité dans le cas anti-plan sont obtenues comme suit

$$\phi_{yi}^t A_y \phi_{yj} = 0 \;\; i \neq j; \neq 0 \; i = j \tag{2.35a}$$

$$\phi_{yi}^t C_y \phi_{yj} = 0 \;\; i \neq j; \neq 0 \; i = j \tag{2.35b}$$

D'où, l'écriture suivante sous la forme matricielle du problème aux valeurs propres défini dans l'équation (2.34)

$$A_y \Phi_y K_L^2 + C_y \Phi_Y = 0 \tag{2.36a}$$

$$A_y^t \Phi_y K_L^2 + C_y^t \Phi_y = 0 \tag{2.36b}$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des vecteurs propres par rapport aux matrices $A_y$ et $C_y$ , les vecteurs propres sont normalisés comme suit

$$\Phi_y^t A_y \Phi_y = I \qquad \Phi_y^t C_y \Phi_y = -K_L^2 \tag{2.37}$$

## 2.5 Fonctions de Green pour les déplacements (Park, 2002; Kausel et Peek, 1982)

### 2.5.1 Cas dans le plan

L'équation d'équilibre dans le domaine des fréquences-nombres d'ondes s'écrit

$$\left(\tilde{A}k^2 + \tilde{C}\right)\bar{U} = \bar{P} \tag{2.38}$$

où

$$\bar{U} = \begin{Bmatrix} \bar{U}_x \\ ik\bar{U}_z \end{Bmatrix} \qquad \bar{P} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_x \\ ik\bar{P}_z \end{Bmatrix} \tag{2.39}$$

En multipliant à gauche l'équation (2.38) par $Y^t$ et en introduisant $ZZ^{-1} = I$, on obtient

$$Y^t\left(\tilde{A}k^2 + \tilde{C}\right)ZZ^{-1}\bar{U} = Y^t\bar{P} \tag{2.40}$$

En considérant les relations de normalisation (2.33), $\bar{U}$ peut être évalué comme suit

$$\bar{U} = Z(Kk^2 - K^3)^{-1}\, Y^t\bar{P} \tag{2.41}$$

D'où la matrice de flexibilité suivante

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_x \\ i\bar{U}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_x D_R \Phi_x^t & k\Phi_x K_R^{-1} D_R \Phi_z^t \\ \frac{1}{k}\Phi_z K_R \Phi_x^t & \Phi_z D_R \Phi_z^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_x \\ i\bar{P}_z \end{Bmatrix} \tag{2.42}$$

avec

$$D_R = (k^2 I - K_R^2)^{-1} \tag{2.43}$$

La réponse est recherchée dans le domaine des espaces (domaine réel), celui des nombres d'ondes n'est qu'un passage pour simplifier la formulation. Pour obtenir les déplacements correspondants à une charge concentrée dans le domaine fréquence-nombre d'ondes, les résultats précédents devront être transformés vers le domaine spatial *x* par le biais de la transformée de Fourier inverse. La transformée de Fourier d'une charge concentrée positionnée à $x = 1$ est égale à l'unité pour tous les nombres d'onde

$$P = \delta(x)\ ,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, e^{ikx}\, dx = 1 \tag{2.44}$$

Ainsi, les déplacements dus à une charge concentrée dans le domaine spatial sont obtenus par la transformée de Fourier inverse comme suit

$$U = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}\, e^{-ikx}\, dk \tag{2.45}$$

Alors

$$\begin{Bmatrix} U_x \\ U_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} \Phi_x E_{|x|} K_R^{-1} \Phi_x^t & i\Phi_x E_{|x|} K_R^{-1} \Phi_z^t\, sgn(x) \\ -i\Phi_z K_R^{-1} E_{|x|} \Phi_x^t\, sgn(x) & \Phi_z E_{|x|} K_R^{-1} \Phi_z^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_x \\ \bar{P}_z \end{Bmatrix} \tag{2.46}$$

où $\quad E_{|x|} = diag\left\{e^{-ik_j|x|}\right\}$

Pour des raisons pratiques l'équation (2.46) peut s'écrire sous la forme analytique suivante

$$u_{xx}^{mn} = \frac{1}{2i}\sum_{l=1}^{2N} \phi_x^{ml}\phi_x^{nl}\frac{e^{-ik_l|x|}}{k_l} \tag{2.47a}$$

$$u_{xz}^{mn} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2N} \phi_x^{ml}\phi_z^{nl}\frac{e^{-ik_l|x|}}{k_l}\, sgn(x) \tag{2.47b}$$

$$u_{zx}^{mn} = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2N} \phi_z^{ml}\phi_x^{nl}\frac{e^{-ik_l|x|}}{k_l} sgn(x) \tag{2.47c}$$

$$u_{zz}^{mn} = \frac{1}{2i}\sum_{l=1}^{2N} \phi_z^{ml}\phi_z^{nl}\frac{e^{-ik_l|x|}}{k_l} \tag{2.47d}$$

*m* est le numéro de l'interface à laquelle le déplacement est calculé et *n* est le numéro de l'interface à laquelle le chargement est appliqué.

### 2.5.2 Cas anti-plan

En suivant la même procédure utilisée dans le cas dans le plan, on peut déterminer le déplacement suivant la coordonnée *y* dans le domaine fréquence-nombre d'ondes

$$\bar{U}_y = \Phi_y D_L \Phi_y^t \bar{P}_y \tag{2.48}$$

où

$$D_L = (k^2 I - K_L^2)^{-1}\ ;\ \ K_L = \text{diag}\{k_j\}\ \ j = 1,2,\dots,N\ \ ;\ \ \Phi_y = [\phi_{yj}] \tag{2.49}$$

Ainsi, les déplacements dus à une charge concentrée dans le domaine spatial sont obtenus par la transformée de Fourier inverse comme suit

$$U_y = \frac{1}{2i}\Phi_y E_{|x|} K_L^{-1} \Phi_y^t \bar{P}_y \tag{2.50}$$

L'équation (2.50) peut s'écrire sous la forme suivante

$$u_{yy}^{mn} = \frac{1}{2i}\sum_{l=1}^{2N} \phi_y^{ml}\phi_y^{nl}\frac{e^{-ik_l^L|x|}}{k_l^L} \tag{2.51}$$

*m* est le numéro de l'interface à laquelle le déplacement est calculé et *n* est le numéro de l'interface à laquelle le chargement est appliqué.

**2.6 Fonctions de Green pour les contraintes** (Park, 2002 ; Pais, 1988)

**2.6.1 Cas dans le plan**

**2.6.1.1 Contraintes sur les plans verticaux**

En utilisant la relation contrainte-déformation, le vecteur des contraintes sur une face verticale est donné par

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}(\lambda+2G)\dfrac{\partial}{\partial x} & \lambda\dfrac{\partial}{\partial z}\\ G\dfrac{\partial}{\partial z} & G\dfrac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_x\\ u_z\end{Bmatrix} \tag{2.52}$$

Le vecteur traction est donné par

$$\begin{Bmatrix}t_x\\ t_z\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix} sgn[n(x)] \tag{2.53}$$

où *sgn*[*n(x)*] est égale au cosinus directeur entre la normal à la surface et l'axe des *x*.

En utilisant l'hypothèse de linéarité des déplacements avec la coordonnée verticale à l'intérieur d'une sous couche mince, on a

$$\begin{Bmatrix}u_x\\ u_z\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\xi & 0 & 1-\xi & 0\\ 0 & \xi & 0 & 1-\xi\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_{xm}\\ U_{zm}\\ U_{xm+1}\\ U_{zm+1}\end{Bmatrix} = N\begin{Bmatrix}U_m\\ U_{m+1}\end{Bmatrix} \tag{2.54}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial z}\begin{Bmatrix}U_m\\ U_{m+1}\end{Bmatrix} = \frac{1}{h}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_m\\ U_{m+1}\end{Bmatrix} \tag{2.55}$$

Dans le but de calculer les forces nodales consistantes, on multiplie les tractions par $\boldsymbol{N}^t$ et on évalue les intégrales sur l'épaisseur des sous couches. On arrive aux résultats suivants

$$\begin{Bmatrix}T_m\\ T_{m+1}\end{Bmatrix} = \left(A_m\frac{\partial}{\partial x} + D_m\right)\begin{Bmatrix}U_m\\ U_{m+1}\end{Bmatrix} \tag{2.56}$$

où $T_m = \begin{bmatrix}T_m\\ T_{m+1}\end{bmatrix}$ représente le vecteur des tractions nodales et $D_m$ est égale à

$$D_m = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & \lambda & 0 & -\lambda\\ G & 0 & -G & 0\\ 0 & \lambda & 0 & -\lambda\\ G & 0 & -G & 0\end{bmatrix} \tag{2.57}$$

Pour évaluer $\frac{\partial}{\partial x}\begin{Bmatrix} U_m \\ U_{m+1} \end{Bmatrix}$ on substitue simplement dans l'équation (2.46) $E_{|x|} = diag\{e^{-ik_j|x|}\}$ par $E_{|x|} = diag\{-ik_j e^{-ik_j|x|} sgn(x)\}$

### 2.6.1.2 Contraintes sur les plans horizontaux

En utilisant l'équation (2.26) dans le domaine des nombres d'ondes (considérons seulement le sommet de deux colonnes de 1.h.s), on a

$$\begin{Bmatrix} \bar{T}_{xm} \\ i\bar{T}_{zm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\tau}_m \\ i\bar{\sigma}_m \end{Bmatrix} sgn\big(n(z)\big) = K_m \begin{Bmatrix} \bar{U}_{xm} \\ i\bar{U}_{zm} \\ \bar{U}_{xm+1} \\ i\bar{U}_{zm+1} \end{Bmatrix} sgn\big(n(z)\big) \tag{2.58}$$

où $K_m = k^2 A_m + kB_m + G_m - \omega^2 M_m$ est la matrice de rigidité dynamique de la sous couche $m$. Vu qu'on a considéré que le sommet de la sous-couche $sgn\big(n(z)\big) = 1$.

- **Charge horizontale**

On considère une charge horizontale à l'interface *n* $\bar{P}_{1n} = 1$, le vecteur déplacement ainsi que le vecteur traction à l'interface *m* sont donnés respectivement comme suit

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_{xm} \\ i\bar{U}_{zm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^{2N} \frac{1}{k^2 - k^2{}_j} \phi_{x\,m,j} \\ \sum_{j=1}^{2N} \frac{k_j}{k} \frac{1}{k^2 - k^2{}_j} \phi_{z\,m,j} \end{Bmatrix} \phi_{xn,j} \tag{2.59}$$

et

$$\begin{Bmatrix} \bar{T}_{xm} \\ i\bar{T}_{zm} \end{Bmatrix} = K_m \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^{2N} \frac{1}{k^2 - k^2{}_j} \phi_{x\,m,j} \\ \sum_{j=1}^{2N} \frac{k_j}{k} \frac{1}{k^2 - k^2{}_j} \phi_{z\,m,j} \\ \sum_{j=1}^{2N} \frac{1}{k^2 - k^2{}_j} \phi_{x\,m+1,j} \\ \sum_{j=1}^{2N} \frac{k_j}{k} \frac{1}{k^2 - k^2{}_j} \phi_{z\,m+1,j} \end{Bmatrix} \phi_{xn,j} \tag{2.60}$$

En tenant compte du fait que $\phi_z K \phi_x^t = 0$ et substituant $A_m k^2$ par $A_m\left(k^2 - k^2{}_j\right) + A_m k^2{}_j$ et $B_m k$ par $B_m k_j \frac{k}{k_j}$, après transformation de Fourier inverse de l'équation (2.58) on obtient la relation suivante

$$\begin{Bmatrix} \bar{T}_{xm} \\ i\bar{T}_{zm} sgn(x) \end{Bmatrix} = \delta(x) A_m \sum_{j=1}^{2N} \begin{Bmatrix} \phi_{xm,j} \\ 0 \\ \phi_{xm+1,j} \\ 0 \end{Bmatrix} \phi_{xn,j} + \sum_{j=1}^{2N} K_m(k_j) \frac{1}{2ik_j} e^{-ik_j|x|} \begin{Bmatrix} \phi_{xm,j} \\ \phi_{zm,j} \\ \phi_{xm+1,j} \\ \phi_{zm+1,j} \end{Bmatrix} \phi_{xn,j} \qquad (2.61)$$

- **Charge verticale**

On considère une charge verticale à l'interface $n$ $\bar{P}_{2n} = 1$ , le vecteur déplacement et le vecteur traction à l'interface $m$ sont donnés respectivement par les équations suivantes

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_{xm} \\ i\bar{U}_{zm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^{2N} \frac{k_j}{k} \frac{1}{k^2 - k^2{}_j} \phi_{x\,m,j} \\ \sum_{j=1}^{2N} \frac{1}{k^2 - k^2{}_j} \phi_{z\,m,j} \end{Bmatrix} i\phi_{zn,j} \qquad (2.62)$$

et

$$\begin{Bmatrix} \bar{T}_{xm} \\ i\bar{T}_{zm} \end{Bmatrix} = K_m \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^{2N} \frac{k_j}{k} \frac{1}{k^2 - k^2{}_j} \phi_{x\,m,j} \\ \sum_{j=1}^{2N} \frac{1}{k^2 - k^2{}_j} \phi_{z\,m,j} \\ \sum_{j=1}^{2N} \frac{k_j}{k} \frac{1}{k^2 - k^2{}_j} \phi_{x\,m+1,j} \\ \sum_{j=1}^{2N} \frac{1}{k^2 - k^2{}_j} \phi_{z\,m+1,j} \end{Bmatrix} i\,\phi_{zn,j} \qquad (2.63)$$

En tenant compte du fait que $\phi_x K \phi_z^t = 0$ et substituant $A_m k^2$ par $A_m\left(k^2 - k^2{}_j\right) + A_m k^2{}_j$ et $B_m k$ par $B_m k_j \frac{k}{k_j}$, après transformation de Fourier inverse de l'équation (2.63) on obtient la relation suivante

$$\begin{Bmatrix} -iT_{xm} \\ T_{zm} \end{Bmatrix} = \delta(x) A_m \sum_{j=1}^{2N} \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_{zm,j} \\ 0 \\ \phi_{zm+1,j} \end{Bmatrix} \phi_{zn,j} + \sum_{j=1}^{2N} K_m(k_j) \frac{1}{2ik_j} e^{-ik_j|x|} \begin{Bmatrix} \phi_{xm,j} \\ \phi_{zm,j} \\ \phi_{xm+1,j} \\ \phi_{zm+1,j} \end{Bmatrix} \phi_{zn,j} \qquad (2.64)$$

### 2.6.2 Cas anti-plan

#### 2.6.2.1 Contraintes sur les plans verticaux

En utilisant l'approche précédente appliquée au cas dans le plan, on obtient

$$T_{ym} = A_m \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} U_{y\,m} \\ U_{y\,m+1} \end{Bmatrix} sgn(n_x) \qquad (2.65)$$

Pour évaluer $\frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} U_{y\,m} \\ U_{y\,m+1} \end{Bmatrix}$ on substitue simplement dans l'équation (2.48)

$E_{|x|} = diag\{e^{-ik_j|x|}\}$ par $E_{|x|} = diag\{-ik_j e^{-ik_j|x|} sgn(x)\}$

#### 2.6.2.2 Contraintes sur les plans horizontaux

Suivant la procédure utilisée dans le cas dans le plan, on obtient pour le cas où $sgn(n_z) = 1$

$$T_{ym} = \delta(x) A_m \sum_{j=1}^{2N} \begin{Bmatrix} \phi_{y\,m,j} \\ \phi_{y\,m+1,j} \end{Bmatrix} \phi_{y\,n,j} + \sum_{j=1}^{2N} K_m(k_j) \frac{1}{2ik_j} e^{-ik_j|x|} \begin{Bmatrix} \phi_{y\,m,j} \\ \phi_{y\,m+1,j} \end{Bmatrix} \phi_{yn,j} \qquad (2.66)$$

## 2.7 Extension de la *TLM* au calcul des fonctions de Green discrètes pour un milieu stratifié semi-infini

Afin d'étendre la méthode des couches minces au calcul des fonctions de Green d'un profil de sol multicouche surmontant un demi-plan, l'écriture de la matrice de rigidité du demi-plan sous une forme quadratique est nécessaire (Seale et Kausel, 1989). La matrice d'impédance d'un plan semi-infini peut être donc exprimée sous la forme d'une série de puissance du nombre d'onde (expansion en série de Taylor). Une approximation de second ordre est obtenue en calculant les trois premiers termes de la série

$$K(k) = K(0) + kK'(0) + \frac{1}{2}k^2 K''(0) \qquad (2.67)$$

Seale et Kausel (1989) ont montré que cette approximation correspond exactement aux conditions aux frontières paraxiales d'un milieu semi-infini proposées par Clayton et Engquist (1977). Les résultats obtenus pour le cas d'un demi-plan isotrope sont (Seale et Kausel, 1989)

$$k_{yy} = i\omega\rho c_2 - \frac{1}{2} ik^2 \frac{G}{\omega} c_2 \tag{2.68a}$$

$$k_{xx} = i\omega\rho c_2 + \frac{1}{2} ik^2 \frac{c_2}{\omega} (G - 2\sqrt{G}\sqrt{\lambda + 2G}) \tag{2.68b}$$

$$k_{xz} = k\left(\sqrt{\frac{\lambda + 2G}{G}} - 2\right) \tag{2.68c}$$

$$k_{zz} = i\omega\rho c_1 + \frac{1}{2} ik^2 \frac{c_1}{\omega} (\lambda + 2G - 2\sqrt{G}\sqrt{\lambda + 2G}) \tag{2.68d}$$

où

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad : \text{vitesse d}'\text{onde de dilatation}$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad : \text{vitesse d}'\text{onde de cisaillement}$$

$\boldsymbol{\lambda}$ : constante de Lamé; $\boldsymbol{G}$ : module de cisaillement et $\boldsymbol{\rho}$ : masse volumique.

L'équation (2.68) est alors utilisée pour former la matrice d'impédance d'un demi-plan. Cette équation est combinée avec les matrices de rigidité des sous-couches de profil de sol pour former la matrice de rigidité globale, une fois la matrice de rigidité globale du profil de sol multicouche formée, la procédure pour l'obtention des fonctions de Green est la même que pour le cas d'un multicouche surmontant un substratum rocheux.

L'approximation algébrique définie par l'équation (2.68) absorbera complètement les ondes se propageant verticalement et à des degrés moindres (les ondes ayant une certaine inclinaison par rapport à l'axe vertical). Cependant, une bonne précision peut être obtenue si une série de sous-couches est rajoutée sur le demi-espace (Seale, 1985; Maeda et Kausel, 1991).

## 2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, on a exposé la méthode de *Kausel* pour la détermination des fonctions de *Green* nécessaires pour le calcul semi-analytique des fonctions d'impédance. Le sol est discrétisé en un ensemble de couches minces dont le nombre est fonction de l'épaisseur des couches constituant le sol, du nombre de chargements possibles au sein du site et de l'épaisseur maximale admise pour une longueur d'onde donnée. Une fois la discrétisation effectuée, l'hypothèse sur la linéarité des déplacements entre deux interfaces données est introduite. Cette linéarité conduit à une matrice de rigidité algébrique en fonction du nombre d'onde $k$ dont les modes de propagation sont obtenus en résolvant un problème aux valeurs propres quadratiques. Ce dernier est facilement transformé en un problème linéaire par un simple réarrangement de la matrice par degrés de liberté au lieu que ce soit par interfaces.

La résolution de ce problème conduit à un nombre de valeurs propres égal à six fois le nombre de couches. Parmi ces valeurs, seule la moitié correspond à des ondes ayant leur source au point d'application de la charge et se dissipent vers l'infini. En utilisant les propriétés d'orthogonalité de ces modes propres, l'inversion spectrale de la matrice de rigidité est effectuée conduisant ainsi à une matrice de flexibilité qui est fonction des valeurs et modes propres du système. Enfin, les fonctions de *Green* en déplacement et en contraintes sont exposées d'une manière explicite.

Cette méthode, contrairement aux autres méthodes disponibles pour les sols multicouches, donne des fonctions de *Green* sous forme analytique, moins approximatives mais plus faciles à calculer et donc moins coûteuses.

# Chapitre 3

# Méthode des éléments de frontière

## 3.1 Introduction

La Méthode des éléments de frontières *BEM* constitue un outil de calcul précis et efficace qui s'adapte particulièrement bien à l'étude dynamique des fondations superficielles et enterrées dans un milieu semi-infini. En effet, Les conditions de radiation des ondes à l'infini sont incluses dans la formulation de manière inhérente et n'exigent donc pas l'introduction d'équations supplémentaires à cet effet. La formulation directe dans le domaine des fréquences de la *BEM* a été appliquée pour la première fois aux calculs des fonctions d'impédance des fondations rectangulaires reposant ou enterrées dans un demi-espace viscoélastique par Dominguez (1978). Abascal et Dominguez (1984) ont utilisé la *BEM* pour étudier l'effet du sol sous-jacent et celui d'un substratum non rigide sur les fonctions d'impédance de fondations filantes. Karabalis et Beskos (1984) et Spyrakos et Beskos (1986a et 1986b) ont mené une étude similaire en 3*D* et en 2*D*, respectivement, dans le domaine des temps. Également, dans le domaine des temps, Mohammadi et Karabalis (1990) ont étudié en utilisant une technique de discrétisation adaptative pour analyser l'interaction 3*D* sol-structure. Une étude paramétrique relative à l'influence des propriétés mécaniques des sols telles que le coefficient de Poisson, et l'amortissement, et à l'influence de l'enterrement et du type de contact sol-fondation a été faite par Hadid (1995) pour le cas des fondations filantes rigides, superficielles ou enterrées dans un sol viscoélastique. Ainsi, la réponse dynamique de fondations filantes, rigides, reposant ou enterrées dans des milieux viscoélastiques homogènes ou stratifiés (non-homogénéité discrète ou continue) et soumises à des forces extérieurement appliquées est étudiée par la *BEM* en conjonction avec des fonctions de Green d'un milieu

infini (*CBEM*, Hadid et Berrah, 2001) ou des fonctions de Green discrètes explicites d'un milieu stratifié semi-infini (*TLBEM*, Hadid et Berrah, 2002; Berrah et Hadid, 2003) a été traitée dans Hadid, 2003.

Dans ce chapitre on va d'abord exposer d'une manière succincte la formulation de la méthode des éléments de frontière en élastodynamique. Ensuite on va s'intéresser à l'application de la méthode des éléments de frontière pour l'évaluation des fonctions d'impédance, et la détermination de la réponse des fondations filantes, rigides, reposant sur des milieux viscoélastiques homogènes ou stratifiés. La méthode des éléments de frontière ainsi formulée dans ce chapitre utilise les fonctions de Green discrètes de milieu stratifié semi-infini.

### 3.2 Formulation intégrale

La formulation forte d'un problème d'élastodynamique (qui cherche des solutions dans la classe des fonctions à dérivées secondes continues en chaque point du domaine considéré) trouve son champ d'application pour des configurations jugées régulières, ses limites apparaissent rapidement dans des cas de figures irrégulières. De ce fait, la formulation faible ou intégrale (qui se contente de l'ensemble des fonctions à dérivées premières de carré sommable sur le domaine), jugée plus puissante ou moins restrictive que la formulation forte, s'établit en pondérant l'équation différentielle aux dérivées partielles (2.9) associée à la forme forte par un champ virtuel de déplacements indépendant du temps $\delta u = \{\delta_x \ \delta_y \ \delta_z\}^t$. En intégrant le produit scalaire ainsi obtenu sur le volume Ω du corps et en considérant que cette intégrale pondérée s'annule pour toute fonction $\delta u$ cinématiquement admissible

$$\int_{\Omega} \delta u^t [L^t D L \, u + f - \rho \ddot{u}] d\Omega = 0 \qquad \forall \delta u \tag{3.1}$$

avec

$$\delta u = 0 \qquad \forall (x, y, z) \in \Gamma \tag{3.2}$$

En intégrant par parties (formule de Gauss), l'équation (3.1) devient comme suit

$$-\int_{\Omega}(L\delta u)^t\, DLu\, d\Omega+\int_{\Gamma}\delta u^t\, NDLu\, d\Gamma+\int_{\Omega}\delta u^t b\, d\Omega\,-\int_{\Omega}\rho\delta u^t\,\ddot{u}\, d\Omega=0 \qquad (3.3)$$

où $L\delta u$ est le champ virtuel de déformation.

Compte tenu de la compatibilité du champ virtuel de déplacement (3.2) et les conditions aux limites naturelles (2.6) sur la frontière $\boldsymbol{\Gamma}$, l'expression (3.3) s'écrit

$$-\int_{\Omega}(L\delta u)^t\, DLu\, d\Omega+\int_{\Gamma}\delta u^t\, t\, d\Gamma+\int_{\Omega}\delta u^t b\, d\Omega\,-\int_{\Omega}\rho\delta u^t\,\ddot{u}\, d\Omega=0 \qquad (3.4)$$

### 3.3 Formulation intégrale aux frontières

Bien que pour l'étude du comportement élastodynamique des systèmes continus, la formulation faible discrète (Méthode des éléments finis) soit une approche puissante particulièrement utilisée pour traiter les problèmes complexes qui ne peuvent être résolus par les formulations analytiques, elle laisse entrevoir ses limites en présence de géométrie infinie.

La formulation intégrale aux frontières contourne cette difficulté en ramenant la forme faible ou intégrale (3.3) à une forme intégrale définie uniquement sur la frontière Γ d'un corps déformable de volume Ω. Ainsi, elle traite aisément les problèmes de dimension infinie dans une, deux ou trois dimensions.

En interchangeant les rôles de $u$ et $\delta u$ dans (3.3), on peut écrire

$$-\int_{\Omega}(DL\delta u)^t\, Lu\, d\Omega+\int_{\Gamma}\delta t^t\, u\, d\Gamma+\int_{\Omega}\delta b^t u\, d\Omega\,-\int_{\Omega}\rho\delta\ddot{u}^t\, u\, d\Omega=0 \qquad (3.5)$$

Pour des sollicitations harmoniques, avec une fréquence $\omega$, on a

$$\delta u^t\ddot{u}=\delta\ddot{u}^t u=-\omega^2\delta u^t u \qquad (3.6)$$

D'autre part, la symétrie de la matrice constitutive du matériau implique

$$(DL\delta u)^t Lu=(L\delta u)^t DLu \qquad (3.7)$$

En substituant (3.4) dans (3.3) et en considérant les relations (3.6) et (3.7), on trouve le résultat suivant

$$\int_{\Gamma} \delta t^t\, u\, d\Gamma + \int_{\Omega} \delta b^t u\, d\Omega = \int_{\Gamma} \delta\, u^t\, t\, d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u^t b\; d\Omega \tag{3.8}$$

On suppose que les forces volumiques de l'état réel soient nulles $b = 0$, on trouve

$$\int_{\Gamma} \delta t^t\, u\, d\Gamma + \int_{\Omega} \delta b^t u\, d\Omega = \int_{\Gamma} \delta\, u^t\, t\, d\Gamma \tag{3.9}$$

On considère que $\delta b$ correspond à une force volumique unitaire appliquée au point $\underline{x}_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega \cup \Gamma$ ; les forces volumiques s'expriment comme suit

$$\delta b = \delta(\underline{x} - \underline{x}_0) \quad (\delta\text{est la fonction de Dirac}) \tag{3.10}$$

L'intégrale de volume dans l'équation (3.9) se réduit au produit de la valeur du déplacement au point $\underline{x}_0$ ,$u(\underline{x}_0)$, avec la matrice $\boldsymbol{c}$ définie comme suit

$$c = cI \tag{3.11}$$

où *c* est une constante dépendant de la configuration géométrique du point d'application de la force volumique de Dirac. Dans le contexte des fonctions de Green discrètes d'un demi-espace, $\boldsymbol{c}$ est égal à 1 sur la frontière Γ.

D'où, le déplacement dans une direction donnée, dans un point donné appartenant au domaine Ω ou à sa frontière, peut etre exprimé en terme de déplacement et de traction au frontière Γ comme suit

$$u(\underline{x}_0) + \int_{\Gamma} t^{*t}\, u\, d\Gamma = \int_{\Gamma} u^{*t}\, t\, d\Gamma \tag{3.12}$$

Les termes $t^{*t}$ et $u^{*t}$ dans l'équation (3.13) représentent les fonctions de Green de type traction et déplacement respectivement. Ces fonctions sont données en chapitre 2.

### 3.4 Formulation des éléments de frontière

Les fonctions de Green pour les sols multicouches qu'on utilise dans le présent travail ne sont pas des fonctions exactes pour le solide continu mais des approximations obtenues par discrétisation du champ de déplacements dans la direction de la stratification. D'où la nécessité d'approximer le contour du domaine à l'aide d'éléments de frontière. L'élément qu'on a choisi est l'élément constant dans lequel les déplacements et les contraintes sont supposées constants.

Supposant maintenant que le contour soit divisé en *N* éléments, l'équation intégrale (3.13) se met sous la forme discrétisée suivante

$$\left[I + \sum_{e=1}^{N}\left(\int_{\Gamma} t^{*\,t}\; d\Gamma\right)\right] U = \left[\sum_{e=1}^{N}\left(\int_{\Gamma} u^{*\,t}\; d\Gamma\right)\right] q \tag{3.14}$$

Sous forme matricielle cette équation devient comme suit

$$\widetilde{H} U = G q \tag{3.15}$$

avec

$$\widetilde{H} = I + \sum_{e=1}^{N}\left(\int_{\Gamma} t^{*\,t}\; d\Gamma\right) \tag{3.16}$$

et

$$G = \sum_{e=1}^{N}\left(\int_{\Gamma} u^{*\,t}\; d\Gamma\right) \tag{3.17}$$

où : *U* et *q* sont respectivement le vecteur des déplacements et le vecteur des contraintes aux nœuds.

### 3.5 Évaluation des intégrales aux frontières

Dans le cas des fondations surfaciques et en utilisant les fonctions de Green discrètes d'un demi-espace, $\widetilde{H} = I$ d'où l'équation (3.15) se réduit à

$$U = G q \tag{3.18}$$

On distingue deux cas de chargement

### 3.5.1 Charge virtuelle hors de l'élément

Pour l'intégration sur un élément qui ne coïncide pas avec la localisation des charges virtuelles l'équation (3.17) s'intègre comme suit

$$G_{xx}^{ij} = -\frac{1}{2} sgn(x) \sum_{l=1}^{2N} \phi_{x1}^{l} \phi_{x1}^{l} \frac{e^{-ik_l|x_i|} - e^{-ik_l|x_j|}}{{k_l}^2} \tag{3.19a}$$

$$G_{xz}^{ij} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \sum_{l=1}^{2N} \phi_{x1}^{l} \phi_{z1}^{l} \frac{e^{-ik_l|x_i|} - e^{-ik_l|x_j|}}{{k_l}^2} \tag{3.19b}$$

$$G_{zx}^{ij} = -\frac{1}{2\sqrt{-1}} \sum_{l=1}^{2N} \phi_{z1}^{l} \phi_{x1}^{l} \frac{e^{-ik_l|x_i|} - e^{-ik_l|x_j|}}{{k_l}^2} \tag{3.19c}$$

$$G_{zz}^{ij} = -\frac{1}{2} sgn(x) \sum_{l=1}^{2N} \phi_{z1}^{l} \phi_{z1}^{l} \frac{e^{-ik_l|x_i|} - e^{-ik_l|x_j|}}{{k_l}^2} \tag{3.19d}$$

### 3.5.2 Charge virtuelle à l'intérieur de l'élément

Dans ce cas l'équation (3.17) s'intègre comme suit

$$G_{xx}^{ii} = -\sum_{l=1}^{2N} \phi_{x1}^{l} \phi_{x1}^{l} \frac{1 - e^{-ik_l \frac{le}{2}}}{{k_l}^2} \tag{3.20a}$$

$$G_{xz}^{ii} = G_{zx}^{ii} = 0 \tag{3.20b}$$

$$G_{zz}^{ii} = -\sum_{l=1}^{2N} \phi_{z1}^{l} \phi_{z1}^{l} \frac{1 - e^{-ik_l \frac{le}{2}}}{{k_l}^2} \tag{3.20c}$$

Avec

$le$ : la longueur de l'élément de frontière

### 3.6 L'interaction dynamique sol-fondation

Pour étudier la réponse d'une fondation à des charges dynamiques, l'équation (3.15) est utilisée pour la détermination de la matrice d'impédance dynamique, $K$ (ou la matrice de souplesse, $C = K^{-1}$).

Lorsque la fondation est très rigide en comparaison avec le sol, on peut supposer que cette dernière se déplace 'rigidement', et ainsi les déplacements sur la frontière de la fondation peuvent être obtenus à partir des mouvements de corps rigide par l'intermédiaire d'une matrice de transformation *T*, qui dépend uniquement des coordonnées relatives des nœuds de frontière par rapport à un point de référence, d'où

$$u = Tu^f \tag{3.21}$$

où $u^f$ est le vecteur déplacement de corps rigide de la fondation. En supposant que le point de référence ait des coordonnées zéros, les sous matrices de la matrice *T* correspondant à chaque nœud ***j*** sont données par

$$T_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}_j \tag{3.22}$$

$$u^f = \{u_x \quad u_z \quad u_\theta\}^t \tag{3.23}$$

pour le cas dans le plan, et

$$T_j = [1]_j \tag{3.24}$$

$$u^f = \{u_y\}^t \tag{3.25}$$

pour le cas anti-plan

En introduisant la relation force-contraintes sur l'interface sol-fondation

$$F = T^t Aq \tag{3.26}$$

où A est une matrice diagonale désignant 'l'aire' de chaque élément de frontière de la fondation.

Combinant les équations (3.15), (3.21) et (3.26), il en découle que le vecteur des forces appliquées dans les directions des déplacements, peut être défini sous une forme matricielle sous la forme

$$F = Ku^f \tag{3.26}$$

où

$$K = T^t \Im \tag{3.27}$$

avec $K$ la matrice d'impédance, et $\Im = AG^{-1}H\,T$ est la matrice des contraintes surfaciques de contact.

### 3.7 Validation des algorithmes développés

Afin de valider le code de calcul établi dans ce mémoire, on va traiter quelques exemples de fondations sujettes à des chargements de translations et de balancement. Il s'agit de fondations filantes superficielles reposant sur un demi-espace homogène ou sur une couche de sol homogène reposant sur un substratum élastique ou rocheux. Les résultats obtenus seront comparés avec d'autres travaux utilisant la *BEM* ou la *FEM*.

#### 3.7.1 Fondations filantes superficielles reposant sur un demi-plan homogène

Vu que la fonction de Green utilisée dans ce mémoire correspond à un milieu stratifié semi-infini, la discrétisation est limitée uniquement à l'interface sol-fondation. L'interface sol-fondation est donc discrétisée en 5 éléments constants de longueur égale et le demi-plan est modélisé par une couche superficielle d'une hauteur égale à 2*B* subdivisée en 12 sous-couches (figure 3.1).

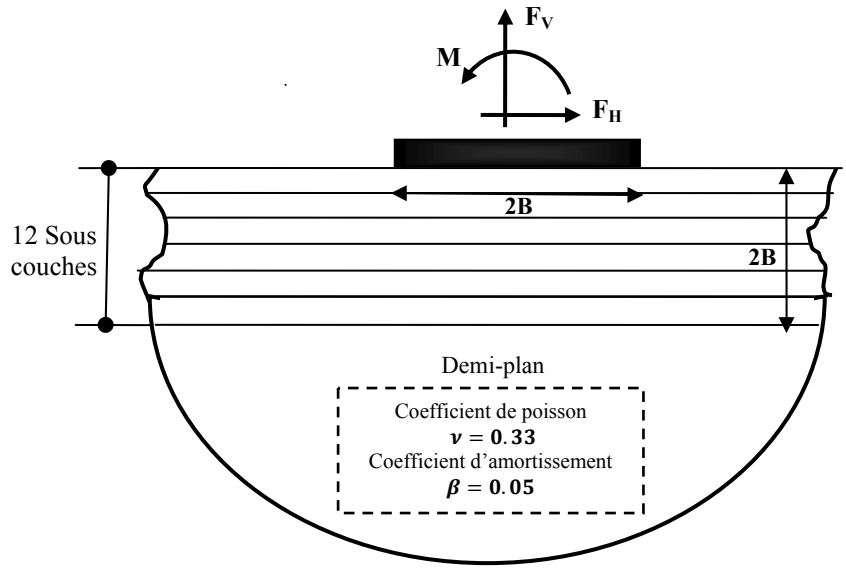



***Figure 3.1: Fondation superficielle reposant sur un demi-espace homogène***

La Figure 3.2 présente les parties réelle et imaginaire respectivement des fonctions de souplesse des fondations superficielles reposant sur un demi-plan viscoélastique. Les résultats sont comparés avec ceux obtenus par la *BEM* (éléments constants) conjointement avec les fonctions de Green classiques du domaine infini (Abascale et Dominguez, 1986). Une très bonne concordance est observée entre les deux résultats présentés dans la figure 3.2, d'où la validation et la précision de l'algorithme développé.

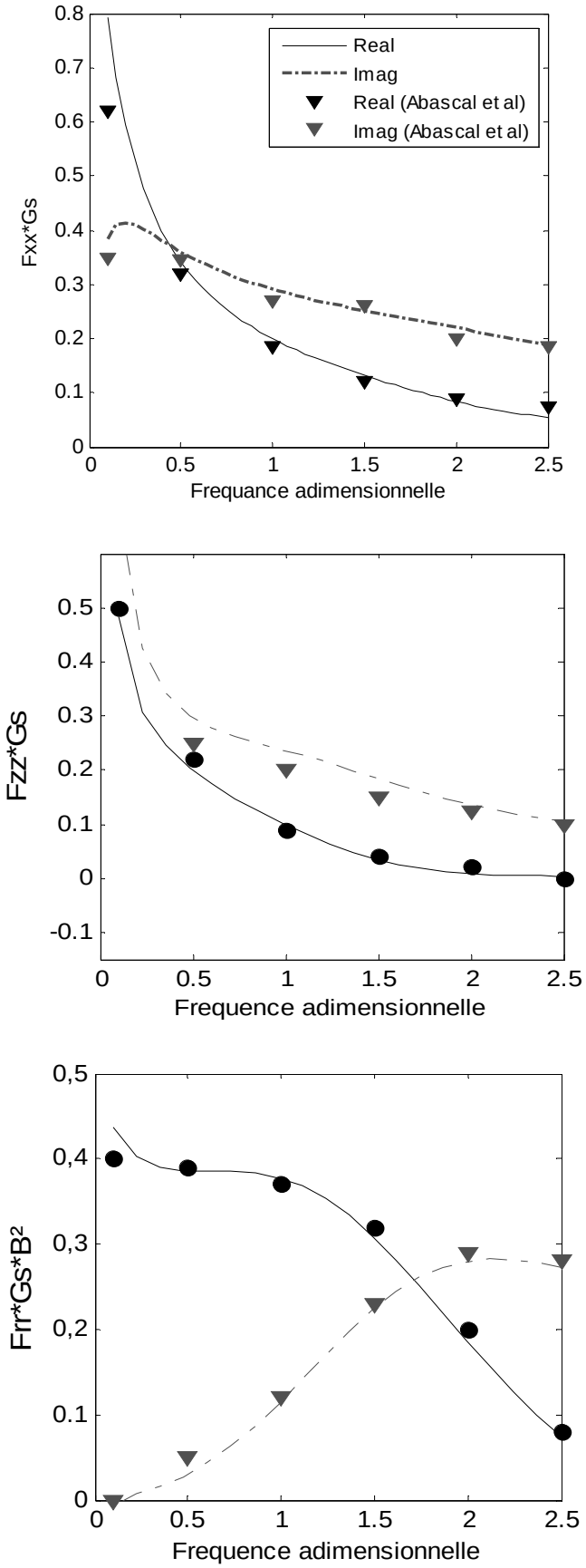



***Figure 3.2 : Déplacement horizontal, vertical et de balancement d'une fondation filante superficielle reposant sur un demi-espace homogène***

### 3.7.2 Fondation superficielle reposant sur un monocouche homogène surmontant un substratum rocheux

On s'intéresse également à l'étude des vibrations des fondations superficielles reposant sur un profil de sol homogène surmontant un substratum rocheux (figure 3.3). L'interface sol-fondation est discrétisée en 5 éléments constants de longueur égale et le profil de sol homogène d'une hauteur égale à 2*B* est subdivisé en 10 sous-couches.

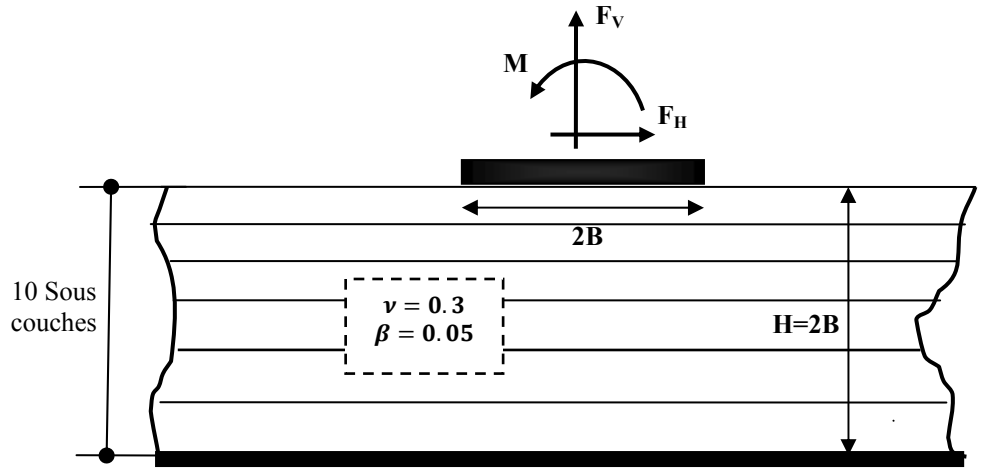



***Figure 3.3: Fondation superficielle sur un monocouche homogène reposant sur un substratum rocheux***

La Figure (3.4) présente les parties réelle et imaginaire respectivement des fonctions de souplesse des fondations superficielles reposant sur un monocouche homogène viscoélastique surmontant un substratum rocheux. Les résultats sont comparés avec ceux obtenus par la *TLM* (Tassoulas et Kausel, 1983). Une très bonne concordance est observée entre les deux résultats présentés dans la figure 3.4.

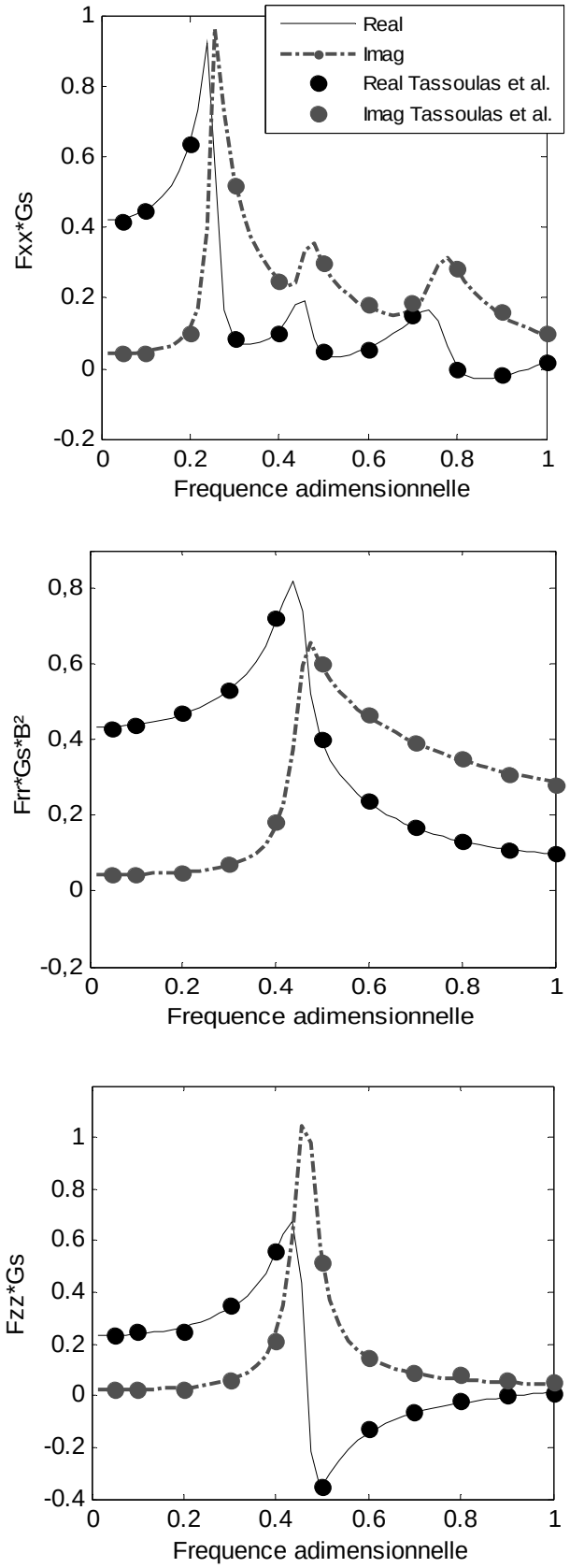



***Figure 3.4: Déplacement horizontal, vertical et de balancement de fondation filante superficielle reposant sur un substratum rocheux***

## 3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté en premier lieu la formulation de la méthode des éléments de frontière pour un problème d'élastodynamique. Puis on s'est intéressé à l'application de la méthode des éléments de frontière pour l'évaluation des fonctions d'impédance, et la détermination de la réponse des fondations superficielles filantes. Les fonctions de Green discrètes de milieu stratifié sont utilisées dans la présente formulation. La *BEM* associée aux fonctions de Green discrètes (*TLBEM*) est un bon outil pour l'analyse des profils de sol à caractéristique mécanique et physique variant avec la profondeur.

# Chapitre 4

# Simulation des propriétés physiques et mécaniques des sols

## 4.1 Introduction

Il est bien connu que les propriétés du sol sont fondamentalement variables d'un point à un autre de l'espace. Cela est dû principalement à des processus variés et complexes qui ont des effets directs sur la formation des dépôts de sol. Parmi ces effets, on note la sédimentation, les effets climatiques et d'érosion, la topographie, les failles sismiques (déformations tectoniques), etc. De ce fait, la variabilité spatiale des sols est une caractéristique naturelle, et a trouvé un grand intérêt de recherche dans plusieurs disciplines d'ingénierie telles que : la géotechnique, la géophysique, le génie minier et récemment le génie parasismique.

Dans ce chapitre on va présenter une formulation stochastique pour la simulation des propriétés du sol non bornées et bornées, appelée méthode probabiliste de simulation indirecte de champs aléatoires non-Gaussien (Nour et al., 2002 et Nour 2003). Ainsi, on associe à la variable aléatoire non bornée la loi de distribution lognormale (module de cisaillement), et à la variable aléatoire bornée la loi de distribution beta (coefficient d'amortissement, coefficient de Poisson, la masse volumique).

## 4.2 Simulation des propriétés du sol

La méthode probabiliste de simulation indirecte de champs aléatoires non-gaussien est basée sur la théorie des champs aléatoires, cette approche utilise une hypothèse de base qui consiste à décomposer la variable aléatoire en une tendance déterministe, et en une composante aléatoire décrivant la variabilité autour de cette tendance (Fenton, 1990 ; Fenton et Vanmarcke, 1998 cité dans Nour 2003). Dans une telle décomposition, la tendance représente l'effet de phénomènes qui influencent la formation du sol pendant de longues périodes, tandis que la composante aléatoire décrit les fluctuations de courte durée des états de formation du sol.

Soit la variable aléatoire $f_p(z)$ décrivant une propriété du sol définie par la fonction déterministe $f_{0p}(z)$ décrivant la tendance dans l'espace, elle est prise dans la pratique comme étant la moyenne des valeurs mesurées, et également en fonction du champ aléatoire Gaussien à moyenne nulle et à variance unité $\Delta f_p(z)$ décrivant les fluctuations autour de la tendance. On peut écrire (Fenton, 1990)

$$f_p(z) = \Re\left[f_{0p}(z) + \sigma_p\, \Delta f_p(z)\right] \tag{4.1}$$

$\Re$ est une transformation du processus Gaussien $\Delta f_p(z)$ vers une distribution appropriée pour $f_p(z)$ et $\sigma_p$ représente l'écart type, ainsi

$$\Delta f_p(z) = \sum_{n=1}^{N_p} \Delta\, \mathrm{g}_{pn}(z) \tag{4.2}$$

$$\mathrm{mean}\left(\Delta f_p(z)\right) = 0\,; \quad p = 1,2,\dots,N_p \tag{4.3}$$

avec $N_p$ est le nombre de propriétés du sol à simuler. Le champ aléatoire Gaussien à $N_p$ variables, unidimensionnel, à moyenne nulle et à variance unité $\Delta\, \mathrm{g}_{pn}(z)$ peut être simulé comme suit (Shinozuka, 1987 ; Yamazaki et Shinozuka, 1988)

$$\Delta\, \mathrm{g}_{pn}(z) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{N} A_{l,pn}\, cos\left(\mathcal{K}_l z + \Omega_{l,pn}\right) \tag{4.4}$$

avec

$$A_{l,pn} = H_{pn}(\mathcal{K}_l)\sqrt{2\,\Delta\mathcal{K}} \tag{4.5}$$

L'équation (4.4) assure également la corrélation inter-propriété, $\Omega_{l,pn}$ sont des phases aléatoires distribuées uniformément dans l'intervalle [0 $2\pi$]. Les coefficients $H_{pn}$ sont obtenus à partir de la matrice inter densité spectrale dans le domaine du nombre d'onde $S(\mathcal{K})$, cette dernière est une matrice réelle, symétrique, et définie positive. Les éléments de la matrice $H$ sont obtenus à partir de la décomposition de Cholesky de la matrice symétrique $S$ qui est définie par

$$S(\mathcal{K}) = \begin{bmatrix} s_{11}(\mathcal{K}) & s_{12}(\mathcal{K}) & \cdots & s_{1N_p}(\mathcal{K}) \\ s_{21}(\mathcal{K}) & s_{22}(\mathcal{K}) & \cdots & s_{2N_p}(\mathcal{K}) \\ \cdots & \cdots & s_{p_i p_j}(\mathcal{K}) & \cdots \\ s_{N_p 1}(\mathcal{K}) & s_{N_p 2}(\mathcal{K}) & \cdots & s_{N_p N_p}(\mathcal{K}) \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

La matrice $H_{pn}$ est supposée être triangulaire inférieure

$$H(\mathcal{K}) = \begin{bmatrix} H_{11}(\mathcal{K}) & 0 & \cdots & 0 \\ H_{21}(\mathcal{K}) & H_{22}(\mathcal{K}) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ldots & 0 \\ H_{N_p 1}(\mathcal{K}) & H_{N_p 2}(\mathcal{K}) & \cdots & H_{N_p N_p}(\mathcal{K}) \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

avec $\mathcal{K}$ est le nombre d'onde qui vérifie

$$\begin{cases} \mathcal{K}_l = l.\Delta\mathcal{K} \\ \mathcal{K}_u = N.\Delta\mathcal{K} \end{cases} \tag{4.8}$$

Le pas en nombre d'onde $\Delta\mathcal{K}$ est évalué à partir de la représentation de $S(\mathcal{K})$ et du nombre d'onde de coupure $\mathcal{K}_u$ pour $N$ incréments, $\mathcal{K}_u$ est défini par (Nour, 2004)

$$\mathcal{K}_u = \frac{1}{a}\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)} \;\; ; \;\; \lambda = 0.001 \tag{4.9}$$

On suppose dans l'équation (4.4), la symétrie du quadrant de chaque élément de la matrice $S(\mathcal{K})$ par rapport à l'origine. Les éléments inter corrélés de la matrice densité spectrale de puissance $S$ sont donnés par

$$S_{p_i p_j} = \sqrt{S_{p_i p_i}.S_{p_j p_j}}.T_{p_i p_j} \tag{4.10}$$

où $S_{p_i p_j}$ désigne la densité inter spectrale $S_{p_i p_i}$ et $S_{p_j p_j}$ les densités auto-spectrales et $T_{p_i p_j}$ représente le coefficient d'inter corrélation déterminé par l'expression suivante

$$T_{p_i p_j} = \frac{mean(p_i . p_j) - mean(p_i).mean(p_j)}{\sigma_{p_i} . \sigma_{p_j}} \tag{4.11}$$

Dans cette étude la forme Gaussienne, exponentiellement décroissante et avec variance unité, est utilisée pour d éfinir la fonction de densité spectrale de puissance (Nour, 2004)

$$S(\mathcal{K}) = \frac{\sigma^2|_{\sigma=1}\, a}{2\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{\mathcal{K}\, a}{2}\right)^2\right] \tag{4.12}$$

avec $a$ est la longueur de corrélation, qui est obtenue à partir d'une régression non-linéaire des données expérimentales.

Dans le but de réduire considérablement le temps de calcul, la génération numérique d'échantillons de fonctions de l'équation (4.4) est aisément calculée à l'aide de la transformée rapide de Fourier (FFT), développée par Yamazaki et Shinozuka (1988) et modifiée par Zerva (1992). Les nombres d'ondes discrets sont donnés par

$$\begin{cases} \mathcal{K}_l = (l + \frac{1}{2}).\Delta\mathcal{K} \\ l = 1, \dots, N \end{cases} \tag{4.13}$$

L'équation (4.4) peut être réécrite comme suit

$$\Delta\, g_{pn}(z) = \sqrt{2}\, Re\left[exp\left(i\frac{\Delta\mathcal{K}\, z}{2}\right)\sum_{l=0}^{M} A_{l,pn}\, exp\left(i\, \Omega_{l,pn}\right)\, \exp\left(i\, l\Delta\mathcal{K}\, z\right)\right] \tag{4.14}$$

avec

$$\begin{cases} z = r.\Delta\xi \\ r = 1, \dots, M-1 \end{cases} \tag{4.15}$$

où $N$ et $M$ doivent être positifs, et ayant des puissances en nombre entier de deux. Afin d'éviter l'effet d'Aliasing, on doit respecter les conditions suivantes

$$\Delta\xi = \frac{2\pi}{\Delta\mathcal{K}\, M} = \frac{2\pi N}{\mathcal{K}_u\, M}\ ; \quad M \geq 2N \tag{4.16}$$

L'application le la FFT (Fast Fourier Transform) dans l'équation (4.14) fournit des valeurs pour la simulation sur la moitié de la longueur d'ondes, c'est à dire sur $\frac{L}{2} = \frac{2\pi}{\Delta\mathcal{K}}$, par conséquent, la simulation devrait être prolongée pour la longueur d'ondes entière, et peut être également facilement prolongée pour des distances plus longues que la longueur d'ondes $L$.

### 4.3 Variabilité spatiale des propriétés du sol non-bornées

Les propriétés du sol non bornés telles que le module élastique $E$, le module de cisaillement $G$, la perméabilité $k$, etc., sont supposées être distribuées d'une manière lognormale. Ce choix est motivé par le fait que ces propriétés sont des paramètres positifs, et que la distribution lognormale permet d'analyser leur grande variabilité. L'expression du module de cisaillement par exemple est donnée par (Nour et al. 2002)

$$G(z) = exp\left[G_{0,lnG}(z) + \sigma_{lnG}\,\Delta f_G(z)\right] \tag{4.17}$$

avec

$$\begin{cases} {\sigma^2}_{lnG} = \ln\left(1 + \frac{{\sigma^2}_G}{{G^2}_{0,G}}\right) \\ G_{0,lnG} = \ln\left(G_{0,G}\right) - \frac{1}{2}{\sigma^2}_{lnG} \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} {\sigma^2}_{lnG} = \ln(1 + {CV^2}_G) \\ G_{0,lnG} = \ln\left(G_{0,G}\right) - \frac{1}{2}{\sigma^2}_{lnG} \end{cases} \tag{4.18}$$

où $G_{0,G}$ et $\sigma_G$ désignent respectivement la moyenne et l'écart type du module de cisaillement et $CV_G = {\sigma_G}/{G_{0,G}}$ désigne le coefficient de variation. Dans l'équation (4.17), la relation $\mathfrak{R}$ définie par l'équation (4.1) est exponentielle. Cette transformation a permis de simuler d'une manière indirecte le champ aléatoire non-Gaussien (non-borné) du module de cisaillement. Ainsi, toute autre propriété du sol non-bornée peut être exprimée de la même manière par l'équation (4.17).

Il est montré dans les figures 4.1 et 4.2 respectivement dix réalisations du module de cisaillement et des réalisations typiques des histogrammes du module de cisaillement pour différentes valeurs de $CV_G$.

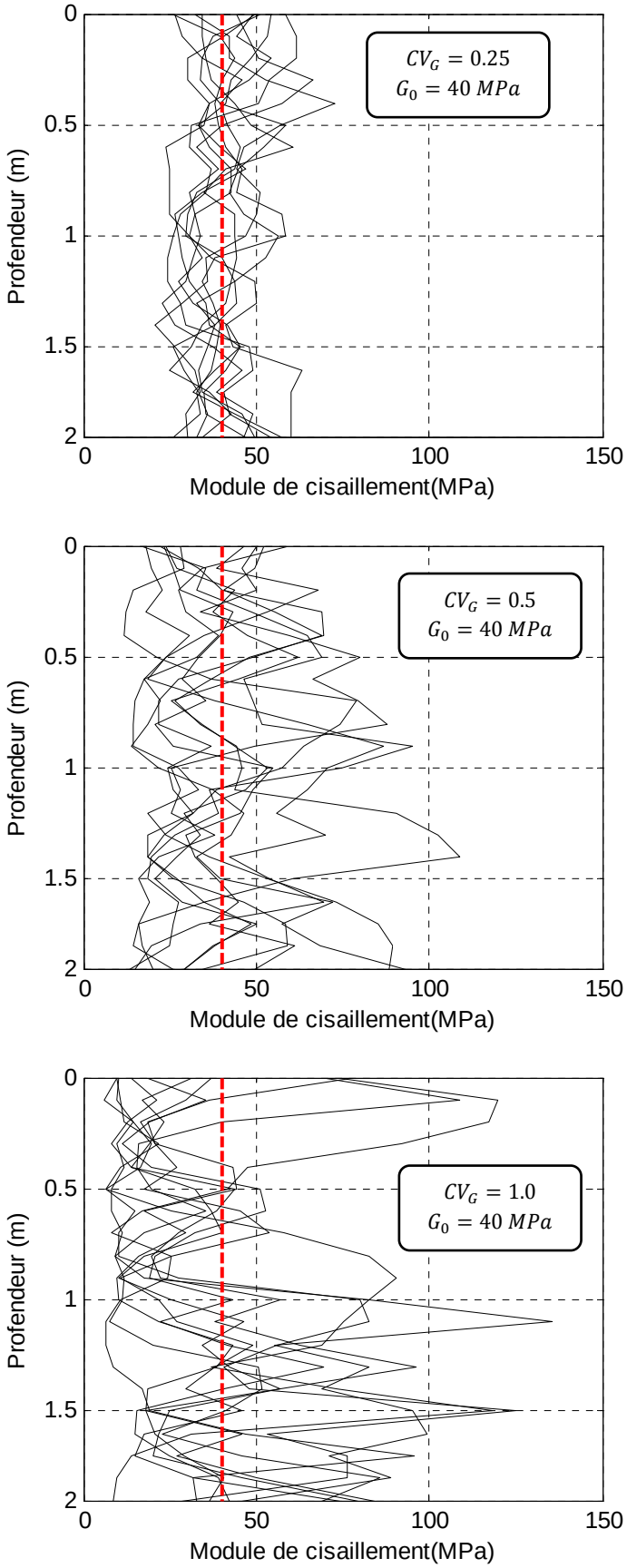



***Figure 4.1 : Dix réalisations du module de cisaillement pour différentes valeurs de $CV_G$***

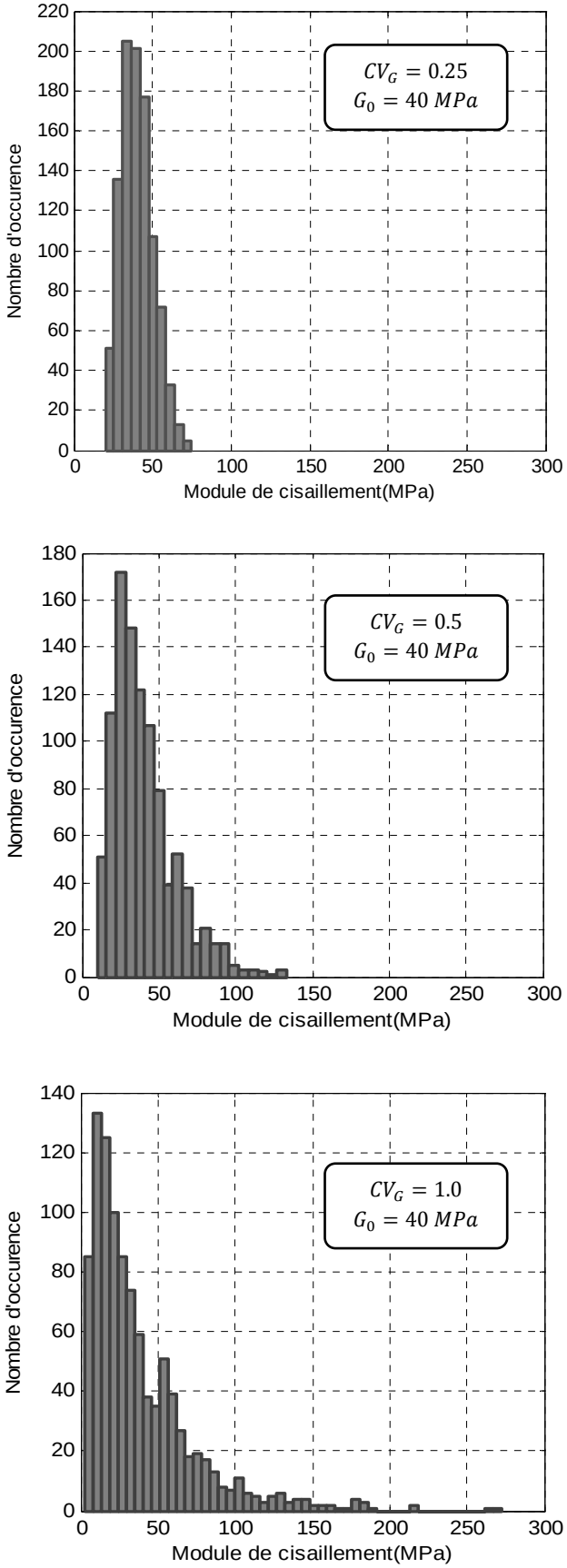



***Figure 4.2 : Réalisation typique des histogrammes du module de cisaillement pour différentes valeurs de $CV_G$***

### 4.4 Variabilité spatiale des propriétés du sol bornées

Il est bien connu que le coefficient de Poisson $\upsilon$, le coefficient d'amortissement $\beta$, la densité $\rho$, l'angle de frottement interne $\phi$ et la porosité $\eta$ pour les sols sont bornés dans la pratique entre deux valeurs extrêmes. Pour décrire et simuler les champs bornés des propriétés du sol, on adopte la méthode probabiliste de simulation indirecte des champs aléatoires non-gaussiens (borné) dont la formulation est la suivante (Nour, 2004)

La distribution de probabilité appropriée pour une variable aléatoire dont les valeurs sont bornées, est la distribution beta. Dans ce qui suit, la méthodologie est bien développé pour le coefficient de Poisson $\upsilon \in [\upsilon_{min}\ \upsilon_{max}]$, mais la démarche est la même pour les autres propriétés du sol bornées.

Soit $\upsilon(z)$ un champ beta, l'équation exprimant la variabilité spatiale du coefficient de Poisson est donnée par (Fenton, 1990 ; Ang et Tang, 1975)

$$\upsilon(z) = \upsilon_{min} + (\upsilon_{max} - \upsilon_{min})\, V(z) \tag{4.19}$$

Le champ, $V \in [0\ 1]$ est la solution de l'équation intégrale de la fonction de distribution cumulative beta avec les paramètres $q$ et $r$ et qui permet de déterminer la fonction appropriée de probabilité $P_{\bar{V}}$, c.-à-d.

$$\beta(V|q,r) = \frac{B_V(q,r)}{B(q,r)} = P_{\bar{V}} \quad q,r > 0 \tag{4.20}$$

Le champ simulé $\bar{V}(z)$ est transformé en un champ beta $\upsilon(z)$ en le cadrant sur le diagramme de la fonction de distribution de probabilité. L'opération de cadrage conserve la moyenne et l'écart type du coefficient de Poisson employés pour évaluer $q,r$ et $\bar{V}$. Ce genre de transformation a été adapté pour la simulation numérique des champs non Gaussiens par Yamazaki et Shinozuka (1988), et trouve son origine dans le papier de Rosenblatt (1952). Notons que les paramètres $q$ et $r$ doivent être tous les deux positifs et $P_{\bar{V}}$ doit se trouver sur l'intervalle $[0\ 1]$.

L'équation (4.20) est non linéaire, ainsi, $V$ est obtenu à partir d'un algorithme itératif en utilisant la méthode de Newton avec des modifications pour contraindre les incréments d'itérations à être dans la gamme permise pour $V$ c-à-d [0 1].

$B_V(q,r)$ est la fonction beta incomplète, son expression est donnée par (Ang et Tang, 1975)

$$B_V(q,r) = \int_0^V y^{q-1}(1-y)^{r-1}\,dy \quad ; \quad q,r > 0 \tag{4.21}$$

L'expression de la fonction beta est donnée par

$$B(q,r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)} \tag{4.22}$$

*V(z)* est obtenu en supposant que la fonction de distribution cumulative beta est égale à une fonction appropriée de probabilité $P_{\bar{V}}$. Puisque le coefficient de Poisson du sol est un paramètre positif, on préfère cadrer la fonction de distribution cumulative beta avec la fonction de distribution cumulative lognormale, exprimée au moyen de la fonction cumulative normale standard comme suit

$$P_{\bar{V}} = \int_{-\infty}^{\bar{y}} \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)dy = \Phi_0(\bar{y}) = \Phi_0\left(\frac{ln\bar{V} - ln\left(\upsilon_{0,\upsilon}\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2{}_{lnv}\right)\right)}{\sigma_{lnv}}\right) \tag{4.23}$$

où $\Phi_0$ est la fonction de distribution cumulative normale standard, pour laquelle $\bar{V}$ représente le cadrage de $\bar{V} \in (0+\infty)$ dans $P_{\bar{V}} \in [0\ \ 1]$. L'expression de $\bar{V}$ est donnée par

$$\bar{V} = exp\left[\upsilon_{0,lnv} + \sigma_{lnv}(\Delta f_\upsilon(z))\right] \tag{4.24}$$

avec

$$\begin{cases} \sigma^2{}_{lnv} = ln\left(1 + \dfrac{\sigma^2{}_\upsilon}{\upsilon^2{}_{0,\upsilon}}\right) \\ \upsilon_{0,lnv} = ln\left(\upsilon_{0,\upsilon}\right) - \dfrac{1}{2}\sigma^2{}_{lnv} \end{cases} \tag{4.25}$$

La moyenne et la variance de la distribution beta son données par (Ang et Tang, 1975)

$$\upsilon_0 = \upsilon_{min} + \frac{q}{q+r}(\upsilon_{max} - \upsilon_{min})$$

$$\sigma^2{}_\upsilon = \frac{qr}{(q+r)^2(q+r+1)}(\upsilon_{max} - \upsilon_{min})^2 \tag{4.26}$$

Ainsi, on peut dériver les expressions de $q$ et $r$ comme suit

$$q = \frac{(\upsilon_0 - \upsilon_{min})}{[(\upsilon_{max} - \upsilon_{min})\sigma^2{}_{\upsilon}]}[(\upsilon_0 - \upsilon_{min})(\upsilon_{max} - \upsilon_0) - \sigma^2{}_{\upsilon}]$$

$$q, r \; et \; \sigma_{\upsilon} > 0 \qquad (4.27)$$

$$r = \frac{(\upsilon_{max} - \upsilon_0)}{[(\upsilon_{max} - \upsilon_{min})\sigma^2{}_{\upsilon}]}[(\upsilon_0 - \upsilon_{min})(\upsilon_{max} - \upsilon_0) - \sigma^2{}_{\upsilon}]$$

$q$ et $r$ doivent être toujours positifs, ainsi il existe un écart type critique à ne pas dépasser qui est donné par (Nour et al. 2002)

$$\sigma_{\upsilon} < \sigma_{\upsilon,cr} = \sqrt{(\upsilon_0 - \upsilon_{min})(\upsilon_{max} - \upsilon_0)} \qquad (4.28)$$

La stratégie de la simulation du coefficient de Poisson consiste à calculer par le biais de l'équation (4.27), les paramètres $q$ et $r$ à partir des données du sol $\upsilon_0, \upsilon_{min}, \upsilon_{max}$ et $\sigma_{\upsilon}$ . Après la simulation du champ aléatoire $\bar{V}(z)$, $P_{\bar{V}}$ est obtenu et utilisé pour cadrer la fonction de distribution cumulative beta, et calculer $V(z)$ à l'aide d'un processus itératif. La dernière étape consiste à calculer la variabilité spatiale du coefficient de Poisson.

Il est montré dans les figures 4.3 et 4.4 respectivement dix réalisations du coefficient de poisson et des réalisations typiques des histogrammes du coefficient de poisson pour différentes valeurs de $CV_{\upsilon}$.

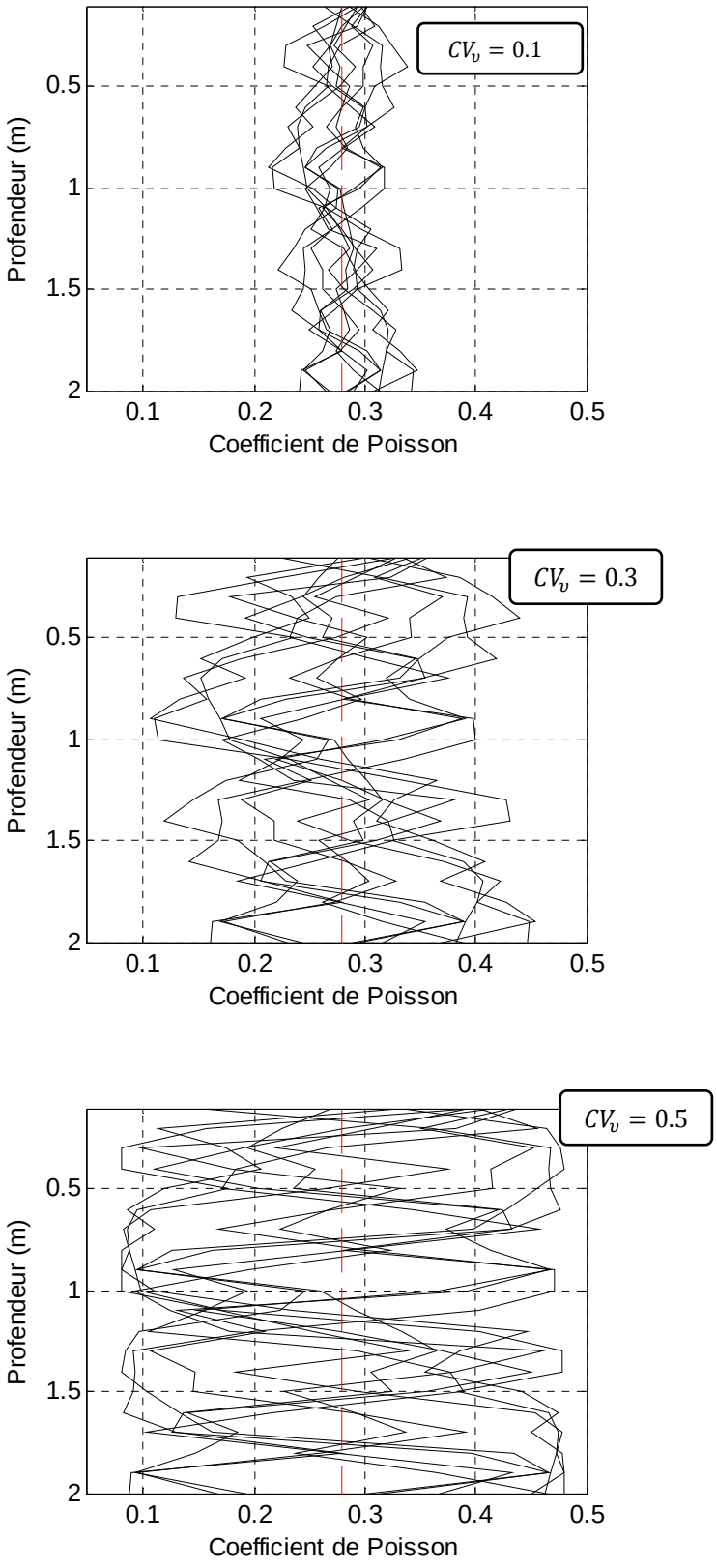



***Figure 4.3 : 10 réalisations du coefficient de poisson pour différentes valeurs de $CV_\upsilon$ ;***

***($\upsilon_0 = 0.28$ ; $\upsilon_{min} = 0.08$ ;$\upsilon_{max} = 0.48$)***

D'après les figures (4.3) et (4.4), il est observé que les larges valeurs du coefficient de variation dans le cas de la distribution beta, produisent des distributions concentrées dans les extrémités de l'intervalle de variabilité.

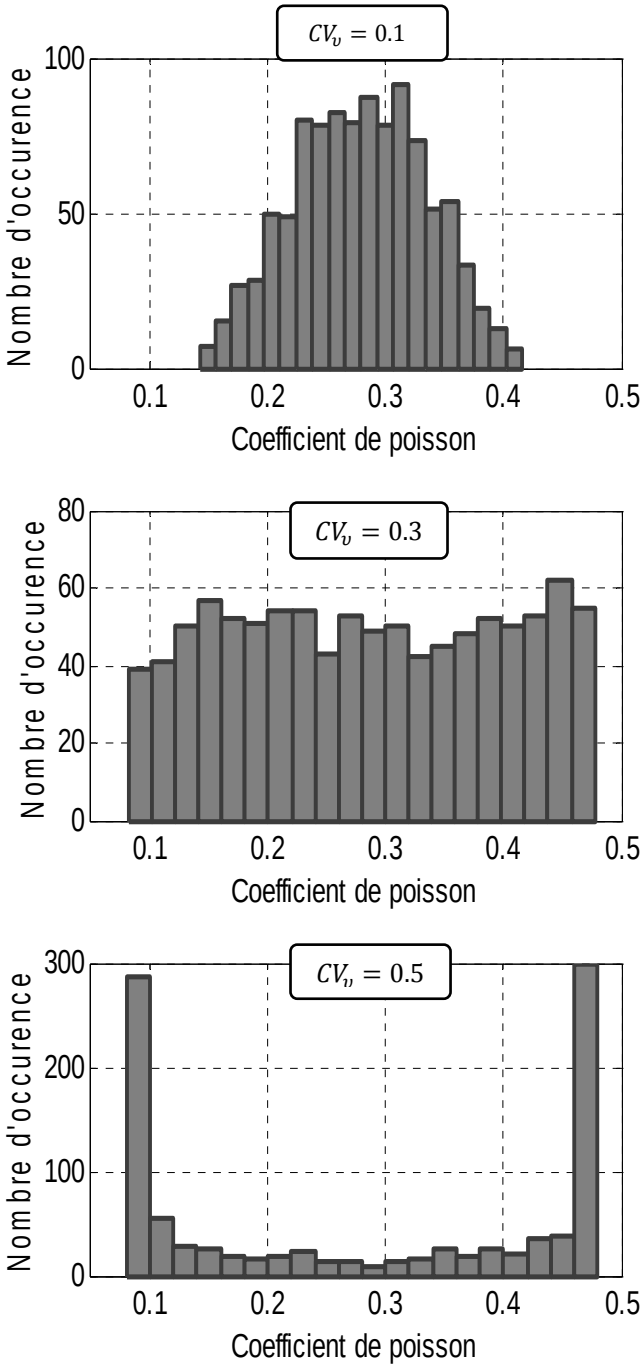



***Figure 4.4 : Réalisation typique des histogrammes du coefficient de poisson pour différentes valeurs de $CV_\upsilon$ ; ($\upsilon_0 = 0.28$ ; $\upsilon_{min} = 0.08$ ; $\upsilon_{max} = 0.48$)***

## 4.4 Conclusions

Dans ce chapitre, on a présenté une formulation stochastique pour la simulation des propriétés du sol non bornées et bornées, appelée méthode probabiliste de simulation indirecte de champs aléatoires non-Gaussien. Cette approche propose une solution robuste aux limitations constatées et largement soulignées dans la littérature pour la simulation des champs aléatoires bornés.

Ainsi, on associe à la variable aléatoire non bornée la loi de distribution lognormale, et à la variable aléatoire bornée la loi de distribution beta. La détermination du champ beta est obtenue en développant une technique de cadrage sur le diagramme de la fonction de distribution de probabilité dont la solution est donnée par la résolution d'une équation non-linéaire. Cette technique permet de calculer analytiquement les paramètres de la distribution beta connaissant les données statistiques à savoir, la moyenne, l'écart type et les valeurs extrêmes, et ensuite sa variabilité spatiale par le processus d'itérations via la technique proposée.

La technique de simulation présentée dans ce chapitre est utilisée dans le chapitre 5 à travers une application portant sur l'analyse probabiliste de la réponse des fondations filantes superficielles reposant sur un sol homogène ou hétérogène surmontant un substratum rocheux.

# Chapitre 5

# Analyse probabiliste de la fonction d'amplification d'un profil de sol

## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la propagation des ondes SH, plus particulièrement, à la formulation de la fonction d'amplification d'un profil de sol homogène reposant sur un substratum rocheux ou un demi-plan en utilisant la méthode des couches minces TLM.

Pour l'analyse de la variabilité de la fonction d'amplification on va appliquer la méthode probabiliste de simulation indirecte de champs aléatoires non-Gaussien (Nour et al., 2002 et Nour 2003) présentée dans le chapitre précédent (chapitre quatre). Les propriétés aléatoires du sol sont le module de cisaillement, la masse volumique, le coefficient d'amortissement et le coefficient de Poisson. Le champ aléatoire pour le module de cisaillement est obtenu en adoptant la distribution lognormale, qui permet d'analyser sa grande variabilité. Puisque la masse volumique, le coefficient d'amortissement et le coefficient de Poisson du sol sont bornés dans la pratique entre deux valeurs extrêmes, leurs champs aléatoires sont obtenus en utilisant la distribution beta.

Une étude paramétrique détaillée est effectuée sur l'influence du coefficient de variation du module de cisaillement, de la masse volumique, du coefficient d'amortissement et du coefficient de Poisson sur les statistiques de la fonction d'amplification d'un profil de sol viscoélastique homogène.

## 5.2 Équation de mouvement

Pour les ondes SH l'équation de mouvement est de la forme

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Gu = p(x,t) \tag{5.1}$$

La TLM peut aussi être utilisé pour l'étude de l'amplification des ondes séismiques dans un multicouches. Pour les ondes SH planes se propageant dans le substratum rocheux (ou le demi espace) selon un angle $\theta$ par rapport à la verticale, le nombre d'onde horizontal est défini comme suit

$$k = \frac{\omega \sin\theta}{c_s} \tag{5.2}$$

Avec $\omega$ la fréquence d'excitation et $c_s$ la vitesse de l'onde de cisaillement du demi-espace.

Ce n'ombre d'onde doit être constant dans tout le multicouches; d'où

$$k^2 = \frac{\omega^2 \sin^2\theta}{{c_s}^2} \;\rightarrow\; \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\sin^2\theta}{{c_s}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{5.3}$$

L'équation 5.1 peut être écrite comme suit

$$\left[M - \frac{\sin^2\theta}{{c_s}^2}A\right]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Gu = p(x,t) \tag{5.4}$$

Qui est de la forme

$$M_{eqv}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Gu = p(x,t) \tag{5.5}$$

Avec : $M_{eqv} = M - \frac{\sin^2\theta}{{c_s}^2}A$

Dans le domaine fréquences-nombres d'ondes l'équation (5.5) s'écrit comme suit

$$\left(G - \omega^2 M_{eqv}\right)\bar{U} = \bar{P} \tag{5.6}$$

Les déplacements $\bar{U}$ sont obtenus par inversion de la matrice $\left(G - \omega^2 M_{eqv}\right)$, cela nécessite la résolution du problème aux valeurs propres quadratiques suivant

$$\left(G - k_j^2 M_{eqv}\right) \phi_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, N \tag{5. 7}$$

avec : $k_j$ la j$^{ème}$ valeur propre et $\phi_j$ le j$^{ème}$ vecteur propre ; $\Phi = \{\phi_j\}$ et $K_L = diag\{k_j\}$.

Les vecteurs propres vérifient les conditions d'orthogonalité suivantes

$$\Phi^t M_{eq} \Phi = I \qquad \text{et} \quad \Phi^t G \Phi = -K_L^2 \tag{5.8}$$

En suivant la même procédure utilisé dans la section (2.5) du chapitre deux, on peut déterminer le déplacement dans le domaine fréquence-nombre d'ondes

$$\bar{U} = \Phi D_L \Phi^t \bar{P} \tag{5.9}$$

où

$$D_L = (k^2 I - K_L^2)^{-1} \tag{5.10}$$

Le vecteur chargement $\bar{P}$ est défini comme suit

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ p_0 \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

où $p_0$ est la force appliquée à l'interface du demi espace provoquant un déplacement unitaire

$$p_0 = K_0 u_0 \tag{5.12}$$

avec :

- $u_0 = 1$
- $K_0$ l'impédance du demi-espace soumis à la propagation des ondes SH (Kausel et Roesset 1981, Kausel 2006)

$$K_0 = G_s \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2}} \tag{5.13}$$

où : $G_s$ est le module de cisaillement du demi-espace

En remplaçant le module de cisaillement par $G_s = \rho c_s^2$, le nombre d'onde par $k = \frac{\omega \sin\theta}{c_s}$ et après quelques manipulations l'impédance $K_0$ devient

$$K_0 = i\omega\rho c_s \cos\theta \tag{5.14}$$

D'où la charge $\bar{P}$ s'écrit comme suit

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i\omega\rho_s c_s \cos\theta \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

### 5.3 La fonction d'amplification

Le vecteur d'amplification $\bar{H}(\omega)$ est le rapport entre le vecteur déplacement et le déplacement à la base (figure 5.1)

$$\bar{H}(\omega) = \frac{\bar{U}}{u_0} \quad \text{avec :} \quad u_0 = 1 \tag{5.16}$$

D'où

$$\bar{H}(\omega) = \Phi D_L \Phi^t \bar{P} \tag{5.17}$$

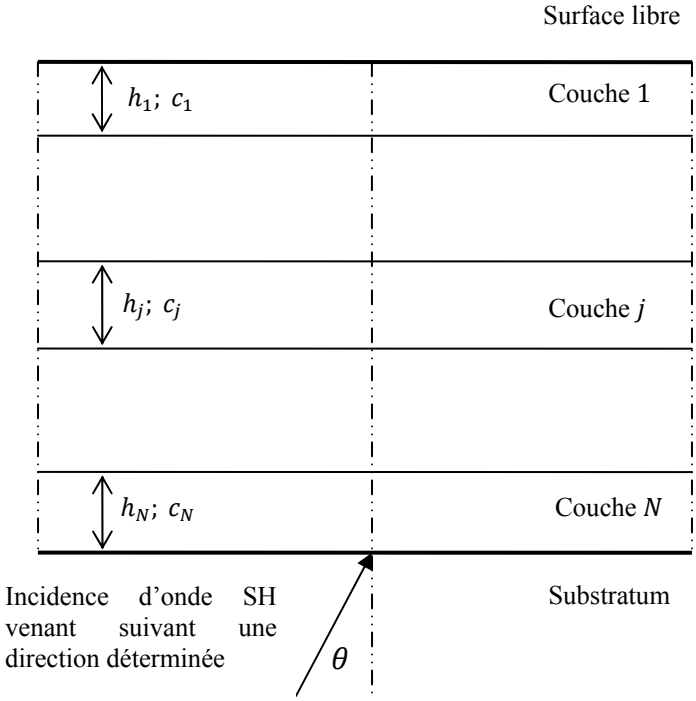



***Figure 5.1: Sol stratifié reposant sur un substratum rocheux***

Les ondes SH se propageant non verticalement sont simulées en utilisant les ondes SH se propageant verticalement avec des propriétés équivalentes (Kausel et Roesset 1984)

$$\rho_{j\,eqv} = \rho_j \left[1 - \frac{c_j^2}{c_s^2}\sin^2\theta\right] \tag{5.18a}$$

$$c_{j\,eqv} = \frac{c_j}{\sqrt{1 - \frac{c_j^2}{c_s^2} sin^2\theta}} \tag{5.18b}$$

Avec $c_j$ et $c$ sont les vitesses d'onde de cisaillement de la j$^{ème}$ couche et le demi-plan respectivement et $\rho_j$ est la masse volumique de la j$^{ème}$ couche.

D'après ces équations, les propriétés équivalentes du demi-plan sont

$$\rho_{s\,eqv} = \rho_s \cos^2\theta \tag{5.19a}$$

$$c_{s\,eqv} = \frac{c_s}{\cos\theta} \tag{5.19b}$$

### 5.4 Variabilité de la fonction d'amplification

Cette partie a pour objectif d'analyser la variabilité de la fonction d'amplification d'un profil de sol homogène reposant sur un substratum rocheux. La variabilité spatiale des propriétés du sol (module de cisaillement, la masse volumique, coefficient de poisson et coefficient d'amortissement) est considérée uniquement suivant la direction $z$. Suivant le plan $(x, y)$, il est supposé que les propriétés du sol sont invariables, c.-à-d. représentées par leurs moyennes.

Afin d'analyser la variabilité de la fonction d'amplification d'un profil de sol, la procédure d écrite ci-dessus est codé dans un programme informatique en utilisant le logiciel MATLAB R2007b. A l'origine, ce programme est utilisé uniquement pour une analyse déterministe. En lui permettant de supporter la simulation des champs aléatoires spatiaux, en l'occurrence, le module de cisaillement, la masse volumique, le coefficient d'amortissement et le coefficient de Poisson, il est possible de déterminer les statistiques désirées en utilisant les simulations de Monte Carlo. Ces procédures (simulation et calcul déterministe) sont codées dans un programme développé à cet effet (figure 5.2).

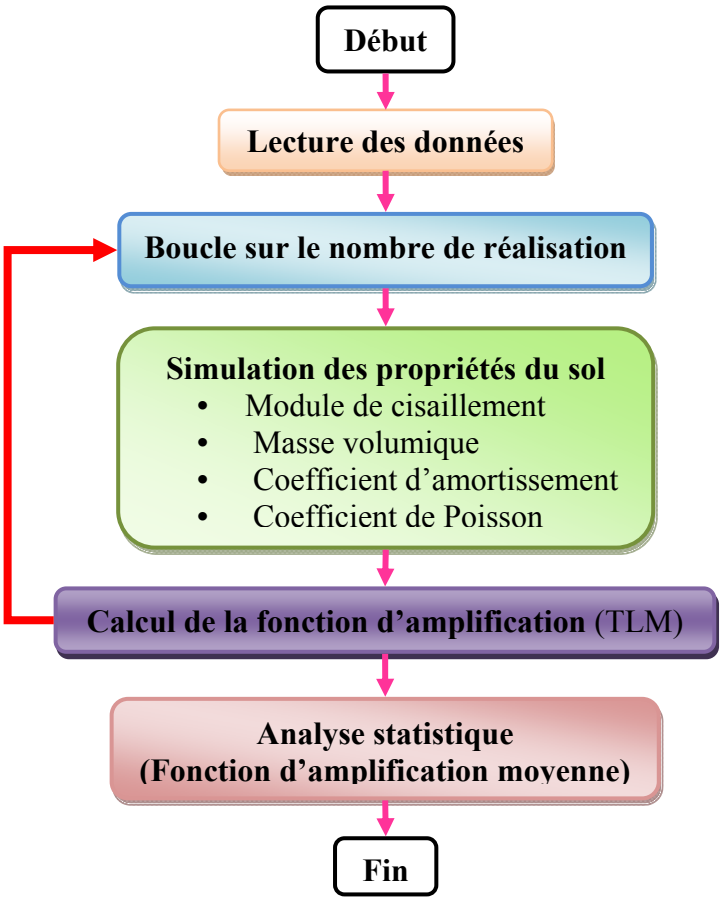



***Figure 5.2: Organigramme du programme informatique***

### 5.4.1 Données du problème

Les données suivantes sont utilisées :

- Valeur moyenne du module de cisaillement $G_0 = 40\ MPa$ .
- Valeur moyenne de la masse volumique $\rho_0 = 1800\ kg/m^3$ .
- Valeurs extrêmes de la masse volumique $\rho_{min} = 1400\ kg/m^3$ et $\rho_{max} = 2200\ kg/m^3$ .
- Valeur moyenne du coefficient de Poisson $\upsilon_0 = 0.28$ .
- Valeurs extrêmes du coefficient de Poisson $\upsilon_{min} = 0.08$ et $\upsilon_{max} = 0.48$ .
- Valeur moyenne du coefficient d'amortissement $\beta_0 = 6\%$ .
- Valeurs extrêmes du coefficient d'amortissement $\beta_{min} = 2\%$ et $\beta_{max} = 10\%$ .
- Longueur de corrélation $a = 1.5\ m$ .

En pratique, la connaissance de la variabilité de *G* pour les sols est très délicate, car la détermination in-situ et en laboratoire de son coefficient de variation $CV_G$ est une tâche très ennuyeuse, dans la mesure où le nombre suffisant d'échantillons nécessaires pour un traitement statistique fiable est rare. Concernant la masse volumique le coefficient d'amortissement et le coefficient de Poisson pour les sols, pratiquement il n'y a aucune information disponible dans la littérature sur la variabilité de ces paramètres, c.-à-d.,$CV_\rho$, $CV_\beta$ et $CV_\upsilon$ (Nour et al. 2003).

On considère une variation de $CV_G = 0.0\ ;\ 0.25\ ; 0.5\ ; 1.0$ ,$CV_\rho = 0.0\ ; 0.1\ ;\ 0.15\ ; 0.2$, $CV_\beta = 0.0\ ;\ 0.1\ ;\ 0.3\ ;\ 0.5$ et $CV_\upsilon = 0.0\ ;\ 0.1\ ;\ 0.3\ ;\ 0.5$ .

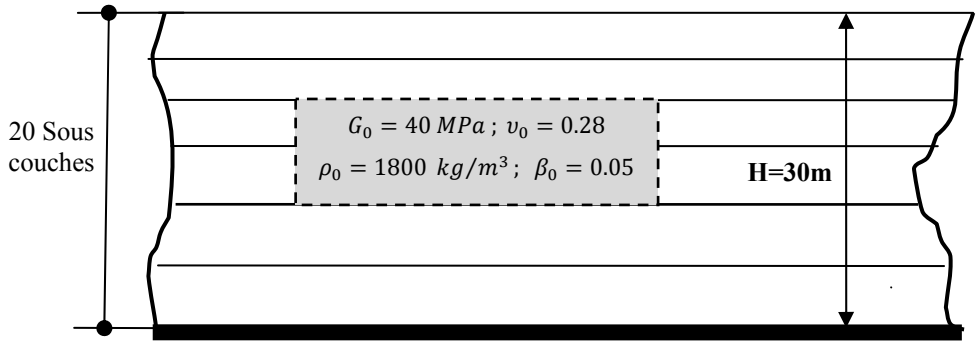



***Figure 5.3: Monocouche homogène reposant sur un substratum rocheux***

### 5.4.2 Étude paramétrique sur la fonction d'amplification d'un un profil de sol homogène reposant sur un substratum rocheux

Dans cette partie, on va étudier l'influence de la variabilité du module de cisaillement, de la masse volumique, du coefficient d'amortissement et du coefficient de Poisson sur les statistiques de la fonction d'amplification d'un monocouche homogène surmontant un substratum rocheux.

***Influence de la variabilité du module de cisaillement***

- La figure 5.4 présente les statistiques de la fonction d'amplification en fonction de la variabilité du module de cisaillement *G*. D'après les courbes tracées, on observe que l'augmentation de $CV_G$ provoque un effet de filtrage qui fait glisser la fréquence fondamentale du système vers les basses fréquences, et provoque l'atténuation des fréquences élevées. Dans ce cas, le sol simulé devient plus mou comparé au sol homogène ($CV_G = 0$). Par ailleurs, on observe que l'augmentation de $CV_G$ induit aussi une diminution de l'amplification (amplitude de la fonction de transfert), ce qui représente en soi un facteur favorable. Ceci est interprété par les multiples réflexion-réfraction (diffraction) du mouvement causées par le caractère non homogène du sol (AIJ, 1993). Et comme mentionné également par Safak (2001), cette diffraction aléatoire, même pour des milieux élastiques, peut modifier le mouvement du sol d'une façon similaire au cas de comportement non linéaire du sol.

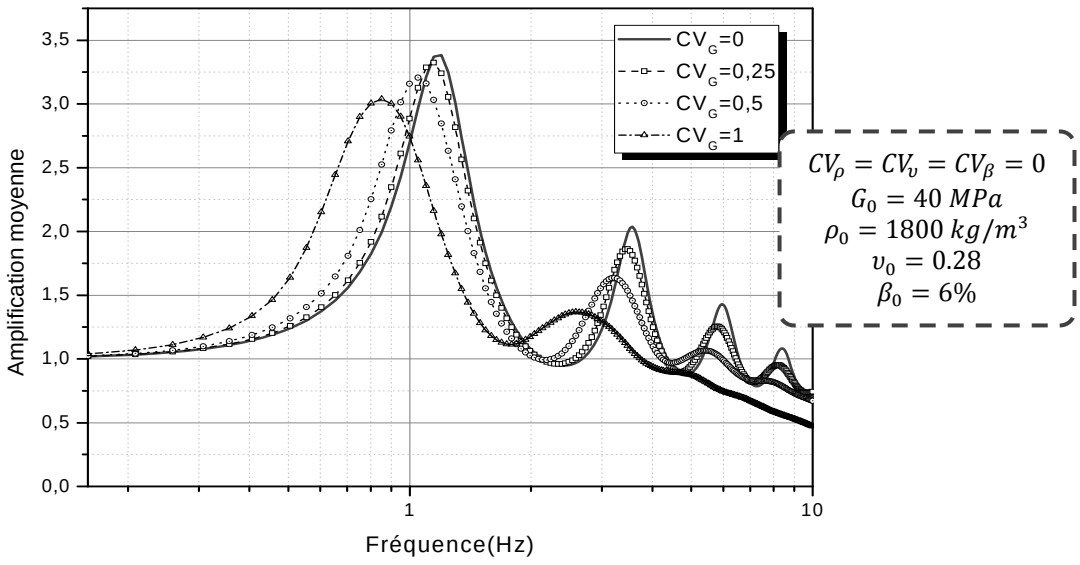



***Figure 5.4: L'amplification en fonction de la variabilité du module de cisaillement G***

***Influence de la variabilité de la masse volumique***

- La figure 5.5 présente les statistiques de la fonction d'amplification en fonction de la variabilité de la masse volumique $\rho$ . A partir des courbes tracées, on peut souligner ce qui suit

- Il ressort que la variabilité de la masse volumique présente une légère influence sur la fonction d'amplification. Pratiquement cette influence peut être négligée.

- On peut observer aussi que lorsque le coefficient de variation $CV_\rho$ augmente, la fonction d'amplification diminue particulièrement au niveau des fréquences de résonance.

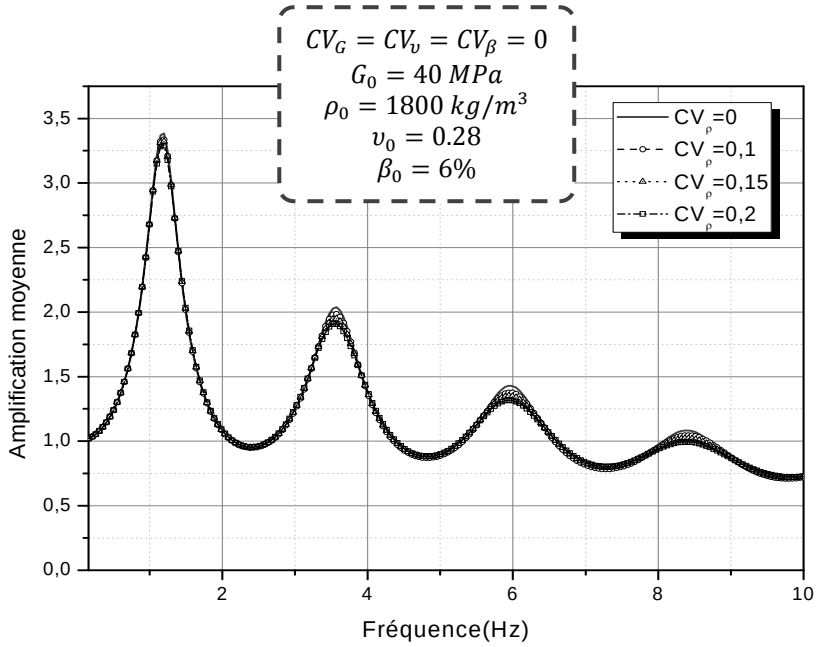



***Figure 5.5: L'amplification en fonction de la variabilité de la masse volumique ρ***

***Influence de la variabilité du coefficient d'amortissement***

- La figure 5.6 présente les statistiques de la fonction d'amplification en fonction de la variabilité du coefficient d'amortissement $\beta$ .

Il ressort que la variabilité du coefficient d'amortissement n'a pas d'influence sur la fonction d'amplification.

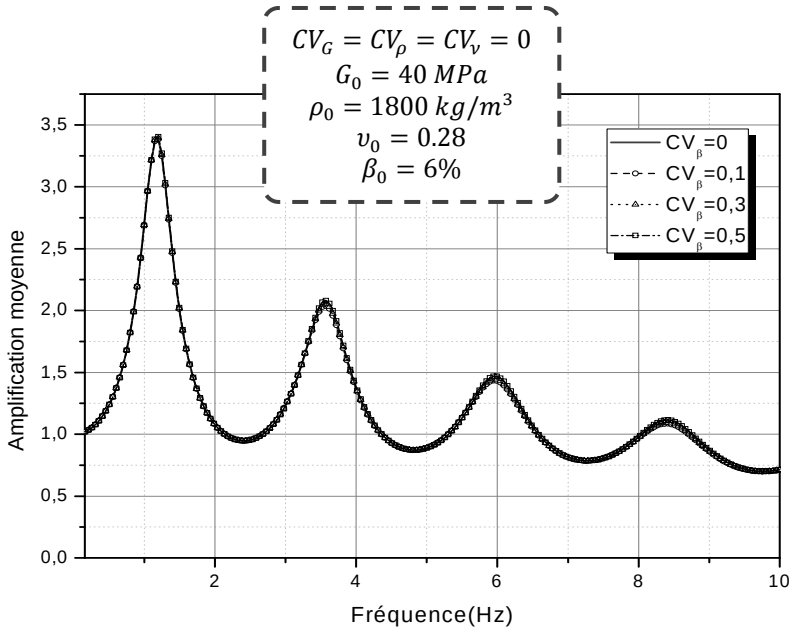



***Figure 5.6: L'amplification en fonction de la variabilité du coefficient d'amortissement β***

***Influence de la variabilité du coefficient de Poisson***

La figure 5.7 présente les statistiques de la fonction d'amplification en fonction de la variabilité du coefficient de Poisson $\upsilon$ . Il ressort que la variabilité du coefficient de Poisson n'a pas d'influence sur la fonction d'amplification.

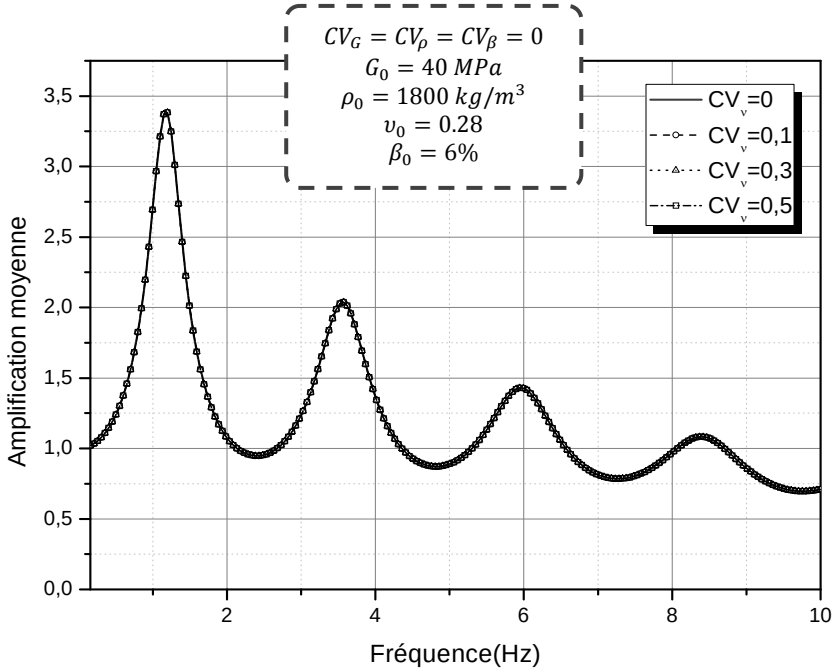



***Figure 5.7: L'amplification en fonction de la variabilité du coefficient de Poisson ν***

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la variabilité de la fonction d'amplification des milieux viscoélastiques homogènes est analysée. Les propriétés aléatoires du sol considérées sont le module de cisaillement, la masse volumique, le coefficient d'amortissement et le coefficient de Poisson, modélisées par des champs spatiaux aléatoires, en considérant la corrélation Gaussienne spatiale. Le champ aléatoire pour le module de cisaillement est obtenu en adoptant la distribution lognormale, qui permet d'analyser sa grande variabilité. Pour la masse volumique, le coefficient d'amortissement et le coefficient de Poisson du sol, qui sont des paramètres bornés dans la pratique entre deux valeurs extrêmes, leurs champs aléatoires sont obtenus en utilisant la distribution beta. La prédiction des statistiques de la fonction d'amplification est effectuée en utilisant les simulations de Monte Carlo.

Il ressort des résultats obtenus que l'augmentation du coefficient de variation du module de cisaillement provoque un effet de filtrage qui fait glisser la fréquence fondamentale du système vers les basses fréquences, et provoque l'atténuation des fréquences élevées. Dans ce cas, le sol simulé devient plus mou comparé au sol homogène ($CV_G = 0$). Par ailleurs, on observe que l'augmentation de $CV_G$ induit aussi une diminution de l'amplification ce qui représente en soi un facteur favorable. Ceci est interprété par les multiples réflexion-réfraction du mouvement causées par le caractère non homogène du sol. Il ressort aussi que la variabilité de la masse volumique présente une légère influence sur la fonction d'amplification. On peut observer aussi que lorsque le coefficient de variation $CV_\rho$ augmente, la fonction d'amplification diminue particulièrement au niveau des fréquences de résonance. En ce qui concerne la variabilité du coefficient d'amortissement et le coefficient de Poisson il est remarqué qu'elles ne présentent aucune influence sur la fonction d'amplification.

Comme synthèse, on peut dire, que les paramètres qui ont une influence prépondérante sur la fonction d'amplification d'un profil de sol, sont le module de cisaillement et à un degré moindre la masse volumique. En revanche, il ressort que la variabilité du coefficient d'amortissement et le coefficient de Poisson peuvent être négligées.

# Chapitre 6

# Analyse probabiliste de la réponse des fondations

## 6.1 Introduction

Dans ce chapitre on va appliquer la méthode probabiliste de simulation indirecte de champs aléatoires non-Gaussien (Nour et al., 2002 et Nour 2003) présentée dans le chapitre précédent (chapitre quatre) pour l'analyse de la variabilité de la réponse des fondations filantes reposant sur un profil de sol viscoélastique homogène ou non homogène. Les propriétés aléatoires du sol sont le module de cisaillement, la masse volumique, le coefficient d'amortissement et le coefficient de Poisson. Le champ aléatoire pour le module de cisaillement est obtenu en adoptant la distribution lognormale, qui permet d'analyser sa grande variabilité. Puisque la masse volumique le coefficient d'amortissement et le coefficient de Poisson du sol sont bornés dans la pratique entre deux valeurs extrêmes, leurs champs aléatoires sont obtenus en utilisant la distribution beta.

Pour déterminer la réponse des fondations on va utiliser l'algorithme basé sur les fonctions de Green d'un milieu stratifié décrit dans le chapitre trois. La prédiction des statistiques du déplacement des fondations est réalisée en utilisant les simulations de Monte Carlo.

Une étude paramétrique détaillée est effectuée sur l'influence du coefficient de variation du module de cisaillement, de la masse volumique, du coefficient d'amortissement et du coefficient de Poisson et enfin sur l'influence de la longueur de corrélation sur les statistiques du déplacement des fondations filantes reposant sur un profil de sol viscoélastique homogène ou non homogène.

## 6.2 Variabilité de la réponse des fondations

Cette partie a pour objectif d'analyser la variabilité de la réponse des fondations filantes superficielles reposant sur un profil de sol homogène. La variabilité spatiale des propriétés du sol (module de cisaillement, la masse volumique, coefficient de poisson et coefficient d'amortissement) est considérée uniquement suivant la direction $z$ . Suivant le plan $(x, y)$, il est supposé que les propriétés du sol sont invariables, c.-à-d. représentées par leurs moyennes. On présentera des exemples de fonctions d'impédance des fondations filantes pour le cas de profils de sol homogène reposant sur un substratum rocheux.

Afin d'analyser la variabilité de la réponse des fondations, la procédure d écrite dans les sections précédentes est codé dans un programme informatique en utilisant le logiciel MATLAB R2007b. A l'origine, ce programme est utilisé uniquement pour une analyse déterministe c.-à-d. le calcul de réponse d'une fondation déterministe. En lui permettant de supporter la simulation des champs aléatoires spatiaux, en l'occurrence, le module de cisaillement, la masse volumique, le coefficient d'amortissement et le coefficient de Poisson, il est possible de déterminer les statistiques de la réponse des fondations en utilisant les simulations de Monte Carlo. Ces procédures (simulation et calcul déterministe) sont codées dans un programme développé à cet effet (figure 6.1).

### 6.2.1 Données du problème

Les données suivantes sont utilisées :

- Valeur moyenne du module de cisaillement $G_0 = 40\ MPa$ .
- Valeur moyenne de la masse volumique $\rho_0 = 1800\ kg/m^3$ .
- Valeurs extrêmes de la masse volumique $\rho_{min} = 1400\ kg/m^3$ et $\rho_{max} = 2200\ kg/m^3$ .
- Valeur moyenne du coefficient de Poisson $\upsilon_0 = 0.28$ .
- Valeurs extrêmes du coefficient de Poisson $\upsilon_{min} = 0.08$ et $\upsilon_{max} = 0.48$ .
- Valeur moyenne du coefficient d'amortissement $\beta_0 = 6\%$ .
- Valeurs extrêmes du coefficient d'amortissement $\beta_{min} = 2\%$ et $\beta_{max} = 10\%$ .
- Longueur de corrélation $a = 1.5\ m$ .
- Demi largeur de la fondation $B = 7.5\ m$.

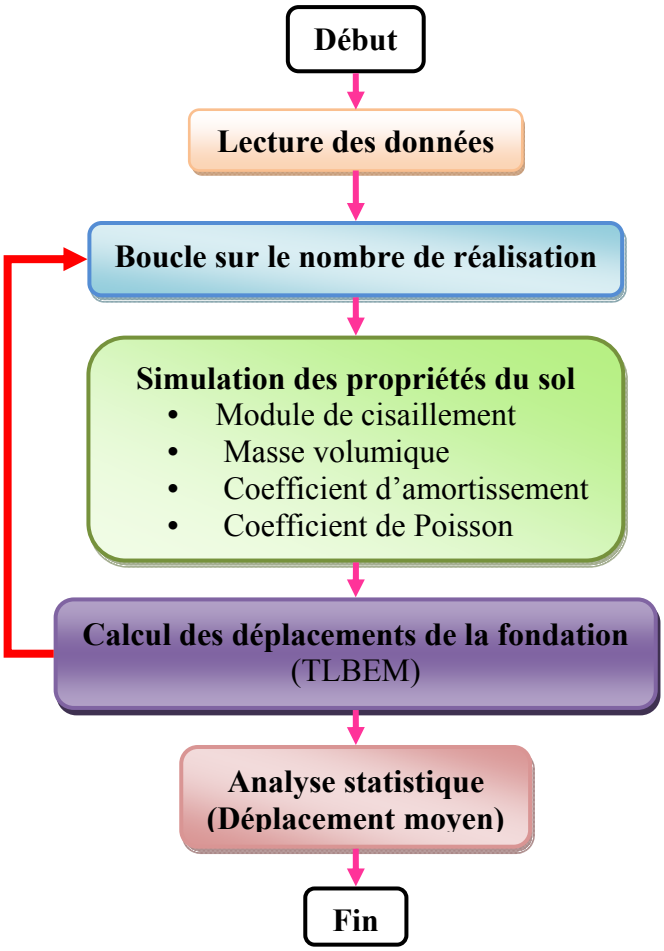



***Figure 6.1: Organigramme du programme informatique***

En pratique, la connaissance de la variabilité de $G$ pour les sols est très délicate, car la détermination in-situ et en laboratoire de son coefficient de variation $CV_G$ est une tâche très ennuyeuse, dans la mesure où le nombre suffisant d'échantillons nécessaires pour un traitement statistique fiable est rare. Concernant la masse volumique, le coefficient d'amortissement et le coefficient de Poisson pour les sols, pratiquement il n'y a aucune information disponible dans la littérature sur la variabilité de ces paramètres, c.-à-d.,$CV_\rho$, $\mathrm{CV}_\beta$ et $CV_\upsilon$ (Nour et al. 2003).

On considère une variation de $CV_G = 0.0\,;\ 0.25\,;0.5\,;1.0$ ,$CV_\rho = 0.0\,;0.1\,;\ 0.15\,;0.2$, $CV_\beta = 0.0\,;\ 0.1\,;\ 0.3\,;\ 0.5$ et $CV_\upsilon = 0.0\,;\ 0.1\,;\ 0.3\,;\ 0.5$ .

### 6.2.2 Résultats et analyse

Le but de cette section, est la détermination des statistiques de la réponse des fondations à partir d'une étude paramétrique. Pour déterminer la réponse des fondations on va utiliser l'algorithme basé sur les fonctions de Green d'un milieu stratifié décrit dans le chapitre trois.

En premier lieu, le déplacement horizontal, vertical et de balancement des fondations filantes rigides reposant sur une couche de sol viscoélastique homogène sont analysés. L'interface sol-fondation est donc discrétisée en 8 éléments constants de longueur égale et le profil de sol est modélisé par une couche d'une hauteur égale à 4*B* subdivisée en 20 sous-couches (figure 6.2)**.**

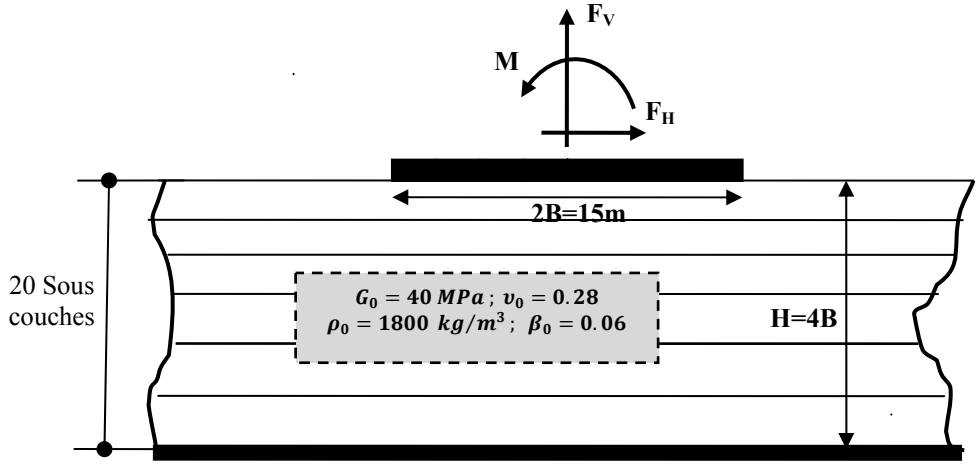



***Figure 6.2: Fondation superficielle sur un monocouche homogène reposant sur un substratum rocheux***

Il est montré dans la figure 6.3 une réalisation typique des cartes du module de cisaillement, de la masse volumique, du coefficient de Poisson et du coefficient d'amortissement. Sachant qu'une autre réalisation probabiliste peut donner des images tout à fait différentes.

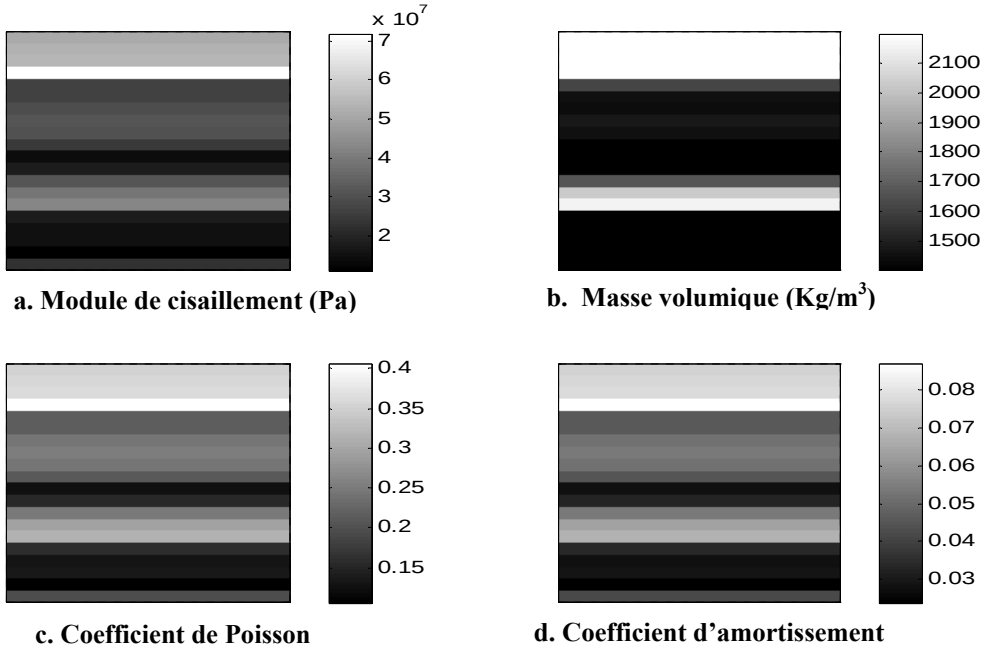



***Figure 6.3 : Réalisation typique des cartes du module de cisaillement, de la masse volumique, du coefficient de Poisson et du coefficient d'amortissement***

Il est important de noter que les statistiques de la réponse des fondations sont évaluées en considérant 1000 échantillons. Après l'achèvement de 1000 réalisations, 1000 valeurs du déplacement horizontal $F_x$ , vertical $F_z$ et de balancement $F_r$ sont calculées. Les figures 6.3a, 6.3b et 6.3c présentent dix réalisations du déplacement horizontal $F_x$ , vertical $F_z$ et de balancement $F_r$ respectivement.

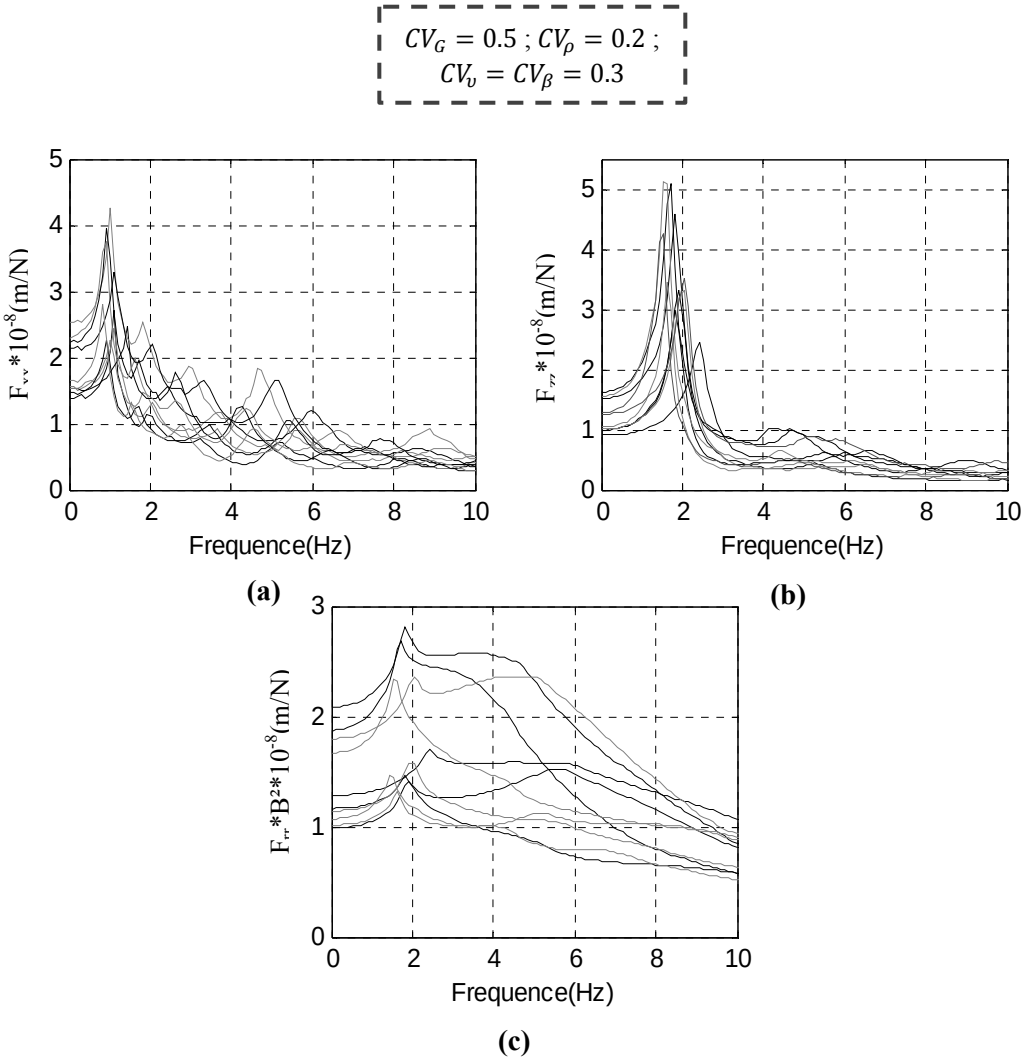



***Figure 6.4 : Dix réalisations du déplacement (a) horizontal $F_{xx}$, (b) vertical $F_{zz}$ et (c) de balancement $F_{rr}$***

Pour déterminer les statistiques de chaque simulation, on trace l'histogramme comme il est montré par la figure 6.5.a pour le déplacement horizontal $F_x$ , la figure 6.5.b pour le déplacement vertical $F_z$ et la figure 6.5.c pour le déplacement de balancement $F_r$ correspondant à $CV_G = 0.5$ ; $CV_\rho = 0.2$ ; $CV_\upsilon = 0.3$ et $CV_\beta = 0.3$ et cela pour une fréquence $f = 1\ Hz$.

Afin de caractériser les lois de distribution du déplacement horizontal, vertical et du balancement, on superpose sur les figures 6.5.a ; 6.5.b et 6.5.c les histogrammes simulés avec ceux issus d'une distribution lognormale. Cette dernière est ajustée avec les moments d'ordre 1et 2 $(m\ et\ \sigma)$ pour le déplacement horizontal $F_x$ , vertical $F_z$ et du balancement $F_r$ .

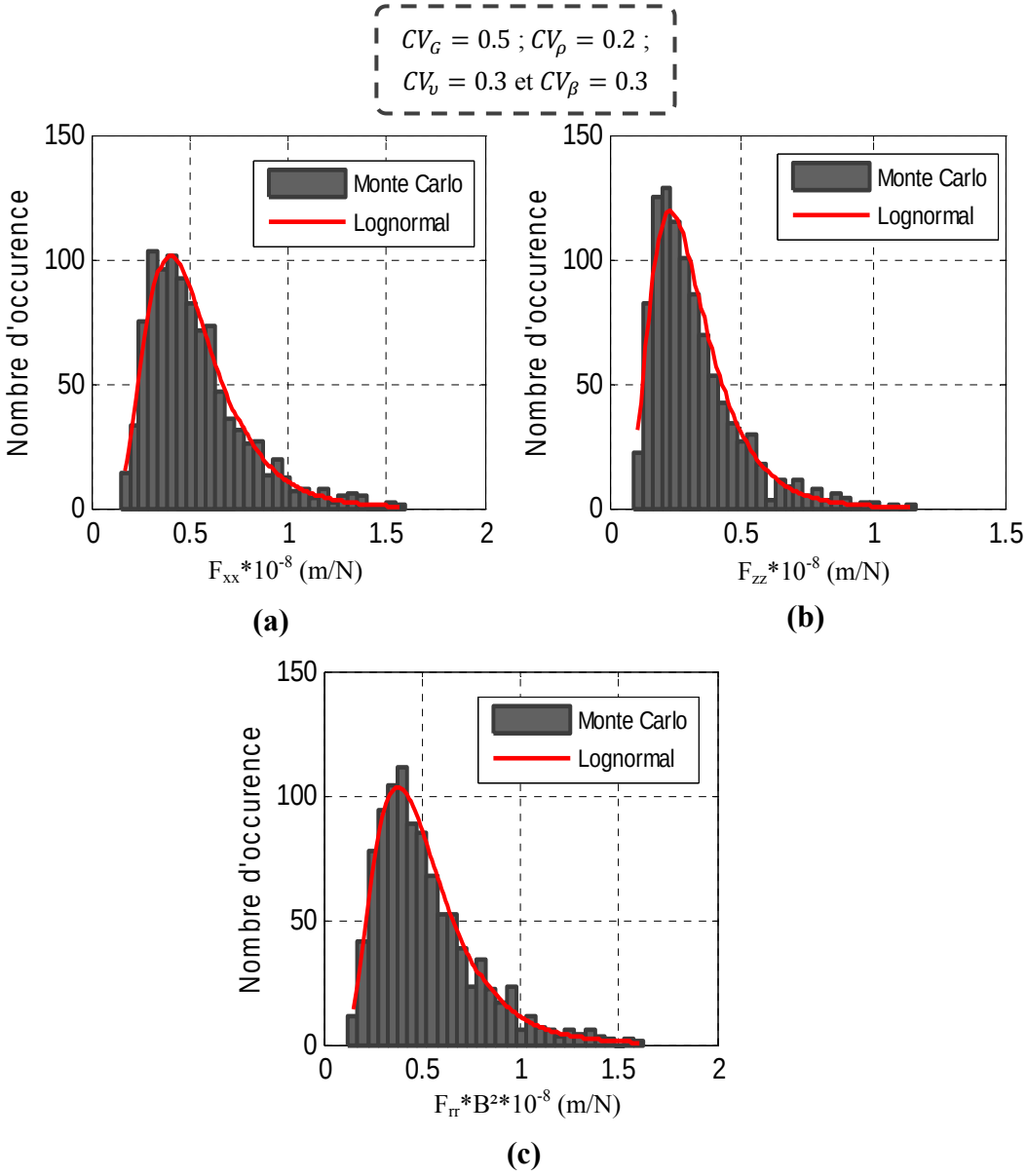



***Figure 6.5 : Réalisation typique des histogrammes du déplacement (a) horizontal $F_{xx}$ , (b) vertical $F_{zz}$ et (c) de balancement $F_{rr}$ pour $f = 1\ Hz$***

A partir des courbes tracées, il ressort que l'ajustement par une distribution lognormale est satisfaisant. Il en résulte donc que la distribution des déplacements ( $F_x$ , $F_z$ et $F_r$ ) suit celle du module de cisaillement et non pas celle de la masse volumique, du coefficient de Poisson et coefficient d'amortissement. La variabilité de ces derniers étant très faible par rapport à celle du module de cisaillement.

## 6.3 Étude paramétrique sur la réponse des fondations reposant sur un profil de sol homogène

Dans cette partie, on va étudier l'influence de la variabilité du module de cisaillement, de la masse volumique, du coefficient d'amortissement et du coefficient de Poisson sur les statistiques de la réponse des fondations filantes superficielles reposant sur un monocouche homogène surmontant un substratum rocheux.

### 6.3.1 Influence de la variabilité du module de cisaillement

- La figure 6.6 présente les statistiques de la réponse de la fondation en fonction de la variabilité du module de cisaillement *G*. D'après les courbes tracées, on peut souligner ce qui suit

- L'augmentation de $CV_G$ fait glisser la fréquence fondamentale du système sol-fondation vers les basses fréquences ce qui explique que l'hétérogénéité rend le profil de sol plus souple.

- Par ailleurs, on observe que l'augmentation de $CV_G$ induit aussi une augmentation de l'amplitude da la réponse des fondations calculée et cela est plus remarqué pour les grandes valeurs de $CV_G$ .

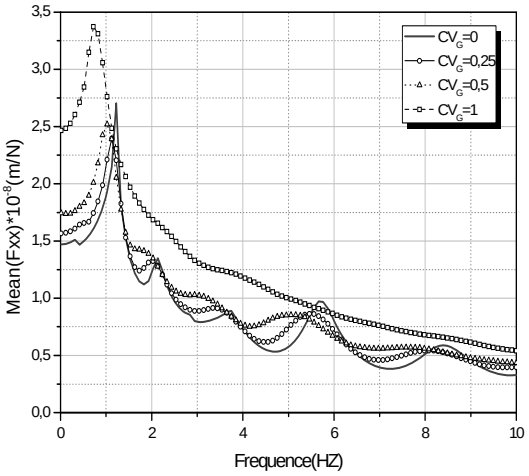
### 6.3.2 Influence de la variabilité de la masse volumique

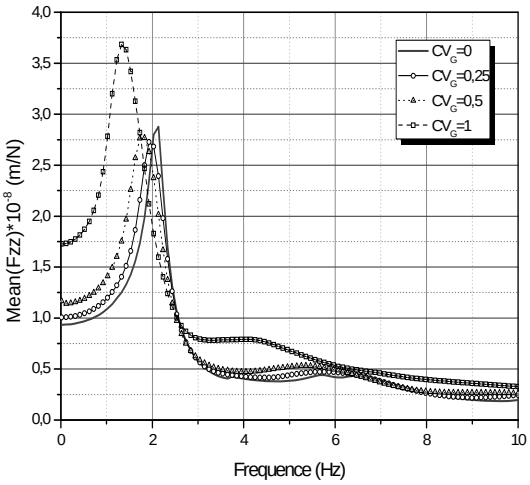
- La figure 6.7 présente les statistiques de la réponse de la fondation en fonction de la variabilité de la masse volumique $\rho$ . A partir des courbes tracées, on peut souligner ce qui suit

- Il ressort que la variabilité de la masse volumique présente une légère influence sur la réponse des fondations. Pratiquement l'influence de la variabilité de la mase volumique peut être négligée.

- On peut observer aussi que lorsque le coefficient de variation $CV_\rho$ augmente, les déplacements de la fondation diminuent particulièrement au niveau des fréquences de résonance.

$CV_\rho = CV_\upsilon = CV_\beta = 0$
$G_0 = 40\ MPa$
$\rho_0 = 1800\ kg/m^3$
$\upsilon_0 = 0.28$
$\beta_0 = 6\%$



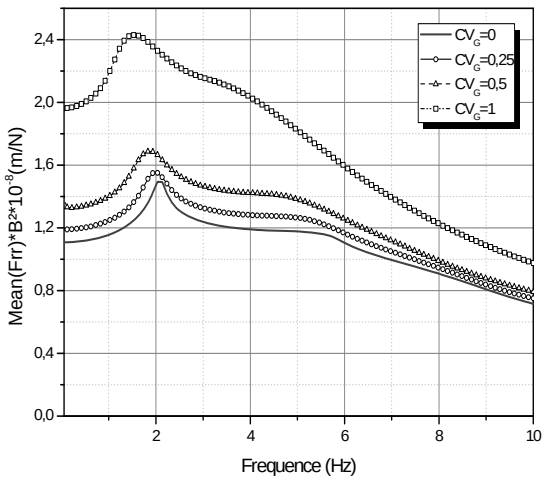




***Figure 6.6 : Déplacement horizontal $F_x$, vertical $F_z$ et de balancement $F_r$ en fonction de la variabilité de G***

$CV_G = CV_\upsilon = CV_\beta = 0$
$G_0 = 40\ MPa$
$\rho_0 = 1800\ kg/m^3$
$\upsilon_0 = 0.28$
$\beta_0 = 6\%$

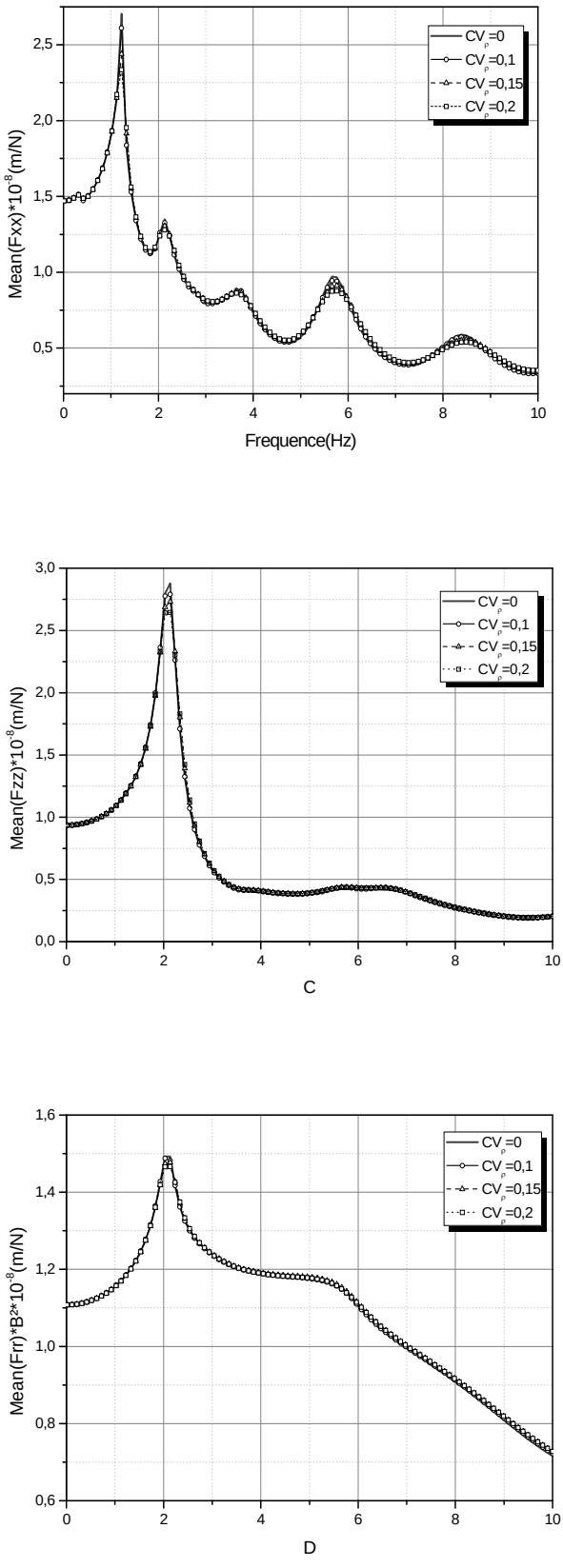



***Figure 6.7 : Déplacement horizontal $F_x$, vertical $F_z$ et de balancement $F_r$ en fonction de la variabilité de ρ***

### 6.3.3 Influence de la variabilité du coefficient d'amortissement

- La figure 6.8 présente les statistiques de la réponse de la fondation en fonction de la variabilité du coefficient d'amortissement $\beta$ .

- Il ressort que la variabilité du coefficient d'amortissement n'a pas d'influence sur la réponse des fondations calculée.

### 6.3.4 Influence de la variabilité du coefficient de Poisson

- La figure 6.9 présente les statistiques de la réponse de la fondation en fonction de la variabilité du coefficient de Poisson $\upsilon$ .

- Les résultats obtenus indiquent que la variabilité du coefficient de Poisson $\boldsymbol{\upsilon}$ a un effet plus prononcé sur le déplacement vertical et de balancement que sur le déplacement horizontal. Pratiquement l'influence du coefficient de Poisson sur le déplacement horizontal peut être négligée.

- On peut observer aussi que lorsque $CV_{\upsilon}$ augmente, les déplacements verticaux et de balancement diminuent, ce qui implique que le sol devient plus rigide.

$CV_G = CV_\rho = CV_\upsilon = 0$
$G_0 = 40\ MPa$
$\rho_0 = 1800\ kg/m^3$
$\upsilon_0 = 0.28$
$\beta_0 = 6\%$

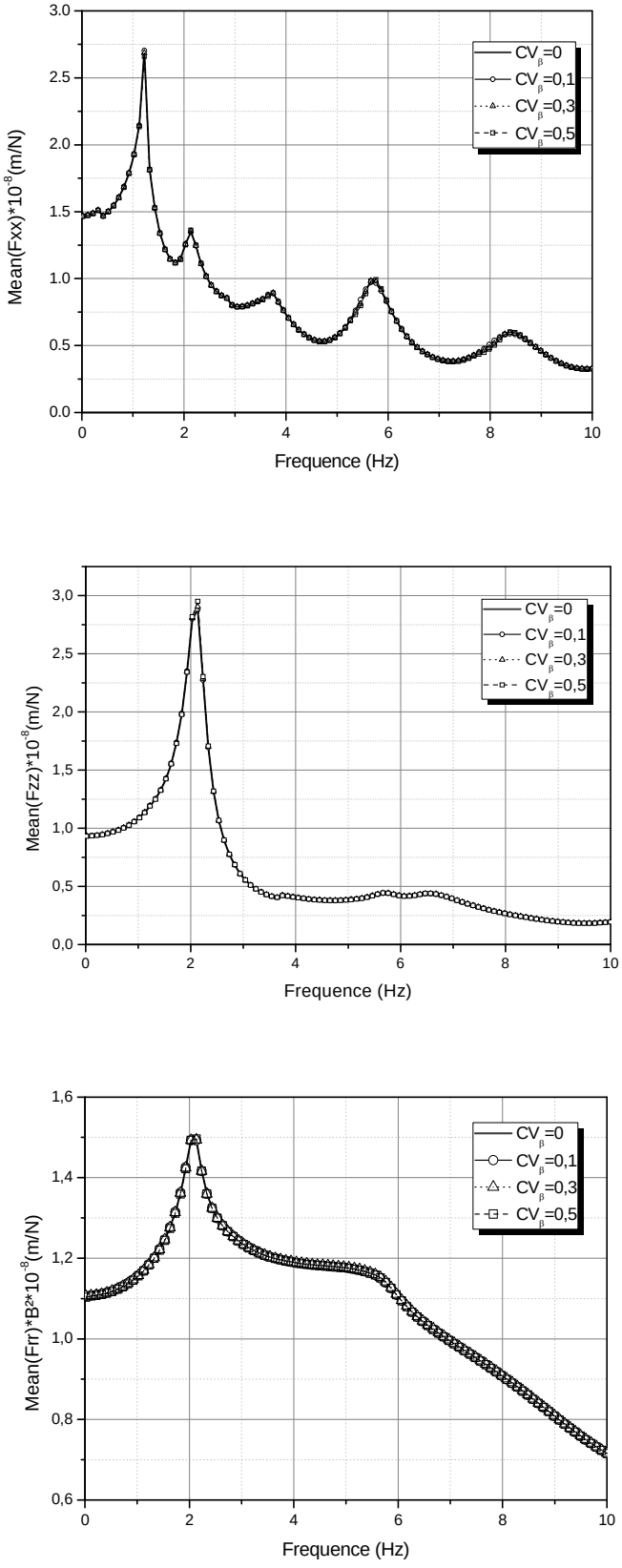
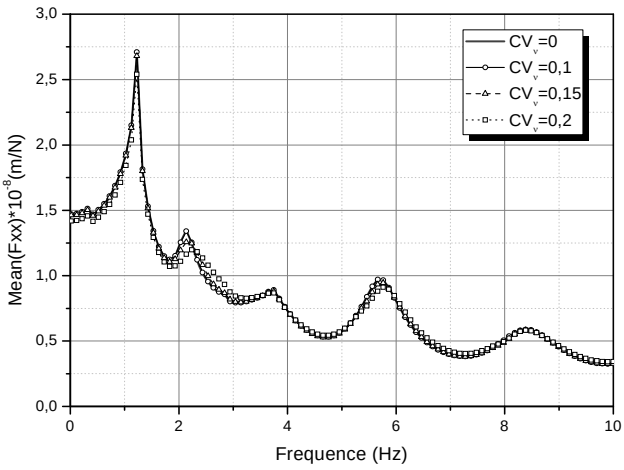
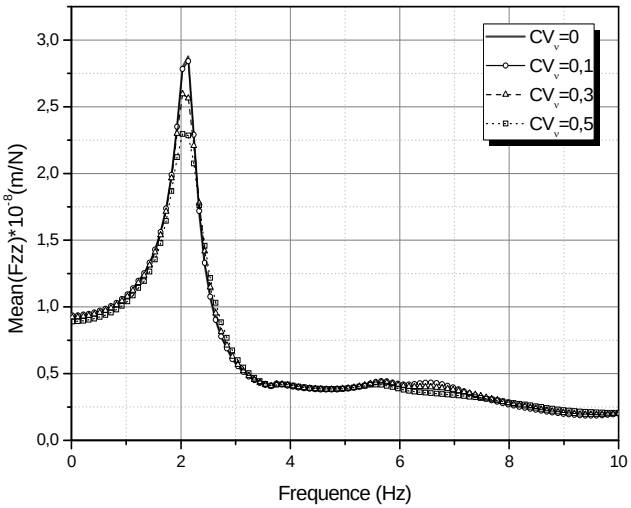



***Figure 6.8 : Déplacement horizontal $F_x$ , vertical $F_z$ et de balancement $F_r$ en fonction de la variabilité de $\beta$***

$CV_G = CV_\rho = CV_\beta = 0$
$G_0 = 40\ MPa$
$\rho_0 = 1800\ kg/m^3$
$\upsilon_0 = 0.28$
$\beta_0 = 6\%$



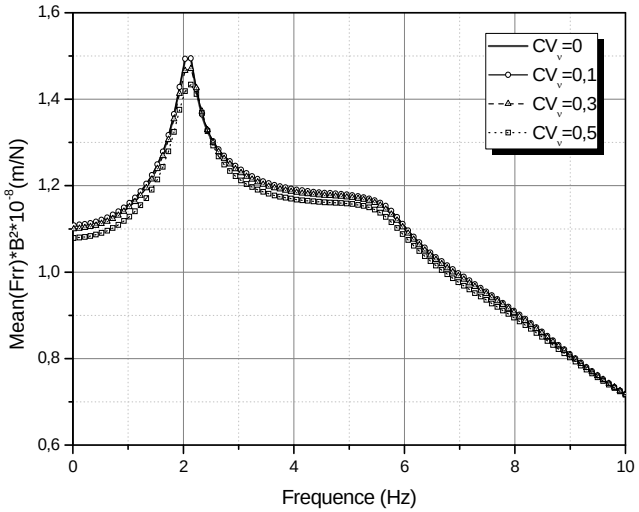




***Figure 6.9 : Déplacement horizontal $F_x$ , vertical $F_z$ et de balancement $F_r$ en fonction de la variabilité de $\upsilon$***

## 6.4 Analyse probabiliste de la réponse des fondations reposant sur un profil de sol non homogène

Les caractéristiques mécaniques et, en particulier, le module de cisaillement du sol varient en fonction de la profondeur, à partir de la surface libre. Les expériences ont montré que cette variation est en puissance de la profondeur (Richart *et al.*, 1970). Par exemple (Gazetas, 1984), pour un site uniforme d'argile molle normalement consolidée, le module de cisaillement du sol varie linéairement en fonction de la profondeur *z*; pour un site uniforme de sol cohérent, il varie en racine carrée de *z* et pour un site d'argile raide surconsolidée, il est constant. Dans le cas général, on suppose que la variation de module de cisaillement de la couche de sol est de la forme suivante (Pecker et Afra, 1995 ; Hadid et Afra, 2000)

$$G_s(z_s) = G_0 \left(\frac{z_s}{H}\right)^P \quad ; \quad 0 \leq p \leq 1 \tag{6.1}$$

où $G_0$est le module de cisaillement à l'interface couche de sol-substratum et *H* est l'épaisseur de la couche supérieur (figure 6.10).

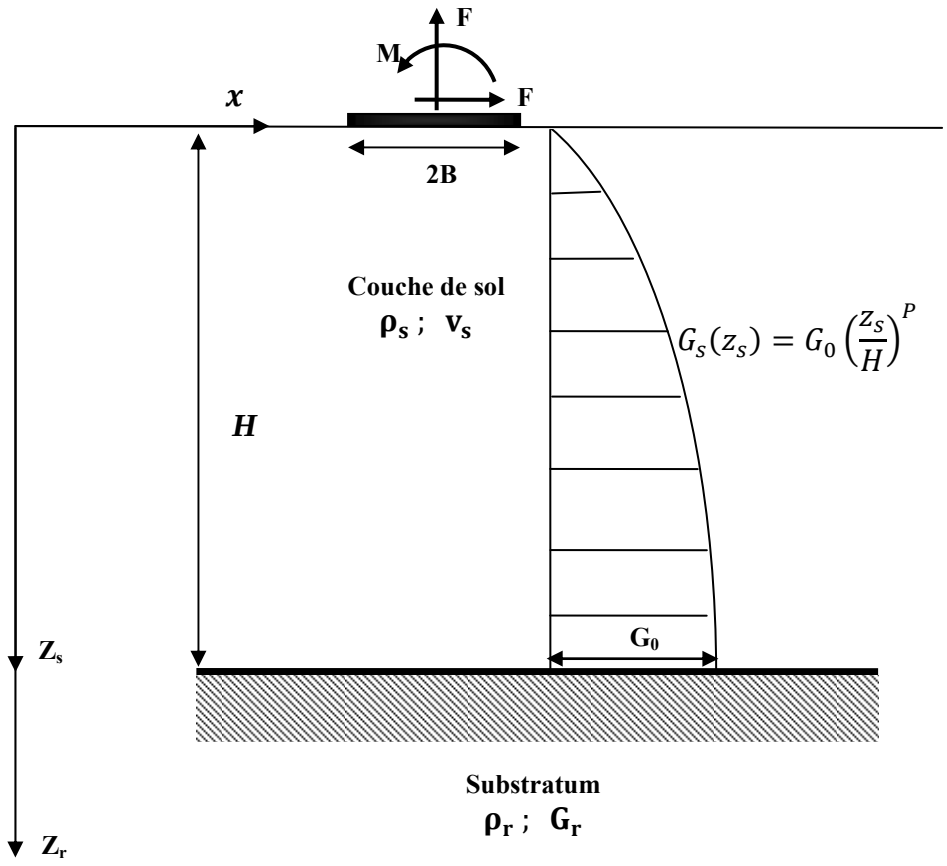



***Figure 6.10: Profil de sol non-homogène et distribution du module de cisaillement en fonction de la profondeur***

Le paramètre $'p'$ peur être obtenu en minimisant, au sens des moindres carrés, l'écart entre les valeurs réelles des vitesses de cisaillement fournies par l'essai cross-hole, et les valeurs théoriques.

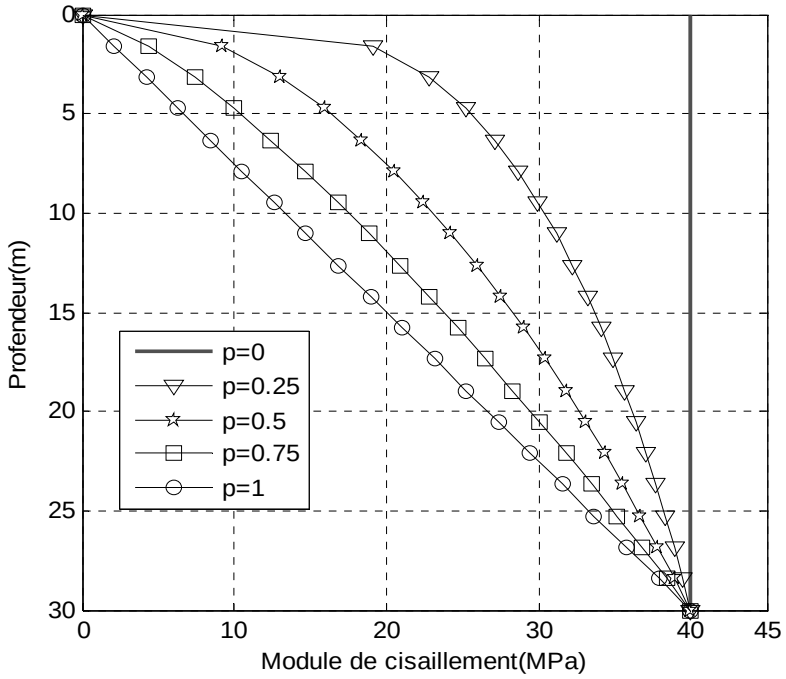


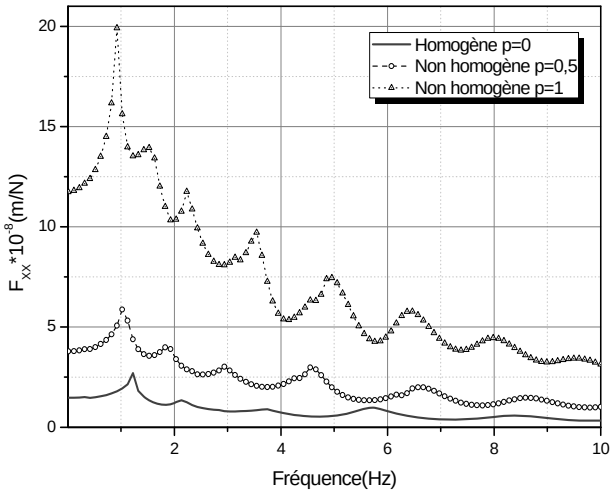

***Figure 6.11: L'allure du module de cisaillement en fonction de $'p'$***

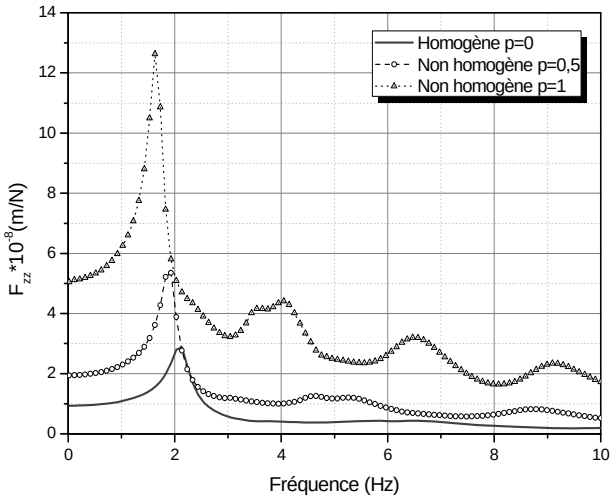
D'après la figure 6.11 on remarque que lorsque $'p'$ augmente, l'allure du module de cisaillement en profondeur a la forme parabolique et converge vers une forme linéaire pour $p = 1$ .

### 6.4.1 Influence du paramètre de non homogénéité $'p'$ sur la réponse des fondations

Dans cette partie, on a utilisé l'algorithme développé basé sur les fonctions de Green d'un milieu stratifié (*TLBEM*) pour l'analyse des couches de sol non-homogène, et ce, en remplaçant la variation continue du module de cisaillement par une variation discrète (le module de cisaillement est supposé constant pour chaque sous couche). En premier lieu, les déplacements horizontal, vertical et de balancement des fondations filantes rigides reposant sur une couche de sol viscoélastique non-homogène sont analysés. L'interface sol-fondation est donc discrétisée en 8 éléments constants de longueur égale et le profil de sol est modélisé par une couche d'une hauteur égale à 4*B* subdivisée en 20 sous-couches.

La figure (6.12) présente la valeur absolue des déplacements des fondations filantes superficielles reposant sur une couche de sol viscoélastique non-homogène.



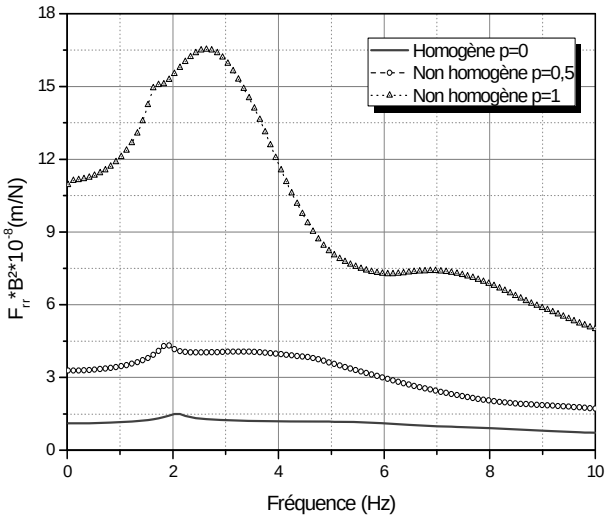




***Figure 6.12: Valeur absolue des déplacements d'une fondation superficielle reposant sur un profil de sol non-homogène***

La variation du module de cisaillement en profondeur définie par un paramètre adimensionnel $'p'$ affecte le contenu fréquentiel et l'amplitude des déplacements de la fondation. Les fonctions de souplesse exhibent une augmentation dans les amplitudes quand le degré de non-homogénéité augmente. De plus, une réduction dans l'amortissement est trouvée comme étant le résultat de la non-homogénéité. En d'autres termes, le déplacement est plus important pour les sols lâches ($'p'$ grand) que pour les sols cohérents et rigides ($'p'$ petit).

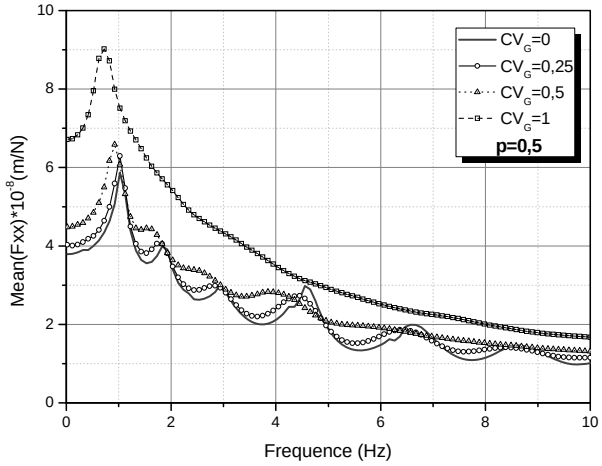
### 6.4.2 Influence du coefficient de variation

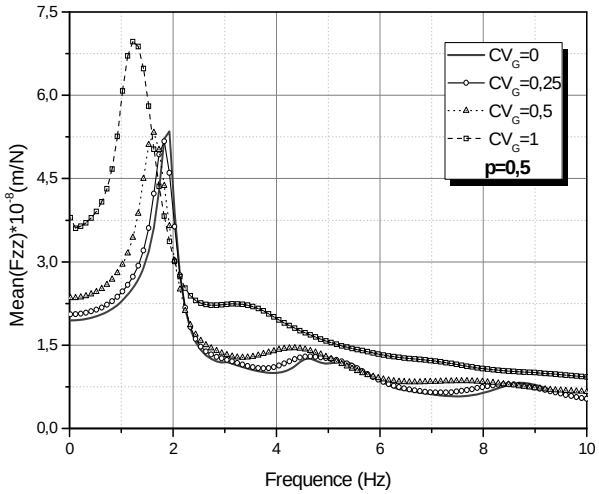
Dans cette partie, on va étudier l'influence de la variabilité du module de cisaillement, de la masse volumique, du coefficient d'amortissement et du coefficient de Poisson sur les statistiques de la réponse des fondations filantes superficielles reposant sur un monocouche non homogène surmontant un substratum rocheux. A cet effet, on considère le cas de $p = 0.5$ et $p = 1$.

- Les figures 6.13 et 6.14 présentent les statistiques de la réponse de la fondation en fonction de la variabilité du module de cisaillement *G*. D'après les courbes tracées, on peut souligner ce qui suit
- L'augmentation de $CV_G$ fait glisser la fréquence fondamentale du système sol-fondation vers les basses fréquences ce qui explique que l'hétérogénéité rend le profil de sol plus souple. Par ailleurs, on observe que l'augmentation de $CV_G$ induit aussi une augmentation de l'amplitude da la réponse des fondations calculée et cela est plus remarqué pour les grandes valeurs de $CV_G$ .
- Les amplitudes des déplacements augmentent quand le degré de non-homogénéité augmente.

- Les figures 6.15 et 6.16 présentent les statistiques de la réponse de la fondation en fonction de la variabilité de la masse volumique $\rho$ , on peut souligner ce qui suit
- La variabilité de la masse volumique a un effet plus prononcé sur le déplacement vertical que sur le déplacement horizontal et de balancement. Le déplacement vertical diminue quand la variation de $CV_\rho$ augmente. On peut observer aussi que lorsque le coefficient de variation $CV_\rho$ augmente, les déplacements de la fondation diminuent particulièrement au niveau des fréquences de résonance. Pratiquement cette influence peut être négligée.
- Les amplitudes des déplacements augmentent quand le degré de non-homogénéité augmente.

$CV_\rho = CV_v = CV_\beta = 0$



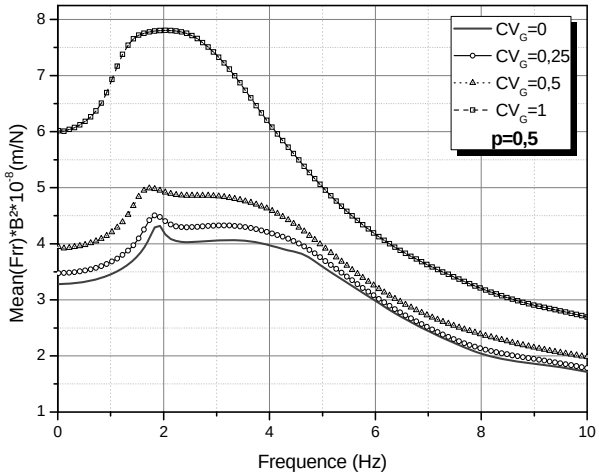
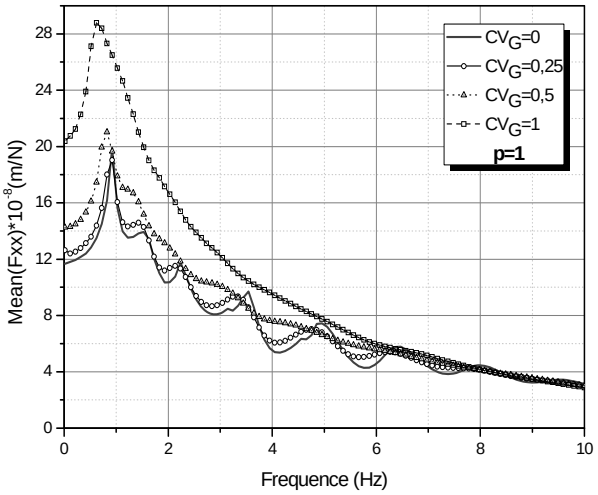
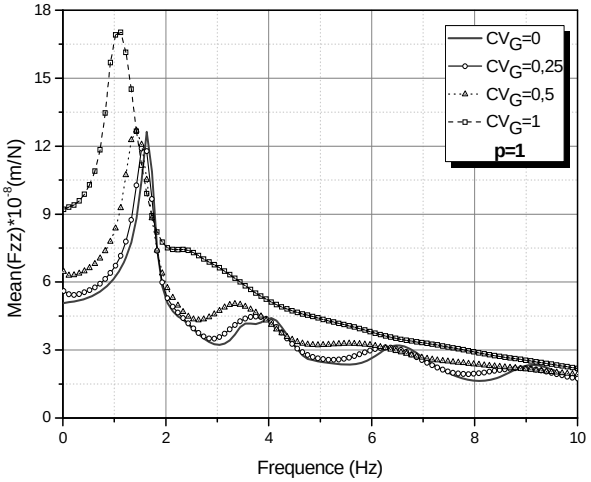




***Figure 6.13 : Déplacement horizontal $F_x$ , vertical $F_z$ et de balancement $F_r$ en fonction de la variabilité de G pour $p = 0.5$***

$$CV_\rho = CV_\upsilon = CV_\beta = 0$$



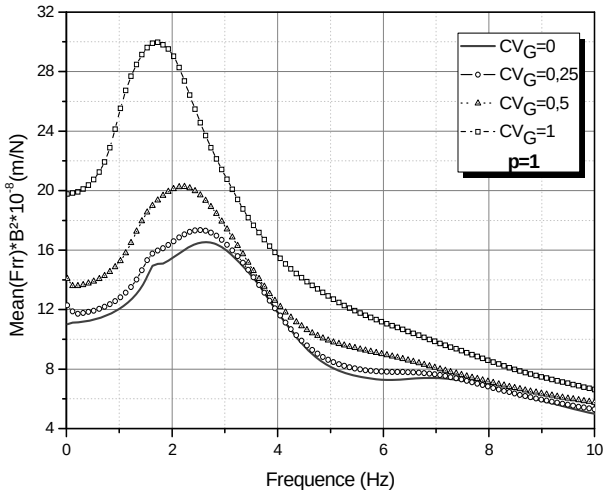
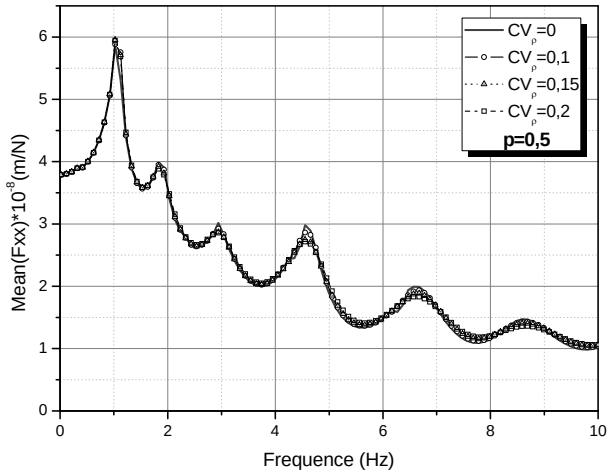
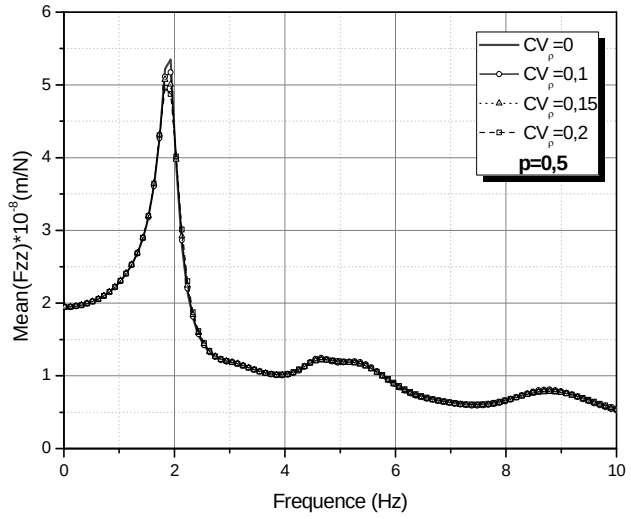




***Figure 6.14 : Déplacement horizontal $F_x$ , vertical $F_z$ et de balancement $F_r$ en fonction de la variabilité de G pour $p = 1$***

$$CV_G = CV_v = CV_\beta = 0$$



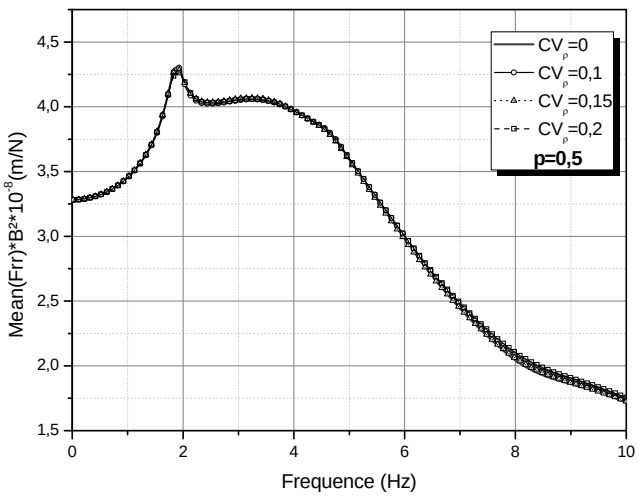
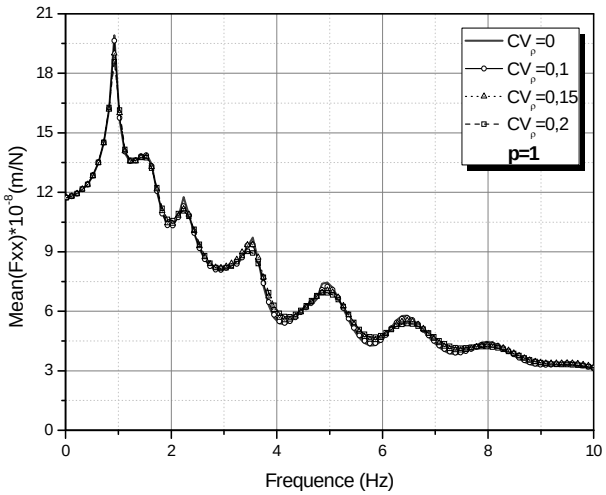
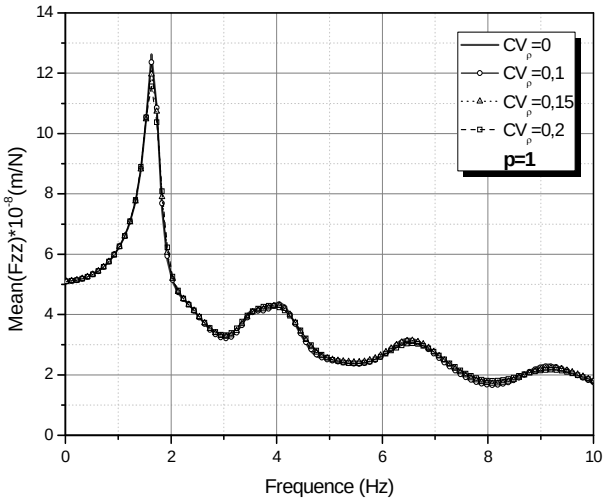




***Figure 6.15 : Déplacement horizontal $F_x$ , vertical $F_z$ et de balancement $F_r$ en fonction de la variabilité de ρ pour $p = 0.5$***

$$CV_G = CV_\upsilon = CV_\beta = 0$$



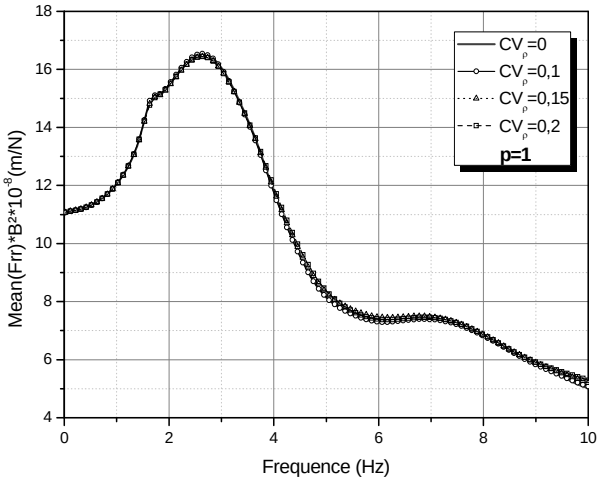




***Figure 6.16 : Déplacement horizontal $F_x$, vertical $F_z$ et de balancement $F_r$ en fonction de la variabilité de $\rho$ pour $p = 1$***

- Les figures 6.17 et 6.18 présentent les statistiques de la réponse de la fondation en fonction de la variabilité du coefficient d'amortissement $\beta$ .

- Il ressort que la variabilité du coefficient d'amortissement n'a pas d'influence sur la réponse des fondations calculée.

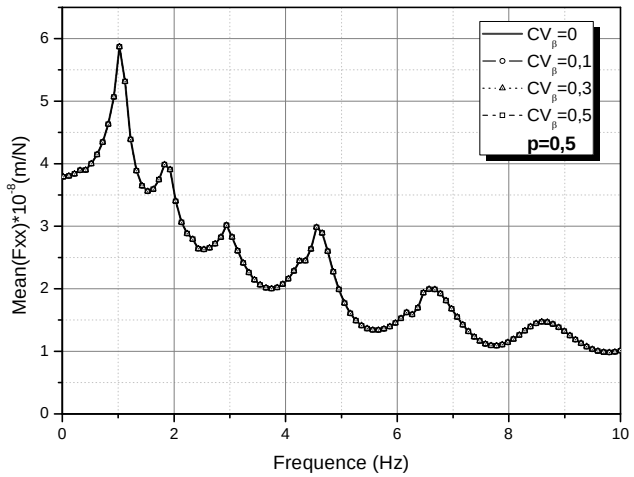
- Les amplitudes des déplacements augmentent quand $'p'$augmente.

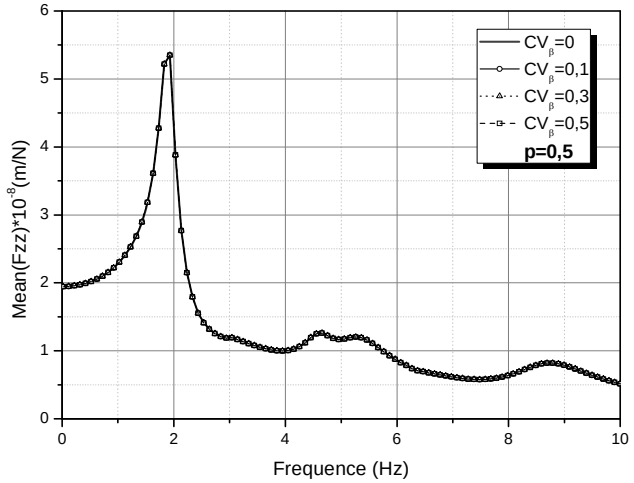
- Les figures 6.19 et 6.20 présentent les statistiques de la réponse de la fondation en fonction de la variabilité du coefficient de Poisson $\upsilon$ .

- Les résultats obtenus indiquent que lorsque $CV_{\upsilon}$ augmente, les déplacements verticaux et de balancement diminuent, ce qui implique que la fondation devient plus rigide. Pratiquement l'influence du coefficient de Poisson sur le déplacement horizontal peut être négligée.

- Les amplitudes des déplacements augmentent quand $'p'$augmente.

$$CV_G = CV_\rho = CV_v = 0$$



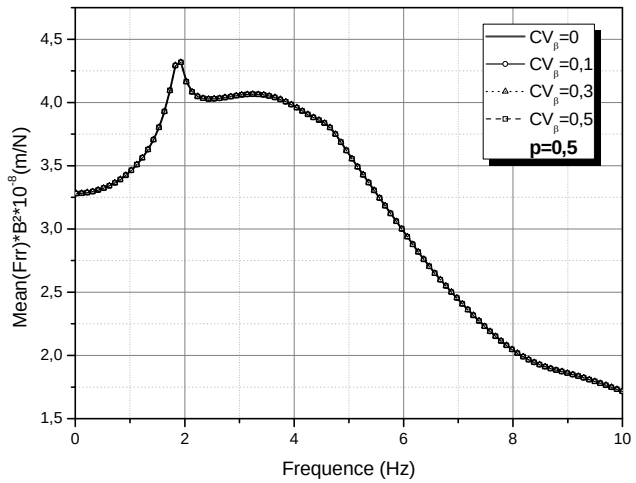




***Figure 6.17 : Déplacement horizontal $F_x$ , vertical $F_z$ et de balancement $F_r$ en fonction de la variabilité de $\beta$ pour $p = 0.5$***

$$CV_G = CV_\rho = CV_\upsilon = 0$$

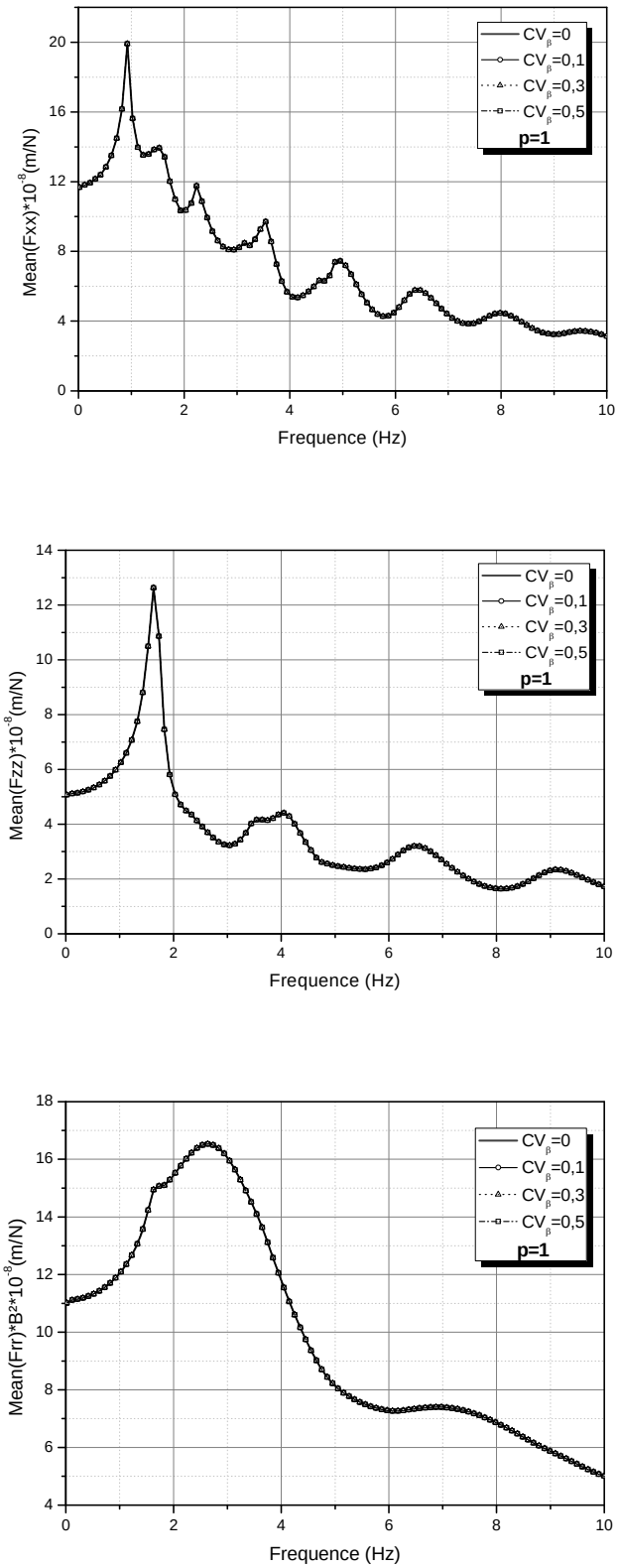
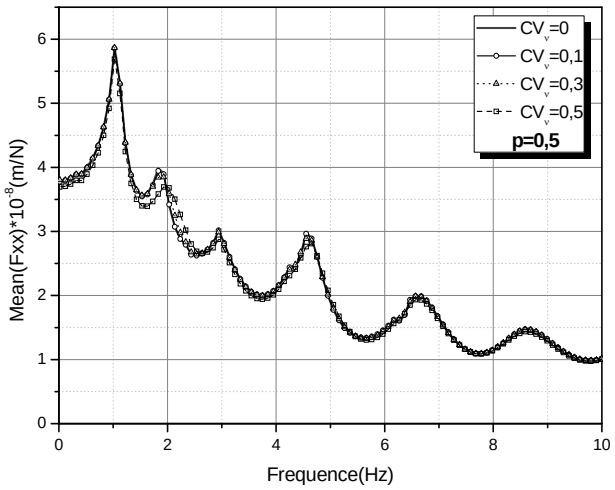
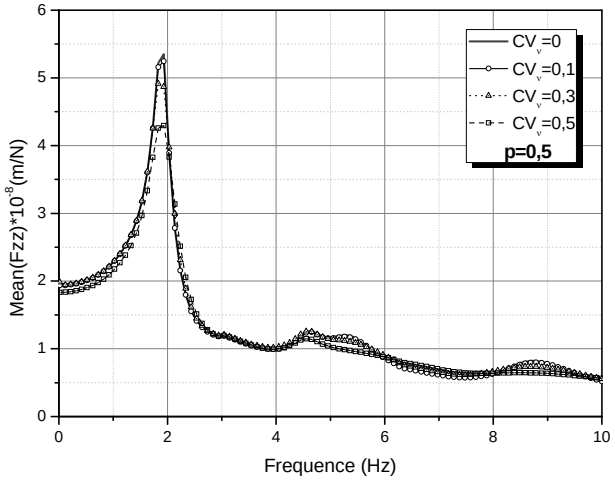



***Figure 6.18 : Déplacement horizontal $F_x$ , vertical $F_z$ et de balancement $F_r$ en fonction de la variabilité de $\beta$ pour $p = 1$***

$$CV_G = CV_\rho = CV_\beta = 0$$



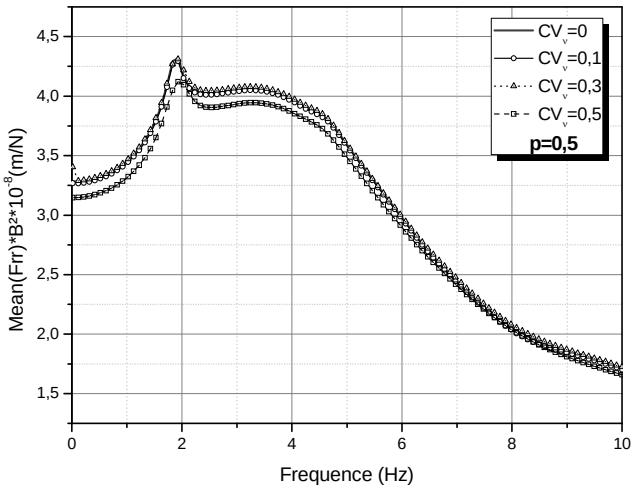
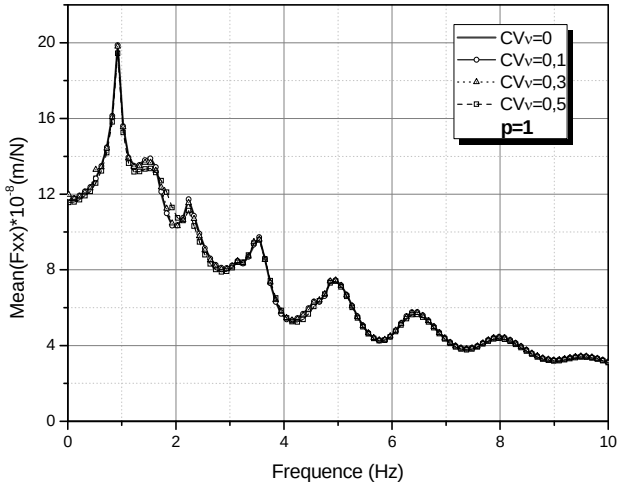
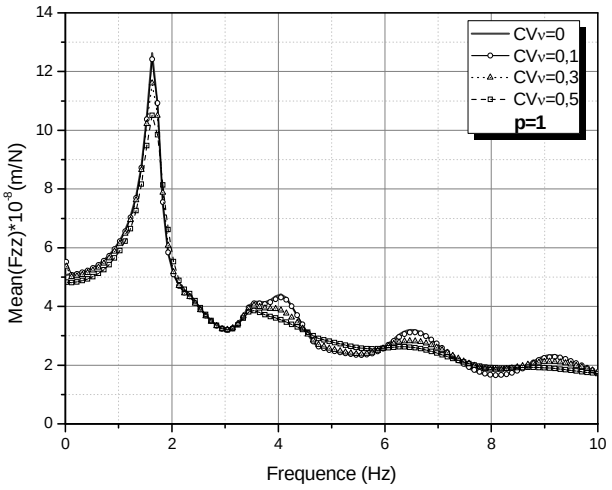




***Figure 6.19 : Déplacement horizontal $F_x$ , vertical $F_z$ et de balancement $F_r$ en fonction de la variabilité de $\upsilon$ pour $p = 0.5$***

$$CV_G = CV_\rho = CV_\beta = 0$$



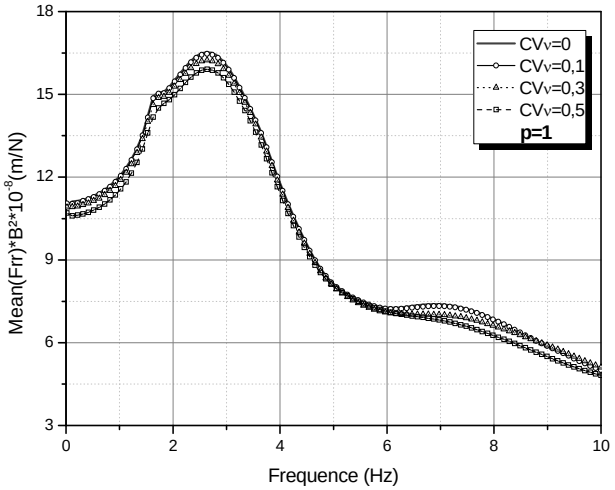




***Figure 6.20 : Déplacement horizontal $F_x$ , vertical $F_z$ et de balancement $F_r$ en fonction de la variabilité de $\upsilon$ pour $p = 1$***

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la variabilité du déplacement des fondations filantes reposant sur des milieux viscoélastiques homogènes et hétérogènes est analysée. Les propriétés aléatoires du sol considérées sont le module de cisaillement, la masse volumique, le coefficient d'amortissement et le coefficient de Poisson, modélisées par des champs spatiaux aléatoires, en considérant la corrélation Gaussienne spatiale. Le champ aléatoire pour le module de cisaillement est obtenu en adoptant la distribution lognormale, qui permet d'analyser sa grande variabilité. Pour la masse volumique, le coefficient d'amortissement et le coefficient de Poisson du sol, qui sont des paramètres bornés dans la pratique entre deux valeurs extrêmes, leurs champs aléatoires sont obtenus en utilisant la distribution beta. La prédiction des statistiques du déplacement de la fondation est effectuée en utilisant les simulations de Monte Carlo.

Les résultats obtenus indiquent que la distribution des déplacements suit celle du module de cisaillement et non pas celle de la masse volumique, du coefficient de Poisson et du coefficient d'amortissement. La variabilité de ces derniers étant très faible par rapport à celle du module de cisaillement.

Il ressort des résultats obtenus que l'augmentation du coefficient de variation du module de cisaillement provoque un effet de filtrage qui fait glisser la fréquence fondamentale du système vers les basses fréquences ce qui explique que l'hétérogénéité rend le profil de sol plus souple. Par ailleurs, on observe que l'augmentation du coefficient de variation du module de cisaillement induit aussi une augmentation de l'amplitude da la réponse des fondations calculée et cela est plus remarqué pour les grandes valeurs de $CV_G$ . Il ressort aussi que la variabilité de la masse volumique présente une légère influence sur la réponse des fondations. Pratiquement cette variabilité peut être négligée. On peut observer aussi que lorsque le coefficient de variation $CV_\rho$ augmente, les déplacements de la fondation diminuent particulièrement au niveau des fréquences de résonance. En ce qui concerne la variabilité du coefficient de Poisson on a remarqué qu'elle a un effet plus prononcé sur le déplacement vertical et de balancement que sur le déplacement horizontal. On a observé aussi que lorsque $CV_\upsilon$ augmente, les déplacements verticaux et de balancement diminuent, ce qui implique que le sol devient plus rigide. Concernant la variabilité du coefficient d'amortissement il est remarqué qu'elle ne présente aucune influence sur la réponse des fondations.

Pour le cas des sols non-homogène on a constaté que les fonctions de souplesse exhibent une augmentation dans les amplitudes et la fréquence propre du système glisse vers les basses fréquences quand le degré de non-homogénéité augmente. De plus, une réduction dans l'amortissement est trouvée comme étant le résultat de la non-homogénéité. En d'autres termes, le déplacement est plus important pour les sols lâches ($'p'$ grand) que pour les sols cohérents et rigides ($'p'$petit).

Comme synthèse, on peut dire, que les paramètres qui ont une influence prépondérante sur la réponse des fondations superficielles, surmontant un monocouche homogène ou non-homogène reposant sur substratum rocheux, sont le module de cisaillement et à un degré moindre le coefficient de Poisson. En revanche, il ressort que la variabilité de la masse volumique et du coefficient d'amortissement peuvent être négligées.

# Conclusions générales et recommandations

Tout au long de ce mémoire de magister, on s'est intéressé à la détermination de l'amplification d'un profil de sol multicouches viscoélastique et de la réponse des fondations filantes rigides, reposant sur un profil de sol multicouches viscoélastique, et ce en tenant compte de la variabilité spatiale des propriétés du sol. La méthode probabiliste de simulation indirecte des champs aléatoires non-Gaussien a été utilisée pour la simulation de la variabilité spatiale des propriétés du sol. Ainsi, on associe à la variable aléatoire non bornée (module de cisaillement) la loi de distribution lognormale, et à la variable aléatoire bornée (coefficient d'amortissement, masse volumique) la loi de distribution beta.

Pour le calcul de l'amplification du sol et la réponse des fondations, on a utilisé la méthode des couches minces. Cette méthode, contrairement aux autres méthodes disponibles pour les sols multicouches, donne des fonctions de *Green* sous forme analytique qui sont moins approximatives mais plus faciles à calculer et donc moins coûteuses.

Une formulation en éléments de frontière (*B*oundary *E*lement *M*ethod, *BEM*) a été utilisée pour le calcul de la réponse des fondations. Cette procédure est formulée dans le domaine des fréquences avec l'utilisation des fonctions de Green discrètes du milieu stratifié. Elle exige la discrétisation de l'interface sol-fondation seulement (dans le cas où l'on utiliserait les fonctions de Green du milieu infini, une distance très limitée du champ libre autour de la fondation doit être discrétisée), elle tient compte automatiquement des conditions de radiation. Les fonctions de Green discrètes peuvent être évaluées analytiquement sans recours aux intégrations numériques nécessaires au cas des fonctions de Green de demi-espace. La *BEM* associée aux fonctions de Green discrètes est un outil incontournable pour l'analyse des profils de sol à caractéristique mécanique (module de cisaillement) variant discrètement (sol multicouches) ou continûment (non-homogène) avec la profondeur.

A ce titre, une étude paramétrique relative à l'influence de la variabilité du module de cisaillement, de la masse volumique, du coefficient d'amortissement et du coefficient de Poisson sur la variabilité de la fonction d'amplification d'un un profil de sol homogène ainsi que sur la variabilité de la réponse des fondations reposant sur un profil de sol homogène et non homogène a été faite.

Comme synthèse à ce mémoire de magister, on peut récapituler les commentaires suivants:

- L'augmentation du coefficient de variation du module de cisaillement induit une diminution de l'amplification du sol. Par ailleurs, on observe que l'augmentation du coefficient de variation du module de cisaillement provoque aussi un effet de filtrage qui fait glisser la fréquence fondamentale du système vers les basses fréquences, et provoque l'atténuation des fréquences élevées. Dans ce cas, le sol simulé devient plus mou comparé au sol homogène ($CV_G = 0$). Par ailleurs, on observe que l'augmentation de $CV_G$ induit aussi une diminution de l'amplification ce qui représente en soi un facteur favorable. Ceci est interprété par les multiples réflexion-réfraction du mouvement causées par le caractère non homogène du sol.

- La variabilité de la masse volumique présente une légère influence sur la fonction d'amplification. On peut observer aussi que lorsque le coefficient de variation $CV_\rho$ augmente, la fonction d'amplification diminue particulièrement au niveau des fréquences de résonance.

- En ce qui concerne la variabilité du coefficient d'amortissement et le coefficient de Poisson il est remarqué qu'elles ne présentent aucune influence sur la fonction d'amplification.

- La distribution des déplacements ( $F_x$ , $F_z$ et $F_r$ ) de la fondation suit celle du module de cisaillement (la distribution lognormale) et non pas celle de la masse volumique, du coefficient de Poisson et coefficient d'amortissement (la distribution beta). La variabilité de ces derniers étant très faible par rapport à celle du module de cisaillement.

- L'augmentation du coefficient de variation du module de cisaillement provoque un effet de filtrage qui fait glisser la fréquence fondamentale du système sol-fondation vers les basses fréquences ce qui explique que l'hétérogénéité rend le profil de sol plus souple.

- L'augmentation du coefficient de variation du module de cisaillement induit aussi une augmentation de l'amplitude da la réponse des fondations calculée et cela est plus remarqué pour les grandes valeurs du coefficient de variation $CV_G$ .

- La variabilité de la masse volumique présente une légère influence sur la réponse des fondations. Pratiquement cette influence peut être négligée. On peut observer aussi que lorsque le coefficient de variation $CV_\rho$ augmente, les déplacements de la fondation diminuent particulièrement au niveau des fréquences de résonance.

- L'influence de la variabilité du coefficient d'amortissement peut être négligée dans le calcul de la réponse des fondations.

- La variabilité du coefficient de Poisson a un effet plus prononcé sur le déplacement vertical et le balancement que sur le déplacement horizontal. On a trouvé aussi que lorsque $CV_\upsilon$ augmente, le déplacement vertical et le balancement diminuent, ce qui implique que la fondation devient plus rigide.

- Pour le cas de sol non-homogène on a constaté que les fonctions de souplesse exhibent une augmentation dans les amplitudes et la fréquence propre du système glisse vers les basses fréquences quand le degré de non-homogénéité augmente. De plus, une réduction dans l'amortissement est trouvée comme étant le résultat de la non-homogénéité. En d'autres termes, le déplacement est plus important pour les sols lâches ($'p'$ grand) que pour les sols cohérents et rigides ($'p'$petit).

Il ressort des résultats obtenus, que les paramètres les plus influents sur la fonction d'amplification d'un profil de sol, sont le module de cisaillement et à un degré moindre la masse volumique. En revanche, il ressort que la variabilité du coefficient d'amortissement et le coefficient de Poisson peuvent être négligées. Et pour la réponse des fondations superficielles, surmontant un monocouche homogène ou non-homogène reposant sur un substratum rocheux, sont le module de cisaillement et à un degré moindre le coefficient de

Poisson. Par contre, il ressort que la variabilité de la masse volumique et du coefficient d'amortissement peuvent être négligées.

Ces résultats mettent en évidence la nécessité de prendre en considération l'effet de l'interaction sol-structure ainsi que l'effet de la variabilité spatiale des propriétés du sol dans une conception parasismique des structures.

**Recommandations**

- ✓ Étendre l'aspect 2D à l'aspect 3D du problème.
- ✓ Étendre l'aspect linéaire à l'aspect non linéaire équivalent.
- ✓ Prise en compte de l'interaction fondation-sol-fondation et de l'interaction inertielle.
- ✓ Étude des fondations filantes flexibles en utilisant un couplage des deux méthodes MEF/BEM.
- ✓ Étude de l'effet d'autres propriétés de sol (la porosité, l'angle de frottement interne, la perméabilité, etc.) sur la réponse des fondations.

# Références bibliographiques


**Abascale, R. and Dominguez, J., (1984).** Dynamic Behaviour of Strip Footings on Non-Homogeneous Viscoelastic Soils, Proc. of Interaction Symposium on Dynamic Soil- Structure Interaction, Minneapolis, pp.25-35.

**Abascale, R. and Dominguez, J., (1986).** Vibrations of Footings on Zoned Viscoelastic Soils, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 112, No. 5, pp. 433-447.

**AIJ, (1993).** Earthquake motion and ground motion. In commemoration of the 20th anniversary of the research subcommittee on earthquake ground motion. Edited and published by the Architectural Institute of Japan 1993.

**Airouche, H., (2000).** Etude des Effets d'Interactions Dynamiques dus au Trafics Urbains dans les Systèmes Sol-Tunnel par la Méthode des Equations Intégrales aux Frontières, Thèse de Magister, Ecole Nationale Polytechnique.

**Alekseyev, A.S. and Mikhailenko, B.G., (1976).** Solution of Lamb's problem for a vertically inhomogeneous half-space, Akad. Nauk. Izu. Physics of the Solid Earth, 12(1), 748-755.

**Ang, AHS., Tang, WH., (1975).** Probability concepts in engineering planning and design. John Wiley & Sons.

**Apsel, R. J. and Luco, J. E., (1976).** Torsional Response of Rigid Embedded Foundation, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 102, No. EM6, pp. 957-970.

**Banerjee, P. K. and Butterfield, R., (1981).** Boundary Element Methods in Engineering Science, McGraw-Hill, London.

**Berrah, M. K., and Hadid, M., (2003).** Foundation-Soil-foundation Interaction Through a Layered Soil Profile, European Earthquake Engineering. (In press)

**Brebbia, C. A. and Dominguez, J., (1989).** Boundary Elements: An Introductory Course, Computational Mechanics Publications and McGraw-Hill, Southampton and New York.

**Clayton, R. and Engquist, B. (1977).** Absorbing Boundary Conditions for Acoustic and Elastic Wave Equations, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 67, pp. 1529-1540.

**Cummins, P. R., (1994).** DSM complete synthetic seismograms: P-SV, spherically symmetric, case, Geophysical Research Letters, 21, 15, 1663-1666.

**Cummins, P. R., Geller, R.J., Hatori, T. and Takeuchi, N., (1994).** DSM complete synthetic seismograms: SH, spherically symmetric, case, Geophysical Research Letters, 21, 15, 533-536.

**Datta, S.B., Shah, A.H., Bratton, R.L. and Chakraborty, T., (1988).** Wave propagation in laminated composite plates, Journal of Acoustic Society of America, 83, 6, 2020-2026, June.

**Davidovici, V., (1985).** Génie parasismique. Presse de l'ENPC, Paris.

**Dominguez, J., (1978).** Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations, Report No.R78- 20, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts.

**Dong, S.B. and Nelson, R.B., (1972).** On natural vibrations and waves in laminated orthotropic plates, Journal of Applied Mechanics, ASME, 39, 739-745.

**Drake, L.A., (1972a).** Love and Rayleigh waves in non-horizontally layered media, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 62, No. 5, 1241-1258, October.

**Drake, L.A., (1972b).** Rayleigh waves at continental boundary by finite element method, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 62, No. 5, 1259-1268, October.

**Drake, L.A., (1980).** Love and Rayleigh waves in irregular soil layers, Bulletin of the Seismological Society of America, 70, 2, 571-582, April.

**Elkated, T., Chalaturnyk, R., Robertson, PK., (2003).** An overview of soil heterogeneity: quantification and implication on geotechnical filed problems. Canadian Geotechnical Journal, 2003; 40: 1-15.

**Faccioli, E., (1977).** A Stochastic approach to soil amplification. BSSA. 1977 ; 66: 1277-1291.

**Fenton, GA., (1990)** Simulation and Analysis of Random Fields. Ph.D. thesis, Princeton University.

**Fenton, GA., Vanmarcke, EH., (1991).** Spatial Variation in Liquefaction Risk Assessment. Proc. Of Geotechnical Engrg. Congress, ASCE, Geotech. Div., Boulder, Colorado, 1991: 594 - 607.

**Fenton, GA. and Vanmarcke, EH., (1998).** Spatial variation in liquefaction risk. Géotechnique. 48(6): 819-831.

**Gazetas, G., Debchaudhury, A., Gaspirani, DA., (1982).** Stochastic estimation of the nonlinear response of dams to strong earthquake. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1(1):10-19.

**Geller, R.J. and Ohminato, T., (1994).** Computation of synthetic seismograms and their partial derivatives for heterogeneous media with arbitrary natural boundary conditions using the Direct Solution Method, Geophys, J, Int., 116, 421-446.

**Geller, R.J. and Hatori, T., (1995).** DSM synthetic seismograms using analytical trial functions: plane-layered, isotropic, case, Geophys, J, Int., 120, 163-172.

**Ghibril, R., (1992).** On the partial discretization of coupled plane stratified systems, Ph.D. Thesis. Departement of Civil Engineering, MIT, February 1992.

**Gupta, ID., Trifunac, MD., (1990).** Probabilistic spectrum superposition for response analysis including the effects of soil-structure interaction. Journal of Probabilistic Engineering Mechanics; 5(1):9-18.

**Hadid, M., (1995).** Analyse de l'Interaction Cinématique Déterministe et Stochastique pour les Fondations Rigides Bidimensionnelles par une Approche Intégrale aux Frontières. Thèse de Magister, École Nationale Polytechnique, Algérie.
**Hadid, M., (2003).** Approche Intégrée pour le Traitement des Problèmes d'Interaction Multiples entre Structures via le Sol. Thèse de Doctorat, École Nationale Polytechnique, Algérie.

**Hadid, M. and Berrah, M. K., (2001).** Structural Response for Stochastic Kinematic Interaction, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.30, No. 1, pp. 97-114.

**Hadid, M. and Berrah, M. K., (2002).** Dynamic Coupling of Multiple Foundations Through Soil, Twelfth European Conference on Earthquake Engineering, London.

**Hao, H., (1992).** Response of multiply supported rigid foundation to spatially random ground motion. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 20:821-838.

**Harichandran, RS., Vanmarcke, EH., (1986).** Stochastic variation of earthquake ground motion in space-time. Journal of Engineering Mechanics ASCE, 112(2):154-174.

**Harren, SV., Fossum, AF., (1991).** Probabilistic analysis of impulsively loaded deep-buried structure. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics; 15:513-526.

**Hoshiya, M., Ishii K., (1983).** Evaluation of kinematic interaction of soil-foundation systems by a stochastic model. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2(3):128-134.

**Hoshiya, M., Ishii, K., (1984).** Deconvolution method between kinematic interaction and dynamic interaction of soil-foundation systems based on observed data. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 3(3):157-164.

**Jaksa, M. B., (1995).** The influence of spatial variability on the geotechnical design properties of a stiff, overconsolidated clay. Ph.D. Thesis, The University of Adelaide, Faculty of Engineering.

**Karabalis, D. L. et Beskos, D. E., (1984).** Dynamic Response of 3-D Rigid Surface Foundations by Time Domain Boundary Element Method, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 12, pp. 73-94.

**Kausel, E. (1974).** Forced Vibration of Circular Foundations on Layered Media, Report No. 74/11, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge Massachusetts.

**Kausel, E. (1981).** An Explicit Solution for the Green's Functions for Dynamic Loads in Layered Media, Report No. 81/13, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge Massachusetts.

**Kausel, E. (1986).** Wave Propagation in Anisotropic Layered Media, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 23, pp. 1567-1578.

**Kausel, E. (1992).** Physical interpretation and stability of paraxial boundary condition, Bulletin of the Seismological Society of America, 82, 2, 898-913, April.

**Kausel, E. (1993).** Discrete Green's functions for layered media: Time domain solution, Proceedings of the NSF workshop, Geophysical Techniques for Site and Material Characterization, held June 11-12, 1993 in Atlanta, Georgia.

**Kausel, E. (1994).** Thin-Layer Method: Formulation in The Time Domain, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, pp. 927-941.

**Kausel E., (1998a).** Blast loads vs. point loads: the Missing factor, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 124, 2, pp. 243-244, February.

**Kausel E., (1998b).** Dynamic point sources in laminated media via the thin-layer method, Internal Journal of Solids and Structures, 00, 000-000.

**Kausel, E. (2006).** Fundamental Solutions in Elastodynamics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge University Press, New York.

**Kausel, E. and Peek, R., (1982a).** Dynamic Loads in the Interior of Layered Stratum : An Explicit Solution, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 72, No. 5, pp. 1459-1481.

**Kausel, E. and Peek, R., (1982b).** Boundary integral method for stratified soils, MIT Research Report R 82-50, Departement of Civil Engineering, MIT, Cambridge, MA, 02139.

**Kausel, E. and Roesset, J. M., (1977).** Semianalytic Hyperelement for Layered Strata, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 103, No. EM4, pp. 569-588.

**Kausel, E. and Roesset, J. M., (1981).** Stiffness Matrices for Layered Soils, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 71, No. 6, pp. 1743-1761.

**Kausel, E. and Roesset, J. M., (1984).** Soil amplification : some refinements, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 3, No. 3, pp. 116-123.

**Kausel, E. and Seale, S. H., (1987).** Static Loads in Layered Halfspaces, Journal of Applied Mechanics, Vol. 109, pp. 403-408.

**Kobori, T., Minai, R., (1973).** Dynamical Interaction of multiple Structural Systems on a Soil Medium, Fifth World Conference on Earthquake Engineering, Rome, Italy, 10 p.

**Koutsourelakis, S., Prévost, J. H., Deodatis, G., (2002).** Risk assessment of an interacting structure-soil system due to liquefaction. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 31:851-879.

**Liu, G. R. and Achenbach (1994).** A strip element method for stress analysis of anisotropic linearly elastic solids, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 61, pp. 270-277, June.

**Liu, G. R. and Achenbach (1995).** Strip element method to analyze wave scattering by cracks in anisotropic laminated plates, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 62, pp. 607-613, September.

**Luco, J. E., (1976).** Torsional Response of Structures for SH Waves: The Case of Hemispherical Foundations, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 66, pp. 109-123.

**Lutes, L. D., Sarkani S., (1995).** Structural damping for soil-structure interaction studies. Journal of Structural Engineering and Mechanics, 3(2):107-120.

**Lysmer, J., (1970).** Lumped Mass Method for Rayleigh Waves, ***Bulletin of the*** Seismological Society of America*,* Vol. 60, pp. 89-104.

**Lysmer, J. and Waas, G., (1972).** Shear Waves in Plane Infinite Structures, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 98, EM1, pp. 85-105.

**Maeda, T. and Kausel, E.,(1991).** On the Accuracy of Some Approximate Antiplane Half-Space Stiffnesses, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 81, No. 4, pp. 1340-1359.

**Mohammadi, M. et Karabalis, D. L., (1990).** 3-D Soil-Structure Interaction Analysis by BEM: Comparison Studies and Computational Aspects, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 9, pp. 96-108.

**Nelson, R.B., Dong, S.B., Kalra, R.D., (1971).** Vibrations and waves in laminated orthotropic circular cylinders, Journal of Sound and Vibrations, 30, 3, 429-444.

**Nelson, R.B., Dong, S.B., (1973).** High frequency vibrations and waves in laminated orthotropic plates, Journal of Sound and Vibrations, 30, 1, 33-44.

**Nour, A., Slimani, A., Laouami, N., (2002).** Foundation settlement statistics via finite element analysis**.** Journal Computers and Geotechnics, 29(8): 641-672.

**Nour, A., Slimani, A., Laouami, N., Afra, H., (2003).** Finite element model for the probabilistic seismic response of heterogeneous soil profile. Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 23(5): 331-348.

**Nour, A., (2004).** Investigation stochastique sur les milieux hétérogènes par la méthode des éléments finis. Thèse de Doctorat, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne, Algérie.

**Olsen, A.H., Orcutt, J.A. and Frazier, G.A., (1984).** The discrete wavenumber/finite element method for synthetic seismograms, Geophys. J.R. astr. Soc., 77, 421-460.

**Pais, A., (1988).** Dynamic Coupling of Multiple Structures Through Soil, Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts.

**Park, J. (1998).** Point sources in cylindrically laminated rods, S.M. Thesis, Department of Civil and Environmental Engineering, MIT, May 1998.

**Park, J. (2002).** Wave motion in finite and infinite media using the Thin-Layer Method. Doctorate thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge Massachusetts.
**Pecker, A., (1984).** Dynamique des sols, Presse de l'ENPC, Paris.

**Pecker, A. and Afra, H., (1995).** Charts for Natural Frequencies and Transfer Functions of Inhomogeneous Soil Deposits, Fifth International Conference on Seismic Zonation, Nice (France), pp. 17-19.

**Prosper, D., (2001).** Modeling and detection of delaminations in laminated plates. Ph.D. Thesis, Departement of Civil and Environmental Engineering, MIT, May 1998.

**Rahman, M. S., Yeh, C. H., (1999).** Variability of seismic response of soils using stochastic finite element method. Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 18: 229-245.

**Richart, F. E., Hall, J. R., and Woods, D., (1970).** Vibration of soils and foundations, Prentice Hill, New Jersey.

**Romo-Organista, M. P., (1977).** Soil-structure interaction in a random environment. P.h.D, Dissertation, University of California, Berkeley.

**Rosenblatt, M., (1952).** Remarks on a multivariate transformation. Ann. of Mathematical Statistics, 23: 470-472.

**Rosenblueth, E., (1975).** Point estimates for probability moments. Proc. Natl. Acad. Sci. 72: 3812-3814.

**Rosenblueth, E., (1981).** Two-point estimates in probability. Appl. Math. Model., 5:329-335.

**Rukos, E.A., (1978).** Continuous elements in the finite element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 12, 11-33.

**Safak, E., (2001).** Local site effects and dynamic soil behavior. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 21: 453-458.

**Saha, O., (1997).** Investigation Numérique de la Réponse Sismique Déterministe et Stochastique des Fondations Tridimensionelles, Thèse de Magister, Ecole Nationale Polytechnique, Algérie.

**Schepers, W., (2001).** Possibilités d'optimisation soumises lors de l'application de la méthode des couches minces. Thèse de Doctorat, Université Technique de Berlin, Allemagne.

**Schevenels, M., Lombaert,G., Degrande, G., Degrauwe,D., Schoors, B., (2007).** The Green's functions of a vertically inhomogeneous soil with a random dynamic shear modulus. Probabilistic Engineering Mechanics 22 (2007) 100–111.

**Seale, S. B., (1985).** Dynamic Loads in Layered Halfspaces, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.

**Seale, S. H. and Kausel, E., (1989).** Point Loads in Cross-Anisotropic Layered Halfspaces, Journal of the Engineering Mechanics, Vol. 115 N° 3, pp. 509-524.

**Shinozuka, M., (1987).** Stochastic fields and their digital simulation. In: Schueller GI and Shinozuka M, Editors. Stochastic methods in structural dynamics, Martinus Nijhoff Publishers, Boston, Mass. 93-133.

**Spyrakos, C.C and Beskos, D.E., (1986a).** Dynamic Response of Rigid Strip Foundation by Time domain Boundary Element Method," International Journal for Numerical Methods in Engineering , Vol.23, pp. 1547-1565.

**Spyrakos, C.C and Beskos, D.E., (1986b).** Dynamic Response of Flexible Strip Foundation by Boundary and Finite Element, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol.5, pp.84-96.

**Suzuki, S., Asano, K., (1992).** Dynamic amplification functions of the surface layer considering the variation of soil parameters. Tenth World conference on earthquake engineering, Balkema Rotterdam 1992, 19-24 July Madrid, Spain: 1193-1198.

**Tajimi, H., (1980).** A Contribution to Theoretical Prediction of Dynamic Stiffness of Surface Foundations, Seventh World Conference on Earthquake Engineering, Turkey, Vol. 5, pp. 105-112.

**Tan, H. H., (1989).** Displacement approach for generalized Rayleigh waves in layered solid-fluid media, Bulletin of Seismological Society of America, 79, 4, 1251-1263, August.

**Tassoulas, J. and Kausel, E., (1983).** Elements for the Numerical Analysis of Wave Motion in Layered Strata, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, pp. 1005-1032.

**Tian, L., Jie L., (1992).** Influence of random mechanical parameters on earthquakes response analysis of site. Tenth World conference on earthquake engineering, Balkema Rotterdam 1992, 19-24 July Madrid, Spain: 1181-1185.

**Toubalem, F., (1996).** Interaction sol-structure en milieu stochastique. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon.

**Toubalem, F., Zeldin, B., Thouverez, F., Labbe, P., (1999).** Vertical excitation of stochastic soil-structure interaction systems. Journal of Geotechnical Engineering ASCE; 125:349-356.

**Touhei, T., (1994).** A discrete wavenumber and normal-mode superposition method for synthesis seismograms, Bulletin of the Seismological of America, 84, 5, 1473-1483, October.

**Vanmarcke, E. H., (1977a).** Probabilistic Modeling of Soil Profiles. J. Geotech. Engrg. Div., ASCE, Vol. 103, No. GT11, 1227-1246.

**Vanmarcke, E. H., (1977b).** Random vibration approach to soil dynamics. The use of probability in earthquake engineering. New York; ASCE Publication, 146-176.

**Veletsos, A. S., Prasad, A. M., (1989).** Seismic interaction of structures and soils: Stochastic approach. Journal of Structural Engineering, ASCE, 114:935-1056.

**Waas, G., (1972).** Analysis Method for Footing Vibrations Through Layered Media, Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley.

**Wang, S., Hao, H., (2002).** Effect of random variations of soil properties on site amplification of seismic ground motions. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 22: 551-564.

**Wolf JP., (1994).** Foundation vibration analysis using simple physical models. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

**Wong, H. L. and Trifunac, M. D., (1974).** Investigation of a Shear Wall with the Soil for Incident Plane SH-Waves: Elliptical Rigid Foundation, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 64, 1825-1842.

**Xi, Z. C. Liu, G. R., Lam, K. Y. and Shang, H. M., (2000).** A strip-element method for analyzing wave scattering by a crack in an immersed axisymmetric laminated composite cylinder, Journal of Acoustic Society of America, 108, 1, 175- 183.

**Yamazaki, F., Shinozuka, M., (1988).** Digital generation of non-Gaussian stochastic field. Journal of Engineering Mechanics ASCE ; 114(7): 1183-1197.

**Zaiguang, W., Goucheng, H., (1992).** Stochastic seismic response analysis for soil layers with random dynamic parameters. Tenth World conference on earthquake engineering, Balkema Rotterdam1992, 19-24 July Madrid, Spain: 1187-1192.

**Zerva, A., (1992).** Seismic ground motion simulations from a class of spatial variability models. Earthquake Engineering and Structural Dynamics 21: 351-361.

**Zerva, A., Harada, T., (1997).** Effect of surface layer stochastically on seismic ground motion coherence and strain estimates. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 16:445-457.