

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي



**Ecole Nationale Supérieure
des Travaux Publics**

المدرسة الوطنية العليا للأشغال العمومية

Code :

Mémoire

Pour l'Obtention du Diplôme De MASTER

Spécialité : TRAVAUX PUBLICS

Filière : Matériaux & Structures

Thème

**Influence Des Charges Mobiles Sur L'hourdis De
Pont Et Etude Comparative Entre Méthodes De
Guyon-Massonnet / Eléments Finis Pour La
Répartition Transversale Des Efforts Sur Le
Tablier**

Encadré par :

Dr. KIBBOUA Abderrahmane

Présenté par :

BENARAB Soufyane

Promotion 2015

Ecole Nationale Supérieure des Travaux Publics Garidi Kouba



REMERCIEMENTS

Je remercie, en premier lieu, mon dieu qui a bien voulu me donner la force pour effectuer le présent travail.

Je remercie mes très chers parents pour leurs soutiens et leurs patiences.

*Je tiens aussi à remercier mon promoteur **Dr : KIBBOUA Abderrahmane** Maître de recherche classe A au Centre National de Recherche Appliquée en Génie Parasismique (CGS). Pour son suivi et ses conseils durant l'évolution de ce travail.*

*Je remercie en particulier, **Mr BOUA Bilel** pour son suivi et ses conseils ainsi que sa simplicité pendant l'évolution de ce travail.*

Mes remerciements vont également :

À tous Les Enseignants, de L'ENSTP Sans Exception, Enfin, Nous remercions chaleureusement, le président et les membres du jury d'avoir accepter d'examiner ce mémoire.

-BENARAB SOUFYANE-



Résumé

Les charges roulantes sur les tabliers de ponts provoquent des déformations. Ces déformations doivent rester dans le domaine élastique afin de permettre au tablier de demeurer dans le domaine des petites déformations. Ce dernier ne doit pas faire des incursions dans le domaine post-élastique et aucun dommage n'est toléré au niveau des tabliers de ponts. A cet effet, la détermination des déformations du tablier d'un pont sous charge roulante est impérative et doit être obtenue en temps réel.

Le travail proposé consiste à déterminer les déformations de l'hourdis du tablier d'un pont à poutres sous chaussée en utilisant la méthode des éléments finis via l'analyse temporelle (pas à pas) par intégration directe pour la résolution de l'équation dynamique. La charge causant les déformations est modélisée par des forces ponctuelles.

Mots clés : Pont a poutre, Charge roulante, élastique, éléments finis, analyse temporelle.

Abstract

Rolling loads on bridge decks cause deformation. These deformations must remain in the elastic range to allow the deck to remain in the field of small deformations. This should not make inroads in the post- elastic range and no damage is tolerated at the bridge decks. To this end, the determination of deformations of the deck of a rolling load under deck is imperative and must be obtained in real time.

The proposed work is to determine the deformations of the slab deck of a girder bridge under floor using the finite element method via timing analysis (step by step) by direct integration to solve the dynamic equation. The load causing deformation is modeled by point forces.

Key Words: Bridge beam, Moving Load, élastique, finite element, time history analysis.

ملخص

مرور حمولة متنقلة على الجسور يسبب تشوهات على سطحها. هذه التشوهات متعلقة بالخواص الميكانيكية للجسور و الحمولة المتنقلة.

الهدف من عملنا هذا هو ايجاد هذه التشوهات على سطح جسر مكون من الخرسانة المسلحة.

العمل المقترح هو تحديد التشوهات من سطح لوح من جسر العارضة تحت الأرض باستخدام طريقة العناصر المحددة عن طريق تحليل توقيت (خطوة خطوة) من خلال التكامل المباشر لحل المعادلة الديناميكية. وعلى غرار التسبب تشوه الحمل من قبل قوات نقطة

الكلمات الدالة: جسر، حمولة متنقلة متجانس، أجزاء منتهية، التحليل الزمني، صفيحة رقيقة، خرسانة مسلحة

TABLE DES MATIERES

RESUME

REMERCIEMENT

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE

1^{ERE} PARTIE : INFLUENCE DES CHARGES MOBILES SUR L'HOURLDIS DE PONT

CHAPITRE I ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 Introduction	1
I.2 Charges sur les ponts	1
I.3 Charges roulantes sur les ponts	1
I.4 Modélisation des charges roulantes	1
I.5 Modélisation du tablier	3
I.5.1 Modélisation par poutre	3
I.5.2 Modélisation par plaque	3
I.5.3 Théorie de Love Kirchhoff	3
I.5.4 L'équation gouvernante de la déflexion d'une plaque mince	4
I.6 Conclusion	9

CHAPITRE II METHODES D'ETUDE

II.1 Introduction	10
II.2 Etude par l'approche élément finis	10
II.2.1 L'analyse Temporelle	10
II.2.2 Superposition modal	15
II.3 Etude des charges roulantes par le SAP2000	15
II.4 Étude par la méthode analytique	16
II.5 Conclusion.....	16

CHAPITRE III

ETUDE DE CAS

III.1 Introduction	17
III.2 Présentation du model d'étude	17
III .2.1 Le tablier	17
III.2.2 La charge roulante	17
III.3 Etude par l'approche éléments finis.....	18
III.3.1 Etude d'une modélisation par une résultante.....	19
III.3.1.1 Résolution par la méthode de Newmark	19
III.3.1.2 Résolution par la méthode de Chung et Hulbert	21
III.3.1. 3 Résolution par la méthode de Wilson Thêta	21
III.3.1.4 Résolution par la méthode de Hilber-Hughes et Taylor	22
III.3.2 Étude d'une modélisation par trois essieux	22
III.4 Conclusion	25

2^{EME} PARTIE : ETUDE COMPARATIVE ENTRE METHODES DE GUYON- MASSONNET / ELEMENTS FINIS POUR LA REPARTITION TRANSVERSALE DES EFFORTS SUR LE TABLIER

CHAPITRE II

LA METHODE DE GUYON-MASSONNET-BAREŠ

II.1 Introduction	26
II.2 Principe de la méthode et hypothèses	26
II.3 Les deux paramètres fondamentaux	27
II.3 Méthode des coefficients de répartition	28
II.3.1 le coefficient de répartition transversale	29
II.3.2 calcul des efforts	31
II.3.2.1 calcul des moments fléchissant longitudinaux	31
(dans les poutres)	
II.3.2.2 calcul des moments fléchissant transversaux	32
(dans les entretoises)	
II.3.2.3 calcul du moment de torsion dans le grillage	34
II.3.3 commentaire sur cette méthode	35
II.4 conclusion	35

CHAPITRE III UTILISATION DE LA MEF POUR LE CALCUL DES TABLIERS

1- introduction	36
2- définition de la méthode des éléments finis	36
3- les principes de la MEF	37
4- équation fondamentale de la MEF.....	37
5- étapes logiques du calcul par éléments finis	38
6- outil de calcul par éléments finis	39
7- conclusion	45

CHAPITRE IV APPLICATION DES DEUX METHODES SUR UN TABLIER

1. introduction	46
2. la méthode de Guyon Massonnet sur un tablier de pont a poutre	46
2.1 détermination des paramètres de calcul	46
3. application par la méthode des élément finis (robot).....	57
4. discussions des résultats pour les deux méthodes	61
5. conclusion	62

CONCLUSION GENERALE

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXE

LISTE DES FIGURES

N° : figure	page
Figure 1.1 Modélisation du véhicule	1
Figure 1.2 Modélisation du tablier par poutre	3
Figure 1.3 Equilibre des forces pour un élément d'une plaque mince sous $P(x,y)$	4
Figure 1.4 Cas possibles de conditions aux limites d'une plaque	8
Figure 2.1 variation linéaire de l'accélération selon Newmark	11
Figure 2.2 Variation de l'accélération selon Wilson	13
Figure 3.1 Model du tablier	17
Figure 3.2 Model d'un chargement de type Bc (selon fascicule 61 titre II)	18
Figure 3. 3 Fonction de l'historique du temps	18
Figure 3.4 Modélisation du véhicule par une résultante	19
Figure 3.5 Points d'application de la charge roulante (charge ponctuelle)	19
Figure 3.6 Déflexion pour une charge centrée	20
Figure 3.7 Déflexion pour une charge excentrée	20
Figure 3.8 Comparaison entre les cas a) et b)	20
Figure 3.9 Déflexion Pour une vitesse de 57,6 km/h	20
Figure 3.10 Déflexion Pour une vitesse de 90 km/h	20
Figure 3.11 Effet de la vitesse sur la réponse pour une charge ponctuelle de 30 tonne selon Newmark	21
Figure 3.12 Variation de la déflexion selon Chung et Hulbert	21
Figure 3.13 Variation de la déflexion selon Wilson thêta	22
Figure 3.14 Variation de la déflexion selon Hilber-Hughes et Taylor	22
Figure 3.15 Points d'application de la charge roulante (trois essieux)	23
Figure 3.16 Déflexion pour une charge centrée	23
Figure 3.17 Déflexion pour une charge excentrée	23
Figure 3.18 Déflexion pour une une charge à terois essieux avec une vitesse de 20 m/s	23
Figure 3.19 Déflexion pour une vitesse 57.6 km/h	24
Figure 3.20 Déflexion pour une vitesse de 90 km/h	24
Figure 3.21 Variation de la déflexion en fonction de la vitesse pour la modélisation par trois essieux	24
Figure 3.22 Comparaison entre les deux types de modélisation du chargement Bc	24
Figure IV. 1 : Pavage du tablier	27
Figure IV.2 : La charge sinusoïdale	29
Figure IV.3 : Ensemble des charges sinusoïdal	32

Figure IV.4 : Chargement d'entretoise	33
Figure.V.1: Bibliothèque des structures du ROBOT 2014	40
Figure. V.2. lignes de construction	41
Figure V.3-Barre	42
Figure. V.4. appui rigide	42
Figure. V.5 appui élastique	43
Figure. V.6 cas de charge	43
Figure. V.7- Définition des charges roulantes	44
Figure. V.7 Analyse modale	44
Figure. V.8 Vérification et lancement de calcul	45
Figure VI.1 : Dimensions de la dalle fictive et positions actives des poutres	46
Figure VI.2 : Calcul du coefficient de répartition moyen pour une charge concentré (Ex: Bc)	50
Figure VI.3 : Calcul du coefficient de répartition moyen pour une charge répartie (ex:Mc120)	50
Figure VI.4: ligne d'influence du coefficient $\varepsilon'\alpha$ pour la poutre centrale	53

LISTE DES TABLAUX

Tableau VI .1 : Détermination des paramètres θ, α	47
Tableau VI-2- $k=0.15$ pour $\theta=0.76$	49
Tableau .VI.3 le moment revient à chaque poutre	51
Tableau VI.4 : Combinaison des moments fléchissant à ELU et ELS (0.25L)	52
Tableau VI.5 : Valeurs du coefficient de répartition ε' pour les positions réelles des poutres	53
Tableau VI.6: Les Efforts tranchants dans chaque poutre sous les différentes charges (0.0L)	54
Tableau VI.7: Efforts tranchants dans chaque poutre sous les différentes charges (0.25L)	55
Tableau VI.8: Combinaison des l'effort tranchant à ELU et ELS (0.0L)	56
Tableau VI.9: Combinaison des l'effort tranchant à ELU et ELS (0.25L)	57
Tableau VI.10. Sollicitation dans les poutres	59
Tableau VI.11 : pourcentage d'erreur du moment fléchissant	61
Tableau VI.12 : pourcentage d'erreur de l'effort tranchant	62

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Pendant la dernière décennie les transports aériens terrestres et maritimes se sont beaucoup développés. Beaucoup de recherche ont été entreprise dans ce cadre. En particulier le transport terrestre où l'attention s'est surtout focalisée sur les ouvrages d'art. Le comportement de ces derniers sous chargement roulant a fait l'objet de recherches et d'expérimentations.

L'objectif de ce travail s'inscrit dans le cadre d'étude du problème d'interaction pont-véhicule (Partie 1), et la comparaison entre la méthode analytique (Guyon-Massonnet) avec des modèles en éléments finis en utilisant ROBOT pour la répartition transversale des efforts sur le tablier de pont à poutre (partie 2).

Pour ce faire, nous avons organisé notre travail en deux parties chaque partie constituée de trois chapitres à savoir :

Un premier chapitre sera consacré à l'étude bibliographique, le deuxième chapitre concernera le fondement théorique de l'analyse temporelle et son application sur les charges roulante.

Dans le troisième chapitre nous développons une étude de cas qui aura pour objectif d'appliquer la méthode des éléments finis.

Le quatrième chapitre présente la méthode de Guyon Massonnet (fondements et principes), et après le cinquième chapitre concernera aussi l'utilisation de la MEF pour le calcul des tabliers, et le dernier chapitre on faire une application des deux méthodes sur un tablier de Pont à Poutres,

En fin une conclusion générale reprenant les résultats obtenus.

1^{ERE} PARTIE

**« INFLUENCE DES CHARGES MOBILES
SUR L'HOUDIS DE PONT »**

Chapitre I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 Introduction :

Plusieurs études autant théoriques qu'expérimentales ont été menées pour appréhender la question de l'interaction pont-véhicule.

Le principe de toutes ces études consiste à donner une modélisation de la structure du pont et du véhicule selon des hypothèses. La difficulté réside dans la prise en compte des caractéristiques des deux éléments (pont et véhicule) afin de se rapprocher de la réalité, plusieurs modèles ont été proposés que ce soit pour le pont ou pour le véhicule roulant.

I.2 Différentes types des Charges sur les ponts :

En plus de son poids propre, le pont doit supporter les charges suivantes :

1. Charges roulantes.
3. Le poids des piétons lorsqu'il existe.
4. L'effet du vent et neige dans les zones sujettes à ces phénomènes.
5. Effet sismique.

Parmi toutes ces charges nous allons nous intéresser au cas des charges roulantes.

I.3 Charges roulantes sur les ponts :

Les charges roulantes peuvent être des véhicules légers ou lourds circulant dessus des ponts ; la prise en compte de ces charges roulantes dans l'étude de dimensionnement des ponts s'effectue par une modélisation des véhicules par des charges ponctuelles qui représentent le poids du véhicule, cette modélisation dépend des caractéristiques du véhicule roulant et du règlement utilisé (Fascicule 61, ASHTO.....etc.) dans ce règlement la modélisation des charges roulantes compte des aspects dynamiques à travers un coefficient, ce dernier est approximatif et peut ne pas tenir compte exactement de tous les paramètres intervenant. La modélisation des charges roulantes peut faire intervenir ces paramètres

I.4 Modélisation des charges roulantes :

Un véhicule est composé généralement de :

- a. **La suspension** : Les suspensions dans un véhicule, sont les éléments qui servent à relier les masses non suspendues (roue, les systèmes de freinage etc.) aux masses suspendues (le châssis, le moteur et tous les composants du véhicule fixés au châssis). Pour chaque roue dans le véhicule la suspension se compose d'un ressort qui transforme l'énergie des chocs dus au contact avec la route en énergie vibratoire et un amortisseur qui transforme l'énergie due à la vibration en chaleur.
- b. **Les roues** : La roue est une pièce mécanique de forme circulaire tournant autour d'un axe passant par son centre. Le contact véhicule pont se fait par le biais de la roue.
- c. **Le moteur et autres accessoires** : le moteur c'est la machine corps qui gère le mouvement du véhicule.

La figure ci-dessous montre un exemple d'un véhicule à deux essieux modélisé par une masse M supportée par deux oscillateurs (ressort+amortisseur).

Figure 1.1 Modélisation du véhicule



L'équation générale du modèle précédent est donnée par :

$$M_v \ddot{Z} + C_v \dot{Z} + K_v Z = F_v^{\text{int}} \quad (1.1)$$

M_v , C_v , K_v , : sont respectivement la matrice de masse d'amortissement et de rigidité

F_v^{int} : Le vecteur des forces d'interaction du véhicule avec la surface de la route.

Z : Le vecteur réponse du véhicule.

Dans un premier temps le véhicule a été modélisé par une masse en mouvement ou une force ponctuelle. Cependant cette modélisation ne tient pas compte des caractéristiques de la suspension du véhicule qui a un rôle prépondérant sur la charge appliquée à l'ouvrage et sur sa réponse. Une autre modélisation peut être faite, en considérant une masse montée sur un ressort, telle que la masse représente le poids du véhicule et le ressort représente les caractéristiques de la suspension. La modélisation par une masse et un ressort ne nous permet pas de prendre en compte l'effet de l'amortissement d'où l'intérêt d'une modélisation par une masse montée sur un oscillateur (ressort+amortisseur). Cette dernière ne tient pas compte du cas des véhicules à plusieurs essieux d'où la nécessité de modéliser le véhicule par plusieurs essieux. Chaque essieu est représenté par une masse surmontant un ressort et un amortisseur. Nous pouvons introduire un autre ressort afin de tenir compte de l'effet de l'élasticité des pneus. [12]

La charge roulante circulant sur un pont implique la modélisation de cette charge ainsi que de l'ouvrage d'art, ce dernier intervient surtout par son tablier. [12]

I.5 Modélisation du tablier :

Le tablier est une partie de la superstructure du pont qui peut être modélisé par une poutre ou une plaque.

I.5.1 Modélisation par poutre :

C'est une approche unidimensionnelle qui consiste en la modélisation du tablier par une poutre appuyée simplement à ses extrémités.



Figure 1.2 Modélisation du tablier par poutre [12]

Toutefois, cette approche unidimensionnelle ne permet pas de prendre en compte la flexion transversale pour des ponts où la longueur et la largeur ont des dimensions comparables, ainsi on ne peut pas étudier le cas d'une charge excentrée dont l'effet de torsion peut être important [12].

Quand le véhicule s'éloigne de la ligne médiane du pont, la section transversale de celui-ci est soumise à l'effet de torsion en plus de la flexion. Cet effet ne peut être modélisé par la théorie des poutres [12].

I.5.2 Modélisation par plaque:

Une plaque est un solide dont l'une des dimensions est faible par rapport aux deux autres dimensions.

On distingue deux types de plaques :

- Plaques épaisses : Il s'agit d'une plaque dont l'épaisseur n'est pas négligeable par rapport aux autres dimensions. MINDLIN a étudié ce type de plaque où il a tenu compte de l'effet de cisaillement.
- Plaques mince : dont la théorie a été élaborée par Love-Kirchhoff, cette dernière sera utilisée par la suite dans notre étude.

I.5.3 Théorie de Love Kirchhoff [12] : cette théorie s'inspire de celle de Bernoulli- Euler pour les poutres, elle est basée sur les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur de la plaque est petite par rapport aux autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci après déformation. (La déformation en cisaillement transversale est donc négligée)
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal w est considéré.
- La contrainte σ_z dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures, et du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout z .

Selon les hypothèses précédentes de la théorie de Love Kirchhoff, nous pouvons formuler les équations gouvernantes d'une plaque mince soumise à un chargement extérieur.

I.5.4 L'équation gouvernante de la déflexion d'une plaque mince [12] :

Afin de formuler l'équation gouvernante de déflexion d'une plaque mince soumise à une charge verticale $P(x,y)$. Nous allons analyser l'équilibre d'un petit élément de la plaque de dimensions (dx,dy) , *figure 1.3*

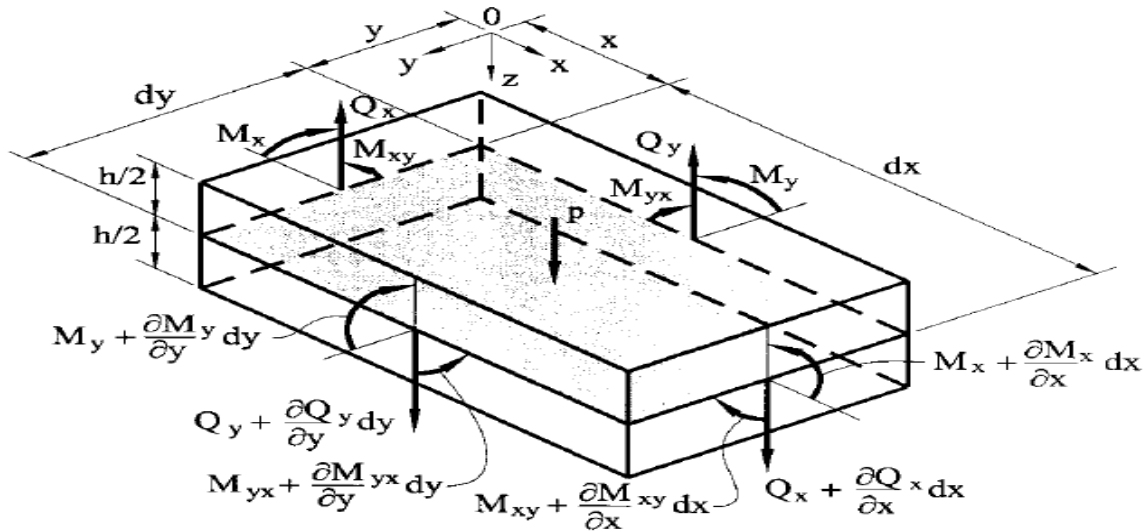


Figure 1.3 Equilibre des forces pour un élément d'une plaque mince sous $P(x,y)$ [12]

Selon les hypothèses de *Love Kirchhoff* le champ de déplacement d'un point de coordonnées (x,y,z) dans une plaque mince est donné par :

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad w = w(x, y) \tag{1.2}$$

Où :

$w(x, y)$: Est la déflexion de la plaque mince

Les trois composantes de déformations au point de coordonnées (x,y,z) sont :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ; \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 ; \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \tag{1.4}$$

Les déformations normale ε_z et de cisaillement transversales ε_{xz} et ε_{yz} sont nulles en vertu des hypothèses de Love-Kirchhoff sur une plaque mince.

Dans la théorie de l'élasticité, les relations entre les déformations et les contraintes sont données par :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) ; \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) ; \gamma_z = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy} \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = -\frac{E.z}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = -\frac{E.z}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2}(1-\nu)\gamma_z = -\frac{E.z}{1-\nu^2}(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \end{cases} \quad (1.6)$$

Pour un matériau homogène isotrope $\sigma_z = 0$ (**Hypothèse de Love-Kirchhoff**)
E : le module d'élasticité ; ν : le coefficient de poisson

Les moments fléchissant M_x , M_y et le moment de torsion M_{xy} par unité de longueur d'un point au plan moyen ont pour valeur :

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz ; M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz ; M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (1.7)$$

D'où :

$$\begin{cases} M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \end{cases} \quad (1.8)$$

Telle que :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} : \text{appelée rigidité flexionnelle de la plaque}$$

h: épaisseur de la plaque.

Les efforts tranchants par unité de longueur Q_x et Q_y par les deux intégrales suivantes :

$$\begin{cases} Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \\ Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz. \end{cases} \quad (1.9)$$

Les composantes des contraintes donc de déformations varient d'un point à un autre pour une plaque chargée verticalement. Ces variations sont gouvernées par des conditions d'équilibre statiques.

On considère toujours l'équilibre d'un élément infiniment petit de dimensions (dx, dy) , (*figure 1.3*) chargé verticalement par $p(x, y)$. La charge appliquée est transférée vers la surface moyenne de l'élément. L'élément est très petit donc les forces et les moments sont distribués uniformément sur la surface moyenne.

Pour le système montré dans la *figure 1.3* l'équilibre des forces est donné par :

- a) La somme des forces suivant z :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + p dx dy = 0 \quad (1.10)$$

D'où :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (1.11)$$

Q_x, Q_y : les efforts tranchants

- b) La somme des moments suivant x :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy - Q_y dx dy = 0 \quad (1.12)$$

D'où :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (1.13)$$

- c) La somme des moments suivant y :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (1.14)$$

A partir de (1.13) et (1.14) on peut exprimer Q_x et Q_y en fonction de M_x et M_y , telle que :

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (1.15a)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (1.15b)$$

Si nous considérons $M_{xy} = M_{yx}$ et en substituant les équations (1.15) dans l'équation (1.10) on trouve :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p(x, y) \quad (1.16)$$

En introduisant M_x et M_y, M_{xy} de l'équation (1.7) par leurs valeurs on aura :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad (1.17)$$

C'est l'équation gouvernante de la déflexion d'une plaque mince obtenue par Lagrange

L'équation (1.17) peut également s'écrire sous la forme :

$$\nabla^2(\nabla^2 w) = \nabla^4 w = \frac{P}{D} \quad (1.18)$$

Telle que :

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (1.19)$$

Afin de donner une solution à l'équation (1.17) nous introduisons deux conditions aux limites aux bords de la plaque. La *figure 1.4* montre les cas possibles de conditions aux limites pour une plaque rectangulaire de dimensions (a,b) :

1) Simplement appuyé à $x=0$ et $x=a$:

$$w = 0 \Big|_{x=a}, \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \Big|_{x=a} \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \Big|_{x=a}$$

2) Encastrement en $y = 0$

$$w = 0 \Big|_{y=0} \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \Big|_{y=0}$$

3) Libre en $y = b$

$$M_y = 0 \Big|_{y=b}, \quad Q_y = 0 \Big|_{y=b}, \quad M_{xy} = 0 \Big|_{y=b} \quad (1.22)$$

4) Appuyée sur une poutre en $x=0$

$$w \Big|_{x=0} = w_p \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_p \quad (1.23)$$

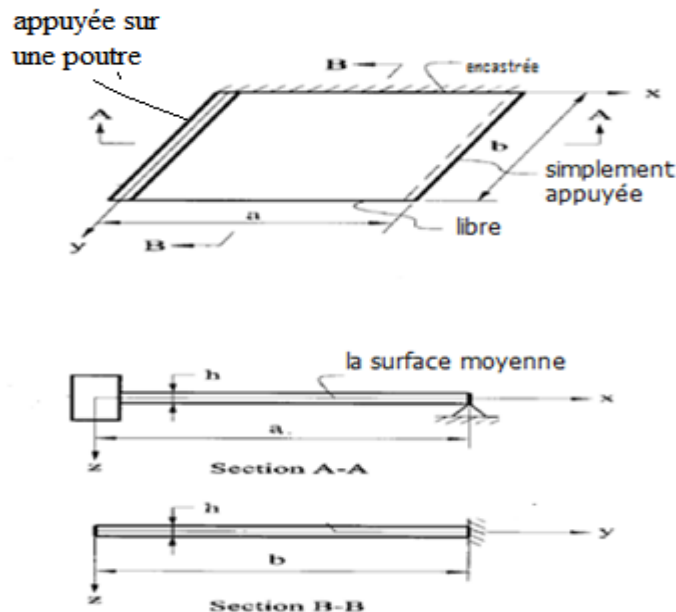


Figure 1.4 Cas possibles de conditions aux limites d'une plaque

Une solution de l'équation (1.17) pour le cas d'un appui simple sur les bords ($x=0$ et $x=a$ et $y=0$, $y=a$) a été proposée par Navier sur la base d'une série de Fourier infini pour une plaque rectangulaire de dimensions a , b soumise à un chargement statique $P(x,y)$ donné par :

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{1.24}$$

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{1.25}$$

w_{mn} : Un coefficient qui satisfait les conditions aux limites de la plaque.

La solution trouvée est valable pour un cas statique, dans le cas d'un chargement dynamique, cette modélisation est modifiée.

L'étude de la flexion des plaques qu'on a faites est dans le cas statique, maintenant on passe à un autre cas d'étude des plaques c'est le cas dynamique.

I.5.5 Etude de vibration des plaques minces selon le principe de Hamilton

Le présent problème de vibration des plaques a été étudié selon le principe de Hamilton afin de formuler l'équation gouvernante.

Le principe de Hamilton :

$$\delta(T - U) = 0 \tag{1.26}$$

Telle que : δ paramètre de variation, U L'énergie potentiel de déformation de la plaque donnée par :

$$U = \frac{D}{2} \iint_R \left[(\nabla^2 w)^2 + 2(1-\nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \right] dx dy - \iint_R p w dx dy \tag{1.27}$$

T : est l'énergie cinétique de vibration des plaques donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \iint_R h \rho \dot{w}^2 dx dy \quad (1.28)$$

R: la surface transversale de la plaque.

h : L'épaisseur de la plaque.

ρ : La masse volumique.

w : La déflexion.

\dot{w} : La vitesse de la déflexion.

p: La charge appliquée à la plaque.

En appliquant le principe de moindre action : $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$

L = (T-U) : c'est le lagrangien.

$$S = \left[\int_{t_1}^{t_2} \iint_R \frac{h\rho}{2} \dot{w}^2 - \frac{D}{2} \left\{ (\nabla^2 w)^2 + 2(1-\nu) \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial y^2} \right) \right\} - pw \right] dx dy dt \quad (1.29)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_R \left[\rho h \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial t} - D \left\{ (\nabla^2 w) (\nabla^2 \delta w) + 2(1-\nu) \times \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) \right\} - p \delta w \right] dx dy dt = 0 \quad (1.30)$$

L'équation devient:

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_R (-h\rho \ddot{w} - D \nabla^4 w + p) \delta w dx dy dt = 0 \quad (1.31)$$

A partir de (1.28) nous avons l'équation différentielle du mouvement :

$$D \nabla^4 w + \rho h \ddot{w} = p \quad (1.32)$$

w : représente la réponse en terme de déflexion

I.6 Conclusion :

En plus de son poids propre, le pont supporte d'autres charges qui proviennent des véhicules roulants conduits aussi à des modèles plus au moins compliqués.

La problématique adressée est de modéliser un pont sous charge roulante, Cette problématique ressortir les questionnements suivants :

- Est-ce que la modélisation du véhicule roulant par une force concentrée est correcte?
- Est-ce que la vitesse de roulement du véhicule a une influence sur la réponse d'un pont?
- Est-ce que la position du véhicule sur le pont peut influencer sur sa réponse?

Nous tenterons de répondre à ces questions en considérant une modélisation du véhicule par un système de masse-ressort et le pont par une plaque mince.

Chapitre II

METHODES D'ETUDES

II.1 Introduction :

Dans le cadre d'étude de la réponse des structures sous charges roulantes, plusieurs méthodes de résolution du problème ont été proposées afin d'évaluer la réponse des structures, certaines de ces méthodes sont purement analytiques, alors que d'autres font appel à des méthodes approchées.

Dans l'étude des charges roulantes sur un tablier de pont, la difficulté est de modéliser le véhicule et la prise en compte de l'effet dynamique induit par ce dernier sur le tablier (l'effet de la vitesse, les caractéristiques du véhicule).

II.2 Etude par l'approche élément finis :

Le tablier est modélisé par une plaque mince (théorie de Love Kirchhoff), la plaque est discrétisée à un nombre d'éléments (rectangulaire) appelé éléments finis qui sont interconnectés par des nœuds, chaque nœud possède six degrés de liberté, le principe consiste à chercher les solutions (la déflexion, l'accélération, les efforts internes...etc.) au niveau des nœuds. [12]

L'équation d'équilibre d'un système formulé par la méthode des éléments finis prend généralement la forme suivante :

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F \quad (2.1)$$

Telle que :

M : la matrice de masse.

C : la matrice d'amortissement.

K : la matrice de rigidité.

F : c'est le chargement appliqué.

Le chargement appliqué pour notre étude est un véhicule roulant qui est caractérisé par le nombre d'essieux, la vitesse de roulement et l'espacement entre essieux.

II.2.1 L'analyse Temporelle :

L'analyse temporelle est l'analyse pas à pas qui permet d'obtenir la réponse de la structure à une excitation imposée dans un intervalle de temps déterminé pour pas $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, 4\Delta t$.. etc. En premier temps on initialise le système par l'introduction des conditions initiales (condition d'appuis par exemple) afin de pouvoir exécuter l'algorithme de calcul pour chaque pas du temps.

Nous distinguons deux méthodes de solution de l'équation d'équilibre pour l'analyse pas à pas, la **superposition modale** et l'**intégration directe** où on trouve aussi plusieurs méthodes d'intégration comme Taylor, Newmark, Wilson θetc. En général, toutes les méthodes donnent la solution à chaque pas du temps, dans le cas de l'analyse non-linéaire, il peut être nécessaire de reformuler la matrice de rigidité effective du système complet pour chaque pas du temps.

a) La méthode d'intégration directe de Newmark [12]:

L'équation d'équilibre est donnée par :

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = R(t) \quad (2.2)$$

Newmark dans son approche par l'intégration directe dans l'analyse pas à pas, il a utilisé le développement en série de Tylor, qui est donné par :

$$u_t = u_{t-\Delta t} + \Delta t\dot{u}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^3}{6}\dddot{u}_{t-\Delta t} + \dots \quad (2.3)$$

$$\dot{u}_t = \dot{u}_{t-\Delta t} + \Delta t\ddot{u}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2}\dddot{u}_{t-\Delta t} + \dots$$

A partir de ces dernières équations Newmark a formulé son équation :

$$u_t = u_{t-\Delta t} + \Delta t\dot{u}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_{t-\Delta t} + \beta\Delta t^3\ddot{u}_{t-\Delta t} \quad (2.4)$$

$$\dot{u}_t = \dot{u}_{t-\Delta t} + \Delta t\ddot{u}_{t-\Delta t} + \gamma\Delta t^2\ddot{u}_{t-\Delta t} \quad (2.5)$$

Telle que :

u: Le déplacement **u̇**: La vitesse **ü** : L'accélération.

La variation de l'accélération dans un incrément du temps Δt est considérée comme linéaire.

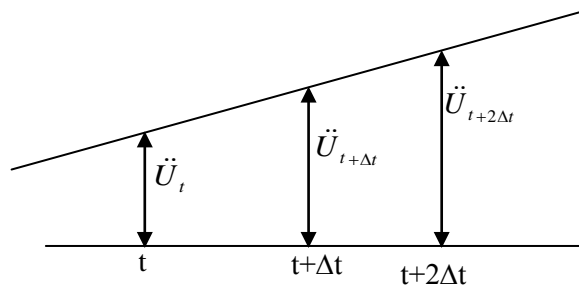


Figure 2.1 Variation linéaire de l'accélération selon Newmark

Telle que :

$$\ddot{u}_t = \frac{(\ddot{u}_t - \ddot{u}_{t-\Delta t})}{\Delta t} \quad (2.6)$$

En substituant l'équation (2.6) dans les équations (2.4) et (2.5) nous trouvons l'équation de Newmark sous la forme :

$$u_t = u_{t-\Delta t} + \Delta t\dot{u}_{t-\Delta t} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\ddot{u}_{t-\Delta t} + \beta\Delta t^2\ddot{u}_t \quad (2.7)$$

$$\dot{u}_t = \dot{u}_{t-\Delta t} + (1 - \gamma)\Delta t\ddot{u}_{t-\Delta t} + \gamma\Delta t^2\ddot{u}_t \quad (2.8)$$

De l'équation (2.7), on tire :

$$\ddot{\mathbf{u}}_t = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} (\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-\Delta t}) - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} \quad (2.9)$$

Cette équation prend la forme :

$$\ddot{\mathbf{u}}_t = \mathbf{b}_1(\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-\Delta t}) + \mathbf{b}_2\dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \mathbf{b}_3\ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t}, \quad (2.10)$$

Avec :

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\beta\Delta t^2}; \quad \mathbf{b}_2 = -\frac{1}{\beta\Delta t}; \quad \mathbf{b}_3 = 1 - \frac{1}{2\beta};$$

En reportant l'expression de $\ddot{\mathbf{u}}_t$ dans (2.8) on obtient :

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \boldsymbol{\gamma}\mathbf{b}_1\Delta t(\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-\Delta t}) + (\mathbf{1} + \mathbf{b}_2\boldsymbol{\gamma}\Delta t)\dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + (\mathbf{1} + \mathbf{b}_3\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma})\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} \quad (2.11)$$

Cette équation prend la forme :

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \mathbf{b}_4(\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-\Delta t}) + \mathbf{b}_5\dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \mathbf{b}_6\ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} \quad (2.12)$$

Avec :

$$\mathbf{b}_4 = \boldsymbol{\gamma}\mathbf{b}_1\Delta t; \quad \mathbf{b}_5 = \mathbf{1} + \mathbf{b}_2\boldsymbol{\gamma}\Delta t; \quad \mathbf{b}_6 = (\mathbf{1} + \mathbf{b}_3\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma})\Delta t.$$

L'algorithme de calcul de Newmark est donné comme suit :

1- Le calcul initial :

- A- Formulation des matrices ; de rigidité K, d'amortissement C et de masse M de tous le système
- B- Spécification des conditions initiales $u_0, \dot{u}_0, \ddot{u}_0$
- C- Sélection du pas du temps et Spécification des paramètres β et γ
- D- Calcul des constantes d'intégration de b_1 à b_6
- E- Calcul de la matrice effective de rigidité : $\bar{K} = K + b_1M + b_4C$
- F- Une triangularisation de la matrice effective de rigidité : $\bar{K} = L.D.L^T$

2- Pour chaque pas du temps : $t = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$

A- Calcul du vecteur charge effective :

$$\bar{R}(t) = R(t) + M(b_1u_{t-\Delta t} - b_2\dot{u}_{t-\Delta t} - b_3\ddot{u}_{t-\Delta t}) + C(b_4u_{t-\Delta t} - b_5\dot{u}_{t-\Delta t} - b_6\ddot{u}_{t-\Delta t})$$

B- Résolution de l'équation pour le vecteur déplacement nodal $L.D.L^T u_t = \bar{R}_t$

C- Calcul vitesse et accélération nodaux :

$$\ddot{u}_t = b_1(u_t - u_{t-\Delta t}) + b_2\dot{u}_{t-\Delta t} + b_3\ddot{u}_{t-\Delta t} \quad (2.13.a)$$

$$\dot{u}_t = b_4(u_t - u_{t-\Delta t}) + b_5\dot{u}_{t-\Delta t} + b_6\ddot{u}_{t-\Delta t} \quad (2.13.b)$$

D- Retour à l'étape 2.A avec $t=t+\Delta t$

b) La méthode d'intégration directe de Wilson θ [12] :

La méthode de Wilson est caractérisée par l'introduction d'un nouveau incrément du temps définie par $\theta\Delta t$, L'introduction du facteur θ est motivée par le fait que si la solution numérique est évaluée dans cet incrément du temps, les fausses oscillations sont réduites au minimum, telle que :

$$\Delta t' = \theta\Delta t \quad (2.14)$$

La charge est définie par :

$$R_{t'} = R_{t-\Delta t} + \theta(R_t - R_{t-\Delta t}) \quad (2.15)$$

Dans ce cas l'accélération est assimilée à une variation linéaire entre t et $t + \theta\Delta t$ comme nous montre la figure (2.3).

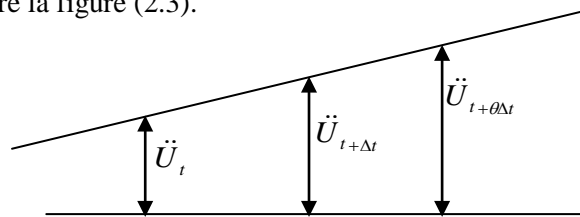


Figure 2.2 Variation de l'accélération selon Wilson

Algorithme de calcul par la méthode de Wilson θ :

1- Calcul initial :

A- Formulation des matrices de rigidité K , de masse M et d'amortissement C du système

B- Spécification des conditions initiales \mathbf{u}_0 , $\dot{\mathbf{u}}_0$ et $\ddot{\mathbf{u}}_0$

C- Sélection du pas de temps Δt et spécification des paramètres β et γ .

D- Calcul des constantes d'intégration de \mathbf{b}_0 à \mathbf{b}_8 , données par :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}; & a_1 &= \frac{3}{\theta\Delta t}; & a_2 &= 2a_1; & a_3 &= \frac{\theta\Delta t}{2}; & a_4 &= \frac{a_0}{\theta}; & a_5 &= \frac{-a_2}{\theta}; \\ a_6 &= 1 - \frac{3}{\theta}; & a_7 &= \frac{(\Delta t)}{2}; & a_8 &= \frac{(\Delta t)^2}{6} \end{aligned} \quad (2.16)$$

E- Calcul de la matrice effective de rigidité : $\bar{K} = K + \mathbf{a}M + \mathbf{a}_1C$

F- Triangularisation de la matrice effective de rigidité : $\bar{K} = LDL^T$

2- Pour chaque pas de temps $t = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$

A- Calcul du vecteur charge effective :

$$\bar{R}_{t+\theta\Delta t} = R_t + \theta(R_{t+\Delta t} - R_t) + M(\mathbf{a}_0\mathbf{u}_t + \mathbf{a}_2\dot{\mathbf{u}}_t + 2\ddot{\mathbf{u}}_t) + C(\mathbf{a}_1\mathbf{u}_t + 2\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{a}_3\ddot{\mathbf{u}}_t) \quad (2.17)$$

B- Résolution de l'équation pour le vecteur déplacement nodal :

$$LDL^t\mathbf{u}_{t+\theta\Delta t} = \bar{R}_{t+\Delta t} \quad (2.18)$$

C- Calcul des vecteurs vitesses et accélération nodaux :

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \mathbf{a}_0(\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) + \mathbf{a}_2\dot{\mathbf{u}}_t + 2\ddot{\mathbf{u}}_t \quad (2.19)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{a}_7(\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \ddot{\mathbf{u}}_t) \quad (2.20)$$

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{a}_8(\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + 2\ddot{\mathbf{u}}_t) \quad (2.21)$$

D- Retour à l'étape 2.A avec $\mathbf{t} = \mathbf{t} + \theta \Delta t$

c) La méthode d'intégration directe de Houbolt [12] :

Les étapes essentielles de cette méthode d'intégration sont citées comme suit :

Le calcul initial :

E- En premier temps nous formulons les matrices ; de rigidité K , d'amortissement C et de masse M de tous le système.

F- Nous introduisant les conditions au limité du système $U_0, \dot{U}_0, \ddot{U}_0$

G- Sélection du pas du temps Δt

H- Calcul des constantes d'intégration :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\Delta t^2}; & a_1 &= \frac{11}{6\Delta t}; & a_2 &= \frac{5}{\Delta t^2}; & a_3 &= \frac{3}{\Delta t}; & a_4 &= -2a_0; & a_5 &= \frac{-a_3}{2}; \\ a_6 &= \frac{a_0}{2}; & a_7 &= \frac{a_3}{9}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

I- Calcul de la matrice de rigidité effective :

$$\bar{K} = K + a_0 M + a_1 C \quad (2.23)$$

J- Triangularisation de la matrice de rigidité effective :

$$\bar{K} = L.D.L^T \quad (2.24)$$

Pour chaque pas du temps :

K- On calcule la charge effective :

$$\bar{R}_{t+\Delta t} = R_{t+\Delta t} + M(a_2 u_t + a_4 u_{t-\Delta t} + a_6 u_{t-2\Delta t}) + C(a_3 u_t + a_5 u_{t-\Delta t} + a_7 u_{t-2\Delta t}) \quad (2.25)$$

L- On donne une solution à l'équation $L.D.L^T U_{t+\Delta t} = \bar{R}_{t+\Delta t}$ (2.26)

M- Le calcul de l'accélération et de la vitesse au temps $t + \Delta t$ se fait à partir des équations suivantes :

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = a_0 u_{t+\Delta t} - a_2 u_t - a_4 u_{t-\Delta t} - a_6 u_{t-2\Delta t} \quad (2.27)$$

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = a_1 u_{t+\Delta t} - a_3 u_t - a_5 u_{t-\Delta t} - a_7 u_{t-2\Delta t} \quad (2.28)$$

d) La méthode α d'intégration direct de Hilber, Hughes et Taylor [12] :

La méthode α utilise la méthode Newmark pour donner une solution à l'équation suivante :

$$M\ddot{u}(t) + (1+\alpha)Cu(t) + (1+\alpha)Ku(t) = R(t) + \alpha C\dot{u}(t-\Delta t) + \alpha Ku(t-\Delta t) \quad (2.29)$$

II.2.2 Superposition modal [12] :

Cette méthode sert à réduire le nombre global des équations d'équilibre à un nombre d'équation découplée de second degré qui sont relativement petites. En effet la durée de la solution numérique de ces équations est réduite.

Le principe consiste à faire un passage des déplacements nodaux à des déplacements modaux,

Telle que :

$$U(t) = P X(t) \quad (2.30)$$

U : déplacements nodaux.

P : c'est une matrice carrée à déterminer.

X(t) : est un vecteur d'ordre n dépend du temps.

Les composants de X sont appelés les composants modaux.

En remplaçant $U(t)$ par sa valeur et en multipliant par P^T dans l'équation d'équilibre suivante:

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) = R(t) \quad (2.31)$$

On obtient :

$$P^T M P \ddot{X}(t) + P^T C P \dot{X}(t) + P^T K P X(t) = P^T R(t) \quad (2.32)$$

L'objectif principal de ce passage est d'obtenir des matrices de rigidités, de masse et d'amortissement ayant une largeur de bande plus réduite que celles des matrices originelles.

Remarque :

Pour notre étude on va utiliser l'analyse temporelle intégrée dans le logiciel SAP2000.

II.3 Etude des charges roulantes par le SAP2000 [12] :

La méthode essentielle pour la modélisation des structures sous SAP 2000 et celle des éléments finis.

Les raisons principales pour lesquelles nous avons choisi ce logiciel pour notre étude sont :

- La disponibilité d'une méthode d'analyse qui prend en compte la vitesse du véhicule, de sa position et l'instant initial.
- Sur le logiciel SAP2000 nous pouvons introduire tout type de véhicule, avec des charges ponctuelles ou distribuées selon le cas, ainsi que les espacements entre les essieux.
- La variation de la position de la voie de circulation du véhicule, centrée ou excentrés.
- La définition du matériau, isotrope ou orthotrope.
- La possibilité d'imposer les points de calcul.
- La possibilité de modélisation du tablier de pont par une poutre ou une plaque qui peut être mince selon Love- Kirchhoff ou épaisse selon Mindlin

Enfin, les paramètres utilisés dans la solution analytique proposée par LEVY (la déflexion du tablier $w(x,y,t)$, le déplacement vertical z et la raideur du ressort k) de la masse sont disponibles dans le logiciel SAP2000; donc l'utilisation du SAP2000 est justifiée.

Le problème en question peut être traité par le SAP2000 selon deux méthodes :

1. Analyse par les lignes d'influence : C'est l'analyse statique, elle ne tient pas compte de la vitesse du véhicule roulant, dans ce cas les véhicules se déplaçant dans les deux sens le long de chaque voie du tablier. Les charges roulantes sont automatiquement positionnées le long de la longueur et la largeur des voies pour produire le maximum et le minimum de réponse à travers la structure. Chaque véhicule peut être autorisé à agir sur toutes les voies ou être limité à certaines voies.

Le programme peut automatiquement calculer le maximum et le minimum de réponses dans chaque point de calcul.

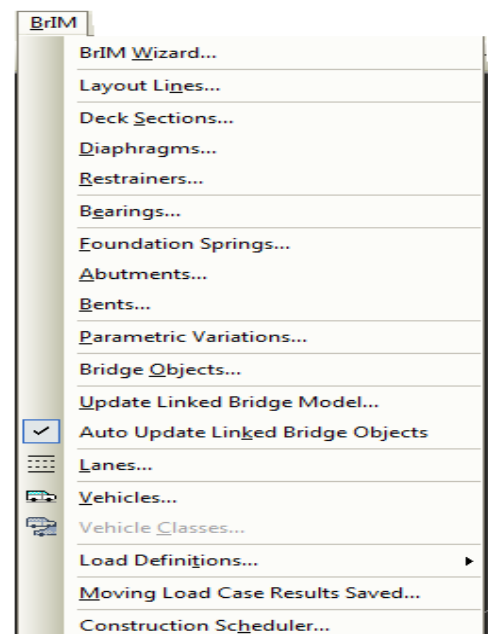
2. Analyse de type pas à pas [12]: la méthode est basée sur l'analyse temporelle (Time History), où on cherche la solution de l'équation d'équilibre en chaque pas du temps. Pour ce type d'analyse le logiciel utilise plusieurs méthodes pour la résolution de l'équation d'équilibre. On utilise ce type d'analyse si nous nous intéressons à la réponse dynamique.

Le nombre de véhicules peut être exécuté simultanément sur les voies, chacune avec son propre temps de départ, la position, la direction et la vitesse.

La modélisation du tablier ainsi que le chargement peut être fait par la commande *BrIM (Bridge Modeler)* dans la barre de titre, *figures 2.3*, où on donne :

1. Les paramètres du matériau.
2. Le dimensionnement du tablier.
3. La définition de la voie de circulation.
4. La définition de la charge roulante par l'introduction des charges par essieux et les espacements entre essieu.

Dans la barre de titre '*Define*' on trouve les différents types d'analyse du tablier.



Figures 2.3 Barre de titre BrIM

II.5 Conclusion :

Nous avons présenté le fondement théorique de l'analyse temporelle et son application pour l'analyse des problèmes dynamiques formulés par la méthode des éléments finis et en particulier l'étude des charges roulantes. Nous avons montré également la possibilité d'utiliser ce type d'analyse pour l'étude des charges roulantes sur les tabliers de pont. Une modélisation sous SAP 2000 sera réalisée.

Chapitre III

ETUDE DE CAS

III.1 Introduction :

Dans les chapitres précédents on a expliqué le fondement théorique des deux méthodes d'analyses des charges roulantes sur les tabliers de pont, éléments finis et analytique. Dans ce présent chapitre nous allons faire une application de la méthode des éléments finis sur un pont à poutre modélisé par une plaque mince (Love - Kirchhoff).

III.2 Présentation du model d'étude :

Le model d'étude est constitué d'un véhicule lourd et d'un tablier de pont à poutre :

III .2.1 Le tablier

Le modèle est un tablier de pont à poutre modélisé par une plaque mince, *figure 3.1* qui a les caractéristiques suivantes :

$$\text{Géométrie de l'hourdis: } \begin{cases} \mathbf{a} = 25.7 \text{ m} \\ \mathbf{b} = 9.7 \text{ m} \\ \mathbf{h} = 20 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{Matériau : isotrope de caractéristique } \begin{cases} \mathbf{F}_{c28} = 35 \text{ MPa} \\ \mathbf{\nu} = 0,2 \\ \mathbf{E} = 35981,729 \text{ MPa} \end{cases}$$

Conditions aux limites : le tablier est appuyé simplement en $x = 0$ et $x = a$ et libre en $y = 0$ et $y = b$

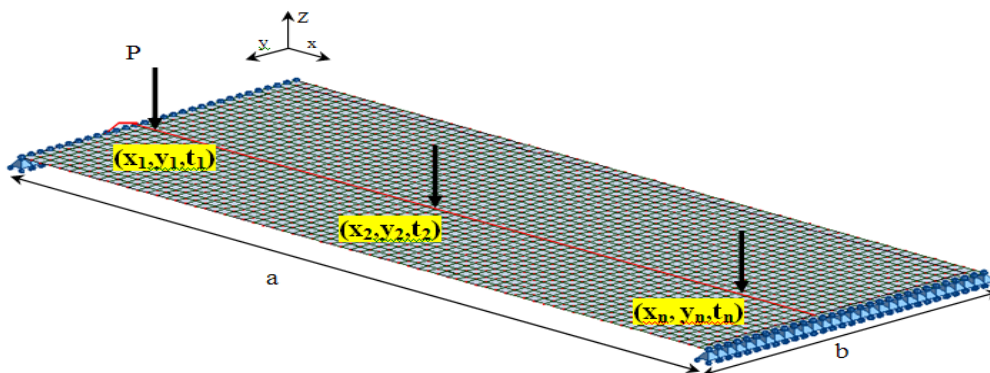


Figure 3.1 Model du tablier

III.2.2 La charge roulante :

Pour notre étude nous avons choisi un chargement conventionnel défini dans le code de calcul des ponts utilisé en Algérie (fascicule 61 titre II), il est présenté dans la figure suivante :

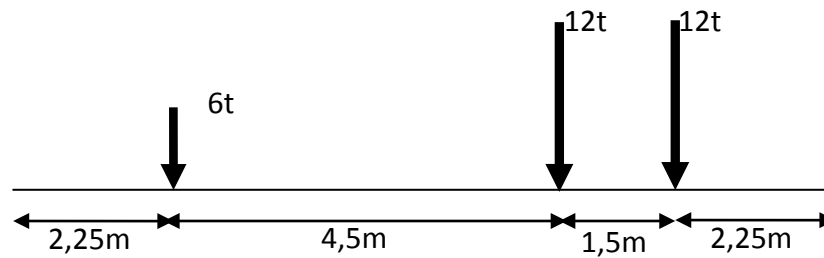


Figure 3.2 Model d'un chargement de type Bc [13]

III.3 Etude par l'approche éléments finis :

La présente étude consiste à utiliser l'analyse temporelle par intégration directe pour la résolution de l'équation générale de vibration d'un tablier de pont formulé par la méthode des éléments finis sous le passage d'un véhicule modélisé par une ou plusieurs charges ponctuelles.

Nous allons étudier la réponse du tablier sous le passage des charges roulantes pour plusieurs méthodes d'intégration directe, avec une étude de la variation de la réponse en fonction de la position transversale de la charge, de la vitesse de roulement de la charge, de la valeur de la masse ainsi du type de modélisation.

Pour un système non amorti l'équation d'équilibre est donnée par : (la modélisation du véhicule par un

$$\text{système de masse-ressort} \quad M\ddot{u}(t) + Ku(t) = F(t) \quad (3.1)$$

M, K : sont respectivement la matrice de masse, de rigidité du tablier

$F(t)$: est le chargement appliqué, pour notre cas c'est la charge roulante.

Dans l'analyse temporelle la charge appliquée est une fonction dans l'espace et dans le temps, elle est exprimée par :

$$\mathbf{F}(t) = \sum_k \mathbf{f}_k(t) \mathbf{P}_k \quad (3.2)$$

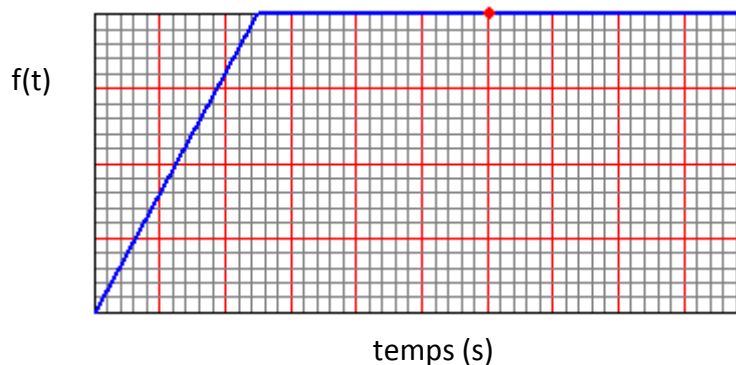
Telle que :

\mathbf{P}_k : est un vecteur dans l'espace. Pour notre cas c'est les valeurs des charges ponctuelles.

$f_k(t)$: est une fonction du temps qui donne l'historique du temps.

Pour notre cas, elle est donnée par la fonction 'RAMPTH' utilisée dans le logiciel SAP2000 :

Figure 3. 3 Fonction de l'historique du temps



Paramètres de l'étude par la méthode des éléments finis :

Le maillage: on a choisi des éléments de forme carrée de dimension 40 cm, chaque nœud possède six degrés de liberté.

L'analyse temporelle : un pas du temps $\Delta t = 0,001s$, avec les différentes méthodes d'intégration directe.

III.3.1 Etude d'une modélisation par une résultante:

Le system représenté sur la figure 3.2 sera modélisé par une charge unique représentant la somme des charges appliquées :

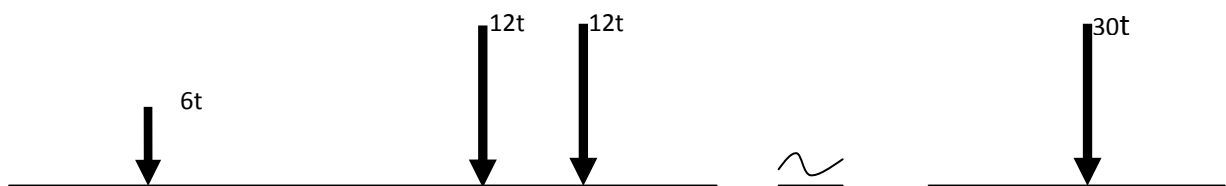


Figure 3.4 Modélisation du véhicule par une résultante

Dans ce cas on présentera les résultats pour les différentes méthodes d'intégration directe :

III.3.1.1 Résolution par la méthode de Newmark :

Les figures suivantes représentent la réponse du tablier en termes de déflexion pour deux positions de la charge centrée et excentrée avec une vitesse de 20 m/s.(a : la longueur ; b : la largeur)

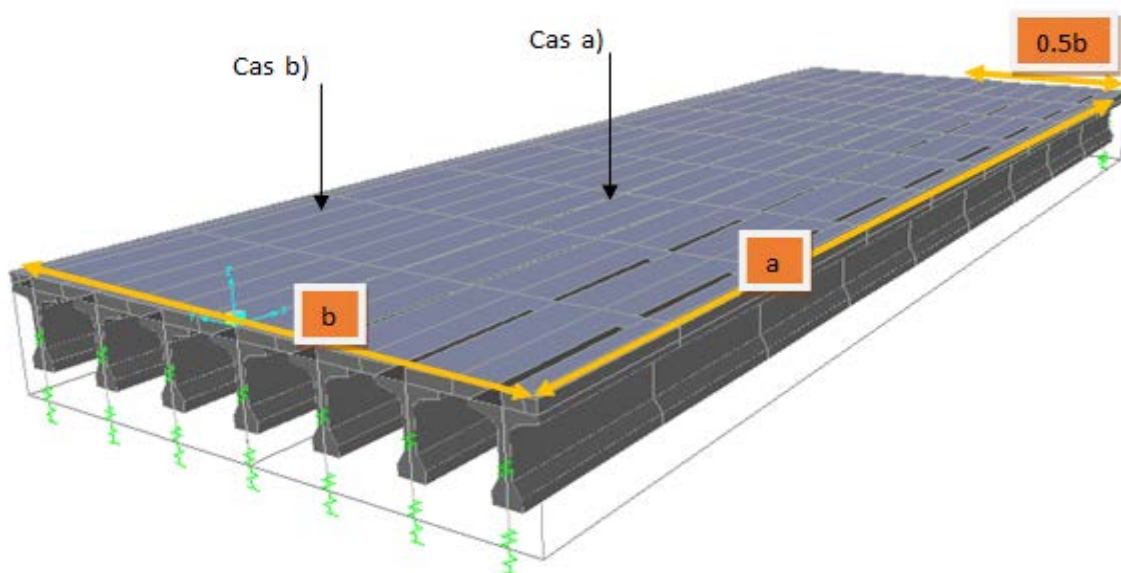


Figure 3.5 Points d'application de la charge roulante (charge ponctuelle)

Les déflexions pour les deux cas de position de véhicule sont données ci-après :

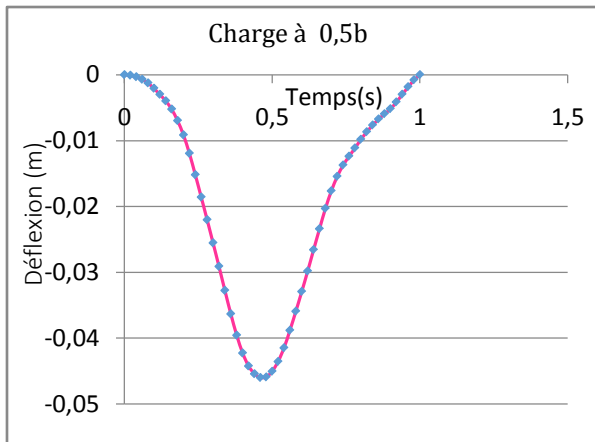


Figure 3.6 Déflexion pour une charge centrée

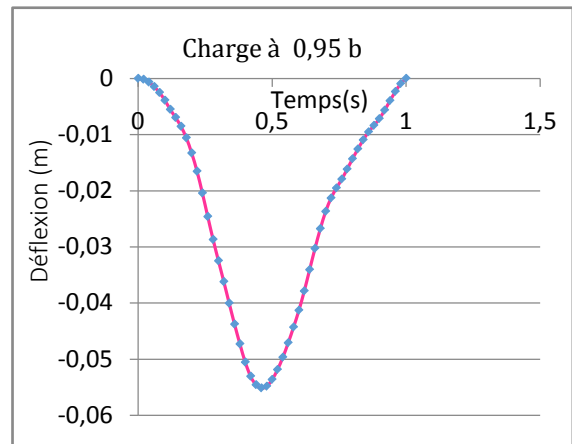


Figure 3.7 Déflexion pour une charge excentrée

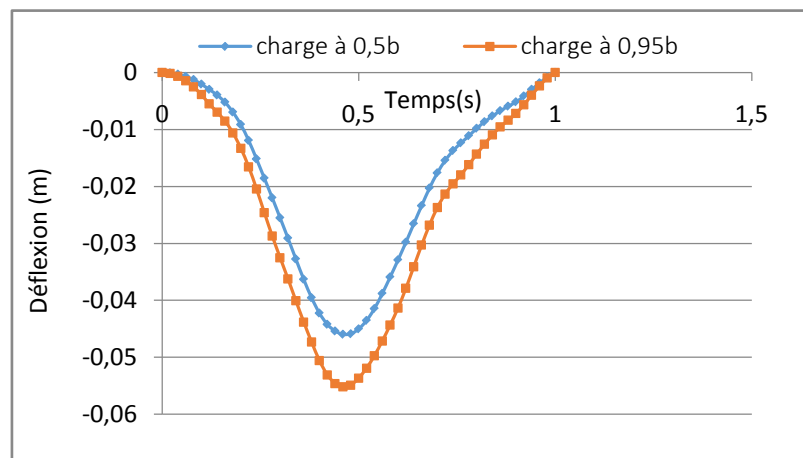


Figure 3.8 Comparaison entre les cas a) et b)

Nous remarquons une même forme de variation pour les deux positions de la charge et la même position de la réponse maximale qui se situe au milieu du tablier. Nous constatons aussi que la déflexion pour une charge excentrée est plus importante que pour une charge centrée.

Nous avons étudié aussi la réponse du tablier pour différentes valeurs de vitesse, les figures suivantes représentent la déflexion au milieu du tablier.

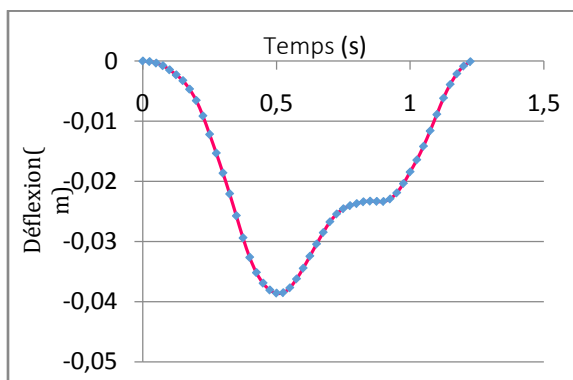


Figure 3.9 Déflexion Pour une vitesse de 16 m/s

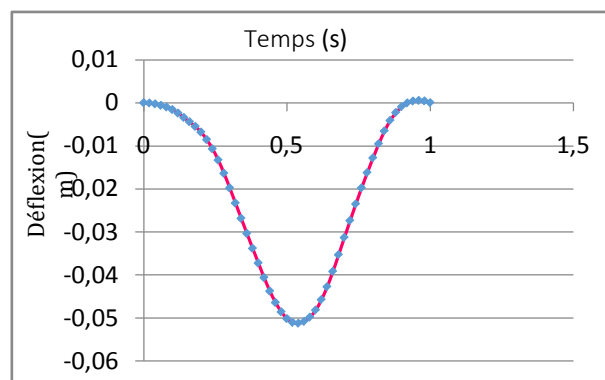


Figure 3.10 Déflexion Pour une vitesse de 25 m/s

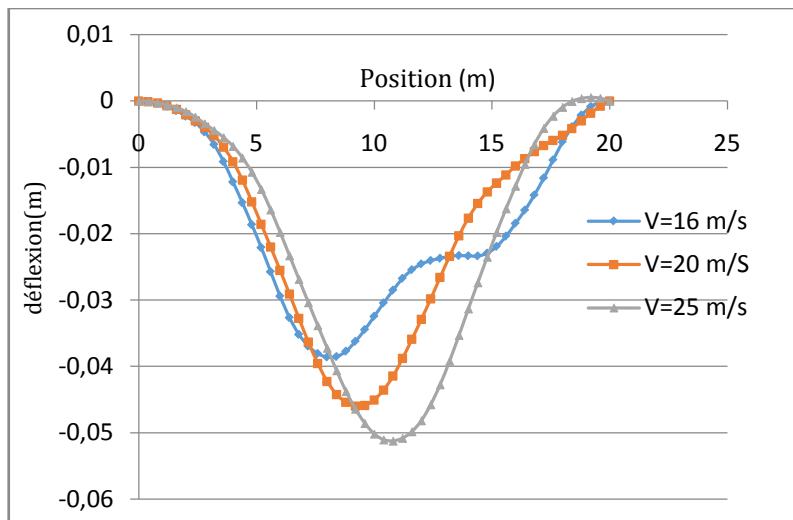


Figure 3.11 Effet de la vitesse sur la réponse pour une charge ponctuelle de 30 tonne selon Newmark

La figure 3.11 exprime la déflexion pour différentes valeurs de la vitesse, on constate que la réponse maximale est donnée par la courbe de la plus grande vitesse, ce qui explique la prise en compte de l'effet de la vitesse sur la réponse dynamique du tablier.

III.3.1.2 Résolution par la méthode de Chung et Hulbert :

La méthode de Chung et Hulbert est utilisé pour résoudre le problème précédent.

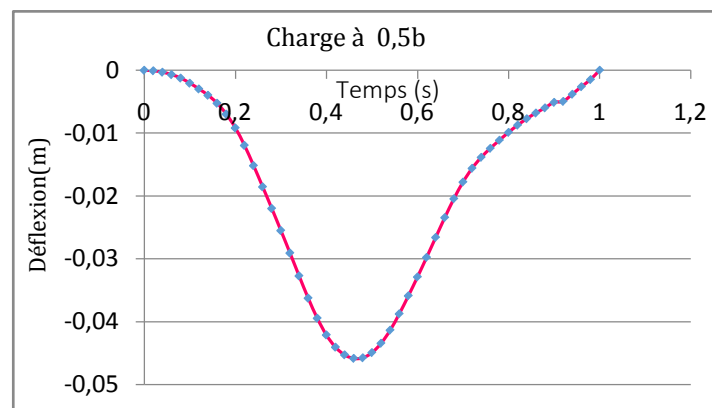


Figure 3.12 Variation de la déflexion selon Chung et Hulbert

Les valeurs de la déflexion obtenus par cette méthode est les même que celles obtenue par la méthode de Newmark

III.3.1. 3 Résolution par la méthode de Wilson Thêta :

Méthode d'intégration directe de Wilson Thêta est utilisée ici, les résultats obtenus sont représentés dans la figure suivante :

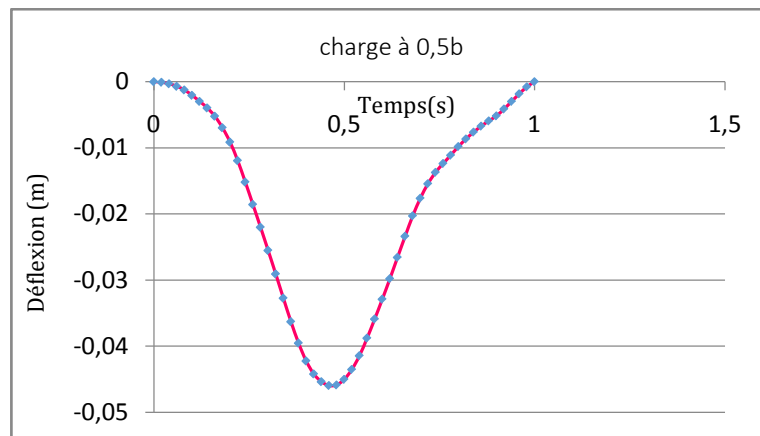


Figure 3.13 Variation de la déflexion selon Wilson θ

Les valeurs de la déflexion obtenue par cette méthode est les même que celles obtenue par les deux précédentes méthodes.

III.3.1.4 Résolution par la méthode de Hilber-Hughes et Taylor :

La méthode d'intégration dite Hilber, Hughes et Taylor est utilisée ici.

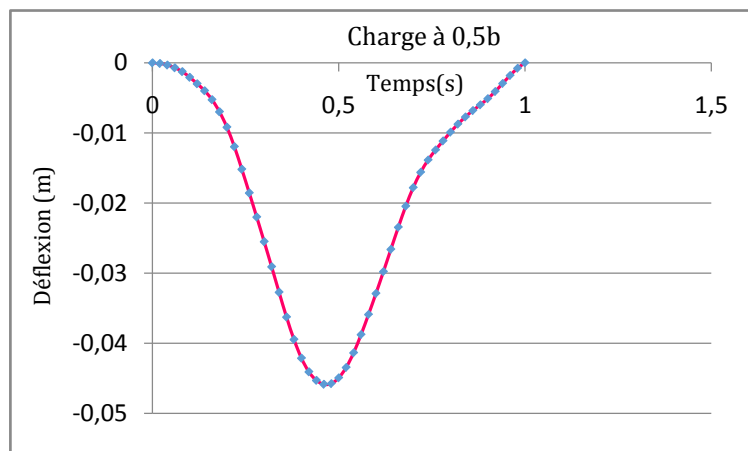


Figure 3.14 Variation de la déflexion selon Hilber-Hughes et Taylor

Les valeurs de la déflexion obtenue par cette méthode est les même que celles obtenue par les précédentes méthodes.

Remarque : les méthodes de résolution donnent le même résultat. Nous utiliserons par la suite la méthode de résolution de Newmark.

III.3.2 Étude d'une modélisation par trois essieux :

Nous considérons maintenant le modèle de véhicule en entier comme présenté sur la figure 3.2 avec une charge centrée, le cas a) et une charge excentrée le cas, b)

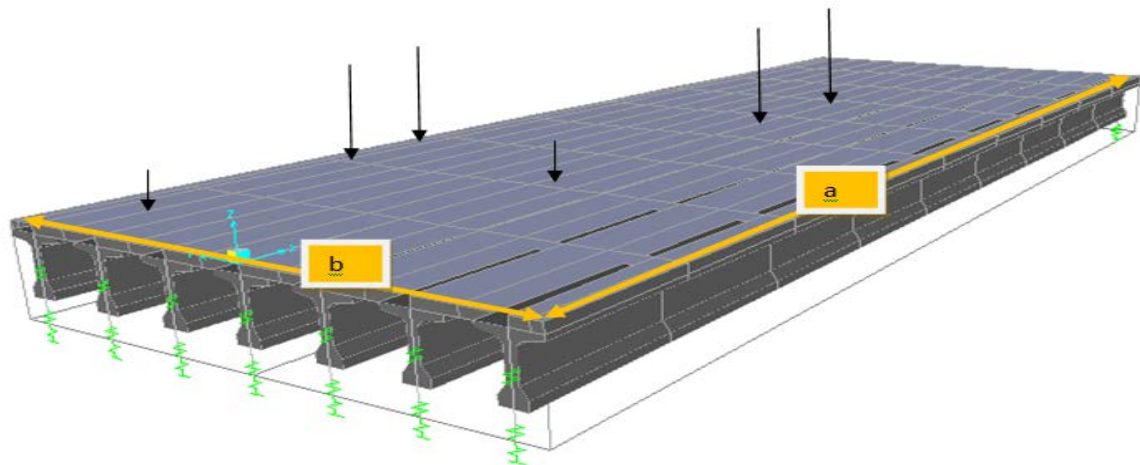


Figure 3.15 Points d'application de la charge roulante (trois essieux)

Les résultats obtenus sont représentés dans les figures suivantes :

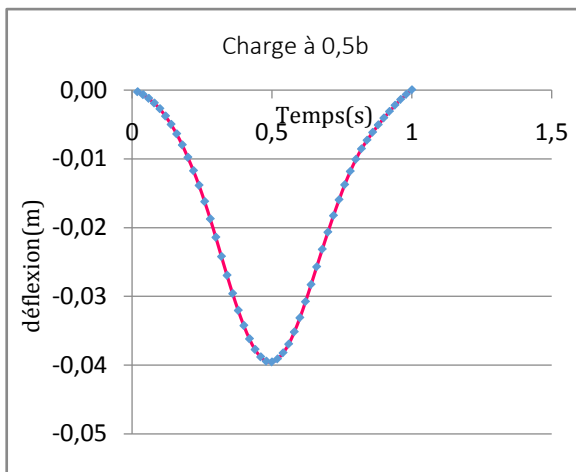


Figure 3.16 Déflexion pour une charge centrée

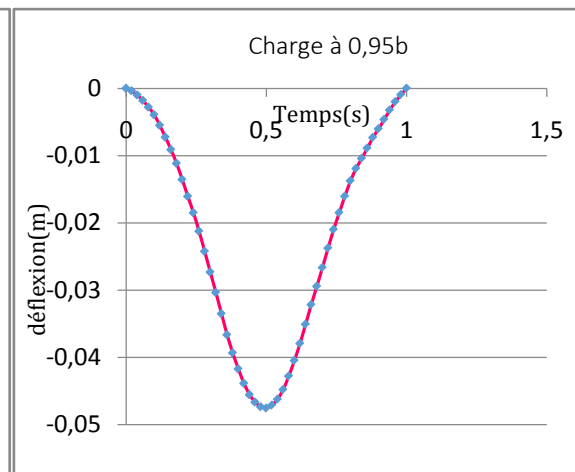


Figure 3.17 Déflexion pour une charge excentrée

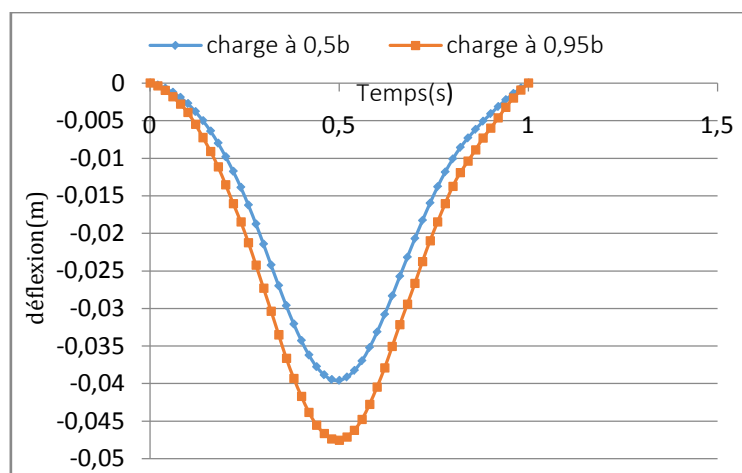


Figure 3.18 Déflexion pour une charge à trois essieux avec une vitesse de 20 m/s

Nous constatons que la déflexion est moins importante dans ce cas par rapport au cas précédent (représentation des forces par une résultante).

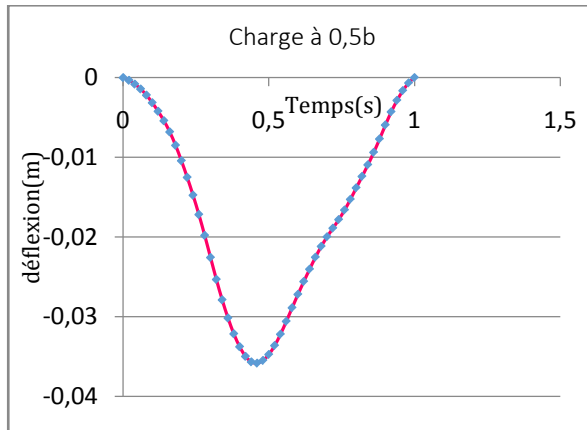


Figure 3.19 Déflexion pour une vitesse 16 m/s

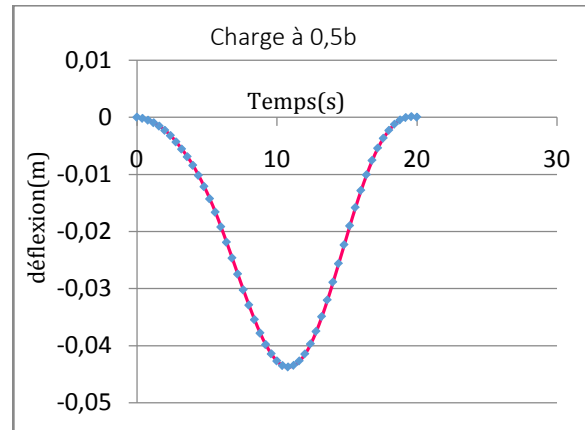


Figure 3.20 Déflexion pour une vitesse de 25 m/s

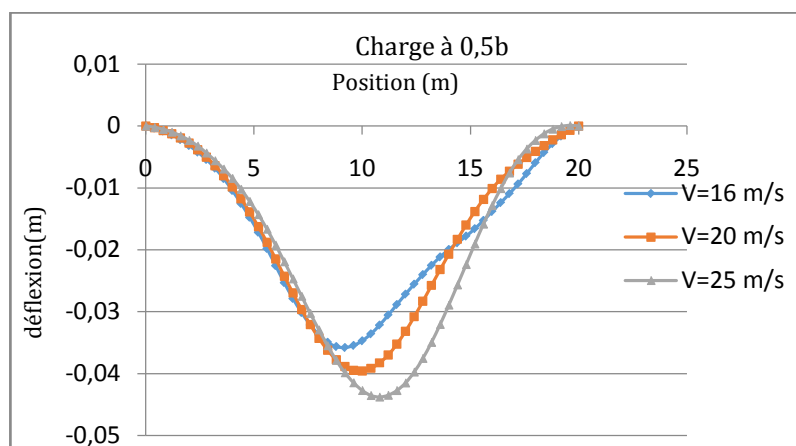


Figure 3.21 Variation de la déflexion en fonction de la vitesse pour la modélisation par trois essieux.

A partir des trois figures précédentes on constate qu'il y a une proportionnalité entre la vitesse et la déflexion maximale du tablier.

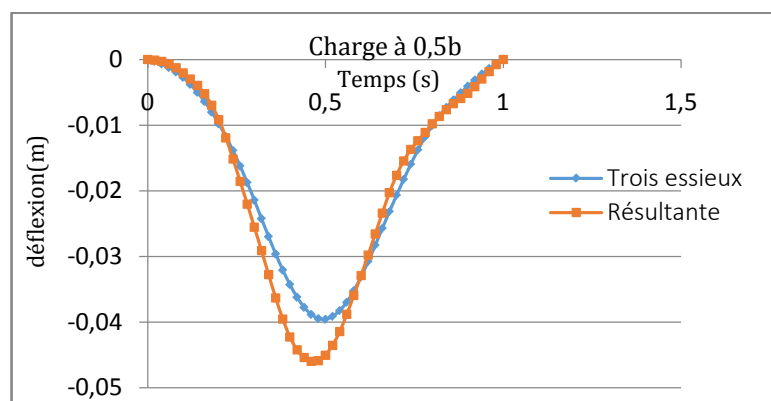


Figure 3.22 Comparaison entre les deux types de modélisation du chargement Bc

La figure 3.22 indique que la modélisation par charge ponctuelle (résultante) donne des réponses plus importantes que celle par plusieurs charges ponctuelles qui peuvent être justifié par la concentration de toute la charge sur le point de mesure.

III.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons appliqué les méthodes d'étude des charges roulantes sur les ponts. À savoir la méthode des éléments finis.

Nous constatons que la réponse du tablier pour une position excentrée est plus importante que celle de la position centrée du véhicule la déflexion maximale est toujours au milieu du tablier.

Nous constatons aussi que la modélisation par charge ponctuelle (résultante) donne des réponses plus importantes que celle par plusieurs charges ponctuelles

2^{EME} PARTIE

**« ETUDE COMPARATIVE ENTRE
METHODES DE GUYON-MASSONNET /
ELEMENTS FINIS POUR LA
REPARTITION TRANSVERSALE DES
EFFORTS SUR LE TABLIER »**

Chapitre IV

LA METHODE DE GUYON- MASSONNET- BAREŠ

IV. LA METHODE DE GUYON-MASSONNET-BAREŠ :

IV.1 INTRODUCTION :

La méthode de **GUYON-MASSONNET-BAREŠ** repose sur la théorie des plaques orthotropes. Elle fut développée par Guyon [**GUY.46**] dans le cas d'une dalle orthotrope à rigidité torsionnelle négligeable. Massonnet en **1950** généralisa les relations trouvées par Guyon en introduisant l'effet de la torsion dans les calculs [**MAS.50**]. En **1966**, Massonnet et Bareš publièrent un recueil de ces méthodes illustré par un nombre d'exemples [**MAS.66**]. [1]

Cette méthode est simple et utilisée pour le calcul des ponts à poutres multiples en tenant compte de la résistance à la torsion du pont, elle donne des résultats satisfaisants par rapport aux autres méthodes (méthode de JON CURBON...), car la rigidité transversale du tablier n'est pas négligeable.

IV.2 PRINCIPE DE LA METHODE ET HYPOTHESES :

Cette méthode vise à déterminer les efforts transitant dans un grillage de poutres soumis à un chargement quelconque, ponctuel ou réparti. Le système dalle-poutre discret est remplacé par un système uniforme composé d'une dalle anisotrope ou orthotrope ayant des caractéristiques constantes suivant chacun de ses axes transversal et longitudinal. Ce passage d'une répartition discrète de la rigidité, à une répartition continue, est l'hypothèse principale sur laquelle repose cette méthode.

Le principe aussi est d'analyser de manière approchée l'effet de répartition transversale des charges en admettant que cette répartition est la même que si la distribution des charges selon l'axe du pont était sinusoïdale et de la forme :

$$p' = p \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{L}\right)$$

Tq:

- p : est la charge constante.
- L : est la portée du pont.

La deuxième hypothèse consiste à admettre que le coefficient de Poisson du matériau constitutif est nul. Cette hypothèse est plus ou moins contestable, mais, dans la mesure où le but de la méthode est de déterminer la répartition des efforts dans les différentes parties de la structure et où les variations de ces efforts ne sont pas très importantes, l'erreur qui en résulte peut être considérée comme négligeable.

Le réseau de poutres est assimilé à une dalle orthotrope possédant deux bords libres (selon Ox) et deux bords simplement appuyés (selon Oy). La méthode s'appuie sur la résolution approchée de l'équation différentielle d'un grillage simple constitué, dans le sens y, de **m** poutres (longerons) espacées les unes

des autres de b_0 , et dans le sens x , de n entretoises espacées de l_0 , les poutres sont dans les deux sens, faites du même matériau, résistantes à la torsion et assemblées aux nœuds rigidement l'une à l'autre.

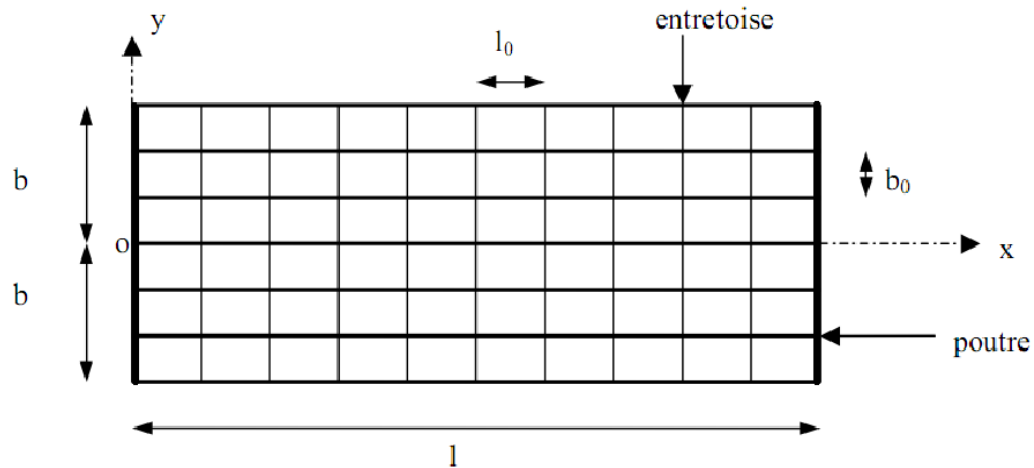


Figure IV. 1 : Pavage du tablier

L'objectif de cette méthode est de déterminer les facteurs de répartition transversale se trouvant dans les tables du document pour ainsi obtenir les valeurs des moments fléchissant et des moments de torsion dans le tablier du pont. Il est nécessaire de calculer deux paramètres fondamentaux en amont : le paramètre de torsion et celui d'entretoisement. Les sollicitations se trouvant dans la dalle du tablier sont obtenues en effectuant des simples multiplications.

Les moments de flexion longitudinale sont déterminés en multipliant le coefficient de répartition $K(y)$ avec le moment fléchissant d'une poutre continu calculé selon la théorie des poutres. La méthode des déplacements va être utilisée pour déterminer ce moment fléchissant.

Les moments de flexion transversale sont déterminés en multipliant le coefficient de répartition $\mu(y)$ avec le chargement développé en série de Fourier.

Les moments de torsion sont déterminés en multipliant le coefficient de répartition $t(y)$ avec le chargement développé en série de Fourier.

IV.3 Les deux paramètres fondamentaux :

Le pont est constitué de m poutres espacées tous les b_1 mètres et de n entretoises espacées tous les l_1 mètres comme en témoigne la figure (1). Pour calculer le paramètre d'entretoisement θ et le paramètre de torsion α , il est d'abord nécessaire de calculer les rigidités de flexion p et de torsion y pour les poutres principales et les entretoises. Les équations 1, 2 et 3 montrent le cheminement de calcul. Dans la suite du mémoire, E représente le module d'Young, G le module de cisaillement, I le moment quadratique et J le moment de torsion.

Les calculs se trouvent ci-dessous :

➤ Pour les poutres principales :

$$\rho_p = \frac{B_p}{b_1} \text{ et } \gamma_p = \frac{C_p}{b_1} \quad (1)$$

- $B_p = E_p * I_p$
- $C_p = G_p * J_p$
- b_1 la largeur d'influence des poutres principales.

➤ Pour les entretoises :

$$\rho_E = \frac{B_E}{l_1} \text{ et } \gamma_E = \frac{C_E}{l_1} \quad (2)$$

- $B_E = E_E * I_E$
- $C_E = G_E * J_E$
- l_1 la largeur d'influence des entretoises.

Par la suite le calcul des paramètres fondamentaux sont donnée par la formules (3) :

$$\theta = \frac{b}{\lambda} \sqrt[4]{(\rho_p / \rho_E)} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\gamma_p + \gamma_E}{2 \sqrt{(\rho_p * \rho_E)}} \quad (3)$$

- b : la demi-largeur du tablier
- λ : la portée équivalente de la travée étudiée

Elle représente la longueur que devrait avoir une travée isostatique afin d'obtenir les mêmes déformations que la structure continue soumise à un chargement uniforme couvrant toute la travée. Pour une travée i , cette portée est calculée avec l'équation 4.

$$\lambda_i = l_i * \sqrt[4]{1 - \frac{4.8 * (M_{i,i} + M_{i,i+1})}{l_i^2}} \quad (4)$$

- $M_{i,j}$ est le Moment fléchissant sur l'appui j de la travée i
- l_i est la longueur réelle de la travée i

IV.3 METHODE DES COEFFICIENTS DE REPARTITION :

Deux hypothèses servent de base à la configuration de la méthode :

- la construction réelle est remplacée par une dalle orthotrope présentant les mêmes rigidités moyennes de flexion et de torsion et qui est au sens technique exactement soluble par le calcul différentiel.

- la répartition transversale réelle du chargement est remplacée par celle qui naît sous une charge répartie le long de l'axe X de la construction et d'excentricité e suivant la loi sinusoïdale de la forme : $P(x)=P_1 \sin \frac{\pi x}{L}$

Où P_1 : la valeur constante de chargement.

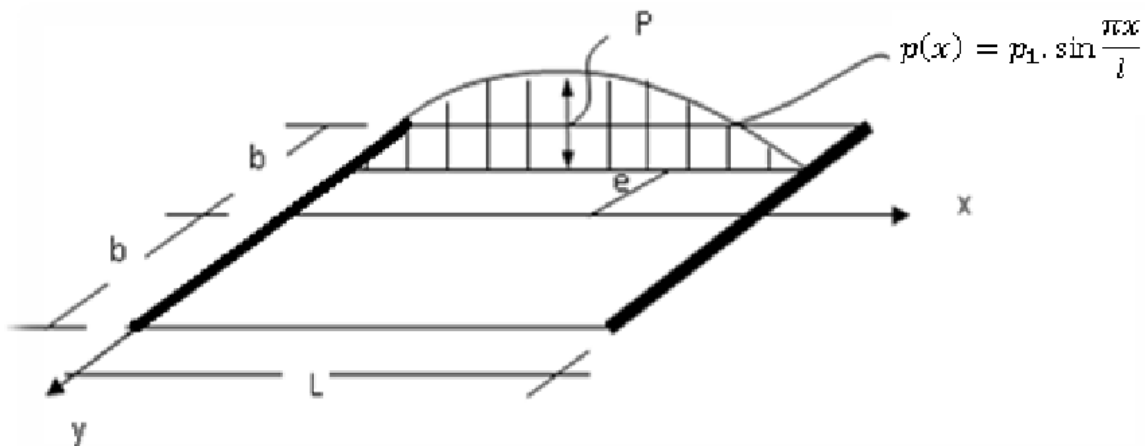


Figure II.2 : La charge sinusoïdale.

Les hypothèses citées n'influencent que le calcul de la répartition transversale de la charge, Les autres calculs obéissent aux règles ordinaires de la stabilité des constructions.

IV.3.1 LE COEFFICIENT DE REPARTITION TRANSVERSALE :

La construction prend une déformée en demi-onde de sinusoïde selon l'équation

$$W(x, y) = W(y) \sin \frac{\pi x}{L}$$

Si la charge $p(x)$, au lieu d'être répartie sur une droite, est répartie uniformément sur la largeur $2b$ De la construction (tout en restant sinusoïdale dans le sens longitudinal), la construction prend Une déformée en surface cylindrique d'équation :

$$W_0(x, y) = W_0(y) \sin \frac{\pi x}{L}$$

Désignons le rapport du déplacement vertical $w(x, y)$ d'un point de la construction sous l'effet d'une charge linéaire $p(x)$ à celui $w_0(x)$ du même point mais sous l'effet de la charge $p_0(x)$ uniformément répartie sur la largeur du pont, par le coefficient de répartition transversale $K(y)$

$$K(y) = \frac{w(y)}{w_0}$$

Les coefficients K dépend :

- de la valeur du paramètre d'entretoisement θ ;
- de la valeur de paramètre de torsion α ;
- de l'excentricité relative e/b de la charge linéaire $p(x)$;
- de l'ordonnée relative y/b du point du pont considéré ;

Le calcul de K à partir des relations complexes d'intégral est en général difficile c'est pourquoi on divise la construction dans le sens de la largeur en 8 bandes de même largeur pour simplifier l'intégral.

On trouve que le coefficient K dépend, entre autre, de la valeur du paramètre α , pour éviter de calculer séparément $K\alpha$, pour chaque valeur de α on utilise les formules d'interpolation dans lesquelles on emploie les coefficients K_0 et K_1 pour les valeurs extrêmes $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ qui sont définis dans des tableaux pour des valeurs de θ données dans les abaques de Bareš et Massonnet.

Sur la base de calculs d'un grand nombre de cas, Massonnet a déterminé dans ces tableaux les valeurs des coefficients K_0 et K_1 pour θ compris entre 0.05 et 5.00 et selon les différentes excentricités de charges ($e = \pm b; \pm 3b/4; \pm b/2; \pm b/4; 0$) et pour les sections de la largeur de la dalle ($y = 0; y = b/4; y = b/2; y = 3b/4; y = b$).

Pour un calcul rigoureux de $K\alpha$, il est nécessaire d'appliquer les formules d'interpolation établies par « Sattler » et qui dépendent aussi de la valeur de θ :

$$k_\alpha = \begin{cases} k_0 + (k_1 - k_0)\alpha^{0,05} & (0 < \theta \leq 0,1) \\ k_0 + (k_1 - k_0)\alpha^{\left(1 - \exp\left[\frac{0,065 - \theta}{0,663}\right]\right)} & (0,1 < \theta \leq 1) \\ k_0 + (k_1 - k_0)\sqrt{\alpha} & (\theta > 1) \end{cases}$$

Dans le cas où θ calculée ne figure pas dans le tableau on doit faire une interpolation, et si la poutre en question se trouve entre deux sections dont les lignes d'influence sont connues on peut aussi faire une interpolation.

IV.3.2 CALCUL DES EFFORTS :

Chaque type d'effort (moments, efforts tranchants, etc.) fait intervenir un coefficient de répartition transversale des charges différentes. Ce dernier est alors multiplié par le moment moyen pour obtenir le Moment fléchissant existant dans une poutre déterminée. Le moment moyen correspond au moment de flexion de la poutre seule sous la charge et appuyée à ses extrémités. On déplacera les Charges de façon à obtenir les plus grandes ordonnées et on retiendra pour le calcul des efforts l'excentricité qui donne les plus grandes valeurs des coefficients. Dans le cas des ponts à poutres multiples la section d'étude sera imposée par la position de la poutre, ce qui nous amène à tracer les lignes d'influences pour les différentes excentricités de charge et on retiendra la section qui donne les plus grandes valeurs des coefficients.

IV.3.2.1 CALCUL DES MOMENTS FLECHISSANT LONGITUDINAUX (dans les poutres) :

Le rapport du moment fléchissant réel au moment moyen $M_0(x)$ dans le sens transversal est égal Au coefficient de répartition transversale :

$$K(y) = \frac{M(x,y)}{M_0(x)}$$

Le moment fléchissant dans le sens X par unité de largeur pour une charge sinusoïdale est:

$$M(x, y) = \frac{\pi^2}{l^2} EI_p \sum_{i=1}^n P_i W_i(y) \sin \frac{\pi x}{L}$$

Pour les charges : $P_1 W_1(y) \sin \frac{\pi x}{L}$; $P_2 W_2(y) \sin \frac{\pi x}{L}$; $P_n W_n(y) \sin \frac{\pi x}{L}$

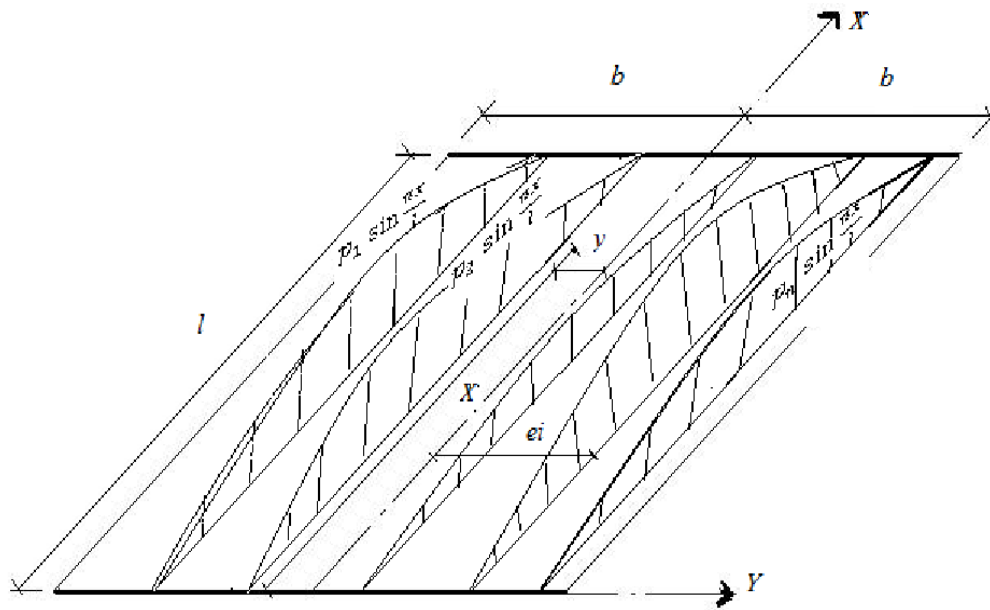


Figure II.3 : Ensemble des charges sinusoïdal.

Le moment fléchissant moyen à la distance x est : $M_a(x) = M_0 \sum P_i$
 Et M_0 représente le moment fléchissant moyen produit par une charge linéaire sinusoïdale Unitaire, uniformément répartie sur la largeur de la construction.

$$K(y) = \frac{\sum pK}{\sum p}$$

Pour obtenir en un point quelconque de la construction le moment fléchissant réel il suffit de Calculer en ce point le moment moyen $M(x)$ et de le multiplier ensuite par le rapport:

$$\frac{\sum pK}{\sum p}$$

Pour une charge linéaire sinusoïdale l'expression du moment longitudinal est:

$$\frac{M(x,y)}{M_0(x)} = \frac{\sum pK}{\sum p}$$

IV.3.2.2 CALCUL DES MOMENTS FLECHISSANT TRANSVERSAUX (dans les entretoises)

Le moment fléchissant par unité de largeur d'entretoise c'est-à-dire par unité de longueur dans le Grillage est exprimé, pour une charge sinusoïdale, par la relation: $M_y = -\mu p b \sin \frac{\pi x}{L}$

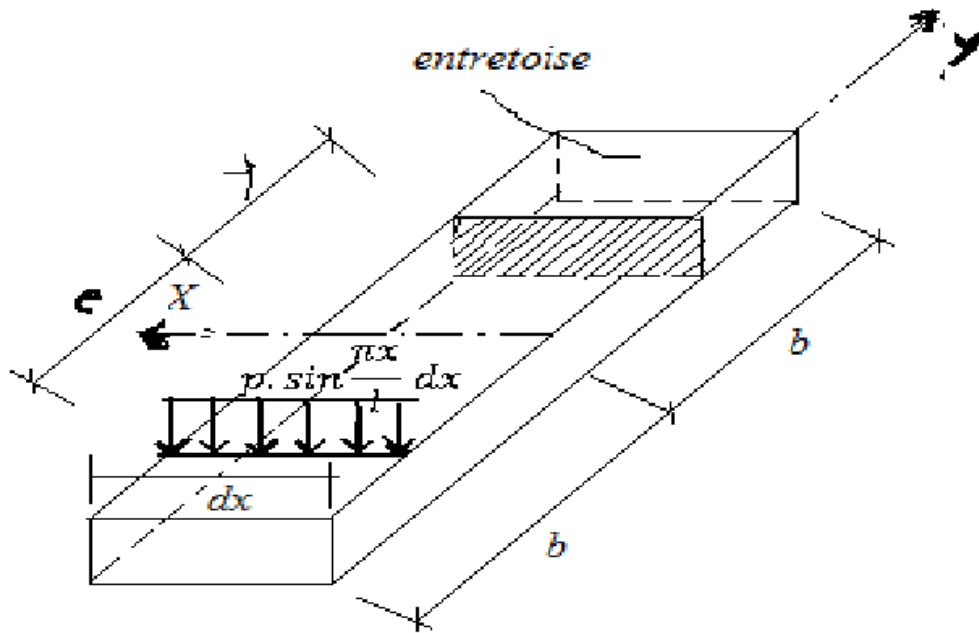


Figure II.4 : Chargement d'entretroise.

Le coefficient μ (θ, α, e, y) dépend des valeurs du paramètre d'entretroisement θ , du paramètre de torsion α , de l'excentricité e de la charge et de l'ordonnée y de la section faite dans l'entretroise Dans laquelle on cherche l'effet.

Comme pour le coefficient K on détermine μ_α pour α quelconque par les formules interpolation

$$\begin{aligned} \theta < 1 & \quad \mu_\alpha = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)\alpha(1 - e^{\frac{0.065 - \theta}{0.663}}) \\ \theta > 1 & \quad \mu_\alpha = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)\alpha^{0.5} \end{aligned}$$

μ_0 correspondant à $\alpha = 0$

μ_1 correspondant à $\alpha = 1$ (les valeurs de μ_0 et μ_1 sont donnée dans les tableaux)

Si la construction est soumise à un système de n charges linéaires sinusoïdales:

$P_1 W_1(y) \sin \frac{\pi x}{L}$; $P_2 W_2(y) \sin \frac{\pi x}{L}$; $P_n W_n(y) \sin \frac{\pi x}{L}$; le moment existant dans la section y de l'entretroise s'obtient par superposition des effets individuels.

$$M_y = -b \sin \frac{\pi x}{L} \sum_{i=1}^n p_i \mu_i$$

IV.3.2.3 CALCUL DU MOMENT DE TORSION DANS LE GRILLAGE :

On sait que : $M_{xy} = \gamma_p \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ et $M_{yx} = -\gamma_E \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

La différence de ces moments vaut : $M_{xy} - M_{yx} = (\gamma_p + \gamma_E) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

En introduisant les relations suivantes : $(\gamma_p + \gamma_E) = 2\alpha \sqrt{\rho_p \rho_E}$ et $W(x,y) = W(y) \sin \frac{\pi x}{L}$

Dans l'équation précédente, nous trouvons : $M_{xy} - M_{yx} = 2\pi(\alpha)bp \cos \frac{\pi x}{l}$ (3.24)

Dans cette formule, p représente l'intensité maximale de la charge répartie suivant la loi Sinusoïdale:

$$p' = p \sin \frac{\pi x}{L}$$

Sur la parallèle à l'axe du pont d'excentricité e; $\tau(\alpha)$ est un coefficient sans dimensions qui Dépend du paramètre de torsion α , de e, de y et de θ .

Où:

Connaissant la différence des moments de torsion dans les poutres et les entretoises, on peut Calculer Chacun de ces moments par les formules:

$$M_{xy} = \frac{\gamma_p}{\gamma_p + \gamma_E} (M_{xy} - M_{yx})$$

$$M_{yx} = \frac{-\gamma_E}{\gamma_p + \gamma_E} (M_{xy} - M_{yx})$$

En remplaçant dans ces relations $(M_{xy} - M_{yx})$ par son expression (3.24), on obtient :

$$M_{xy} = \frac{2\gamma_p}{\gamma_p + \gamma_E} \pi b p \cos \frac{\pi x}{l} \quad \text{et} \quad M_{yx} = \frac{-2\gamma_E}{\gamma_p + \gamma_E} \pi b p \cos \frac{\pi x}{l}$$

Massonnet a trouvé, en calculant ces coefficients pour différentes valeurs de α entre 0 et 1, que pour déterminer l'expression générale de τ_α (coefficient transversal de l'effort tranchant) on pouvait employer la relation simple :

$\tau(\alpha) = \tau_1 \sqrt{\alpha}$ La valeur de τ_1 peut être lue directement dans les tables et comme précédemment.

$$\tau_1 = \frac{1}{4 sh^2 \sigma} [\mp(\sigma ch \sigma sh \mathcal{G}\chi - \mathcal{G}\chi sh \sigma ch \mathcal{G}\chi + \frac{R\varphi R\psi}{3 sh \sigma ch \sigma - \sigma} + \frac{Q\varphi Q\psi}{3 sh \sigma ch \sigma + \sigma}]$$

❖ UTILISATION PRATIQUE DE LA METHODE DE GUYON-MASSONNET :

On peut appliquer cette méthode dans les cas suivants :

- Un tablier de pont à poutres sans entretoises intermédiaires c'est alors hourdis qui joue le

rôle des entretoises. Dans ce cas, pour calculer la rigidité de torsion d'une poutre comprenant une certaine largeur de hourdis, on doit :

- Décomposer la section de la poutre en éléments rectangulaires
- Faire la somme des inerties de torsion de ces éléments.
- Attribuant à la fraction de table de compression appartenant au hourdis un moment d'inertie de torsion égale à la moitié des moments d'inertie calculés comme si c'était une poutre.
- Ossatures mixtes comportant un nombre de poutrelles supérieures à 2, dans ce cas, on doit admettre que l'inertie de torsion des poutrelles (et des entretoises éventuelles) est nulle.
- Les ponts à biais, à condition que le biais soit supérieure à 65° . [1]

IV.3.3 COMMENTAIRE SUR CETTE METHODE :

Comme mentionné précédemment, la méthode de Guyon Massonnet est simple à utiliser grâce aux différentes tables permettant de calculer les coefficients de répartitions transversales. Les raideurs des poutres et des entretoises sont « tartinées » sur la longueur et la largeur de la dalle équivalente. L'excentrement des poutres et des entretoises par rapport à la dalle est négligé. Cette méthode est aussi efficace que celle de Courbon dans le cas d'un calcul de pré dimensionnement mais elle nécessite un apprentissage plus important. De plus, les entretoises ne sont pas considérées comme infiniment rigides. Elle est particulièrement performante dans le cas d'un très grand nombre de poutres et d'entretoises puisque l'erreur commise par le « tartinage » des raideurs est alors plus faible.

Cependant, avec les conceptions modernes des ponts mixtes, le nombre d'entretoises est souvent assez faible. La méthode de Massonnet est alors moins performante pour ces ponts. Cependant, elle permet de prévoir le comportement du pont sans entretoise, en considérant uniquement la raideur de la dalle dans la direction transversale et celle des poutres mixtes dans la direction longitudinale. [4]

IV.4 CONCLUSION :

La méthode de Guyon-Massonnet-Bareš permet de réaliser un pré dimensionnement des structures à poutres et à dalle. Elle a beaucoup été employée avant les progrès informatiques des années 70-80 car elle offrait des moyens simples pour calculer les sollicitations et les flèches dans ces structures. [4]

Chapitre V

UTILISATION DE LA MEF POUR LE CALCUL DES TABLIERS

V-1 INTRODUCTION :

En rendant la complexité des calculs une chose du passé, l'avènement de l'ordinateur a révolutionné les sciences de l'ingénieur. Des problèmes autrefois considérés insolubles avec les méthodes classiques, sont maintenant facilement accessibles avec les méthodes numériques. L'une de ces méthodes est la méthode des éléments finis. De ce point de vue, elle constitue un outil formidable à la disposition de l'ingénieur.

Les origines de la méthode des éléments finis remontent aux années 1950 lorsque des ingénieurs l'utilisèrent afin de simuler des problèmes de mécanique des milieux continus déformables. Depuis, le champ d'applications s'est considérablement étendu et les fondements théoriques de la méthode se sont amplement consolidés. Il existe de nos jours un nombre important de logiciels commerciaux et académiques qui utilisent la méthode des éléments finis comme un outil de simulation robuste pour des problèmes de mécanique des milieux continus, de mécanique des fluides, de thermique, d'électromagnétisme ou de finance, pour ne citer que quelques exemples. [5]

Dans Ce chapitre, nous considérons la formulation des éléments finis pour l'étude d'élasticité plane des grillages de poutre.

V-2 DEFINITION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS :

La méthode des éléments finis est une méthode générale d'analyse structurale. Laquelle la solution d'un problème dans la mécanique continue est rapprochée par l'analyse d'un assemblage des éléments finis qui sont reliés ensemble à un nombre de points nodaux finis et représentent le domaine de solution du problème. Elle est maintenant bien admise en tant qu'une technique générale plus puissante pour la résolution numérique des problèmes de technologie variée. Les applications s'étendent de l'analyse de contrainte des solides à la solution des problèmes acoustiques, de la physique et des problèmes dynamiques Liquides.

La méthode des éléments finis est donc une technique récente à caractère plus ri- disciplinaire car elle met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base :

- La mécanique des structures : élasticité, résistance des matériaux, dynamique, plasticité, etc...
- L'analyse numérique : méthodes d'approximation, résolution des systèmes linéaires les problèmes aux valeurs propres, etc.
- L'informatique appliquée : technique de développement et de maintenance des grands logiciels.

1- LES PRINCIPES DE LA MEF :

La MEF est basée sur une idée simple : Subdiviser (discrétiser) une forme complexe en un grand nombre de sous-domaines élémentaires de forme géométrique simple (éléments finis) interconnectés en des points appelés nœuds.

Nous considérons le comportement mécanique de chaque élément séparément, puis nous assemblons ces éléments de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.

La MEF utilise des approximations simples des variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

Les nœuds et les éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière, mais sont basés sur des considérations de précision de l'approximation.

2- EQUATION FONDAMENTALE DE LA MEF :

La MEF est basée sur la méthode matricielle des déplacements en mécanique des solides et des structures. L'équation fondamentale est :

$$[K] \{U\} = \{F\}$$

[K] -matrice de rigidité caractérisant le système (n×n)

{U} - vecteur des DDL – Degrés De Libertés (n), inconnus ; par exemple, les déplacements et

Les rotations des nœuds en mécanique des solides et des structures.

{F} -vecteur des sollicitations appliquées (n), connues.

SIGNIFICATION (1D) :

	K	U	F
Ressort	raideur k	déplacement	force
Barre T/C	rigidité EA/L	déplacement	force
Thermique	conductance $K = \frac{\lambda A}{L}$	température	flux de chaleur
Electricité	résistivité 1/R	potentiel	intensité
Ecoulement	perméabilité $\alpha A/L$	charge hydraulique	débit

3- ETAPES LOGIQUES DU CALCUL PAR ELEMENTS FINIS :

1. Définir les nœuds et les éléments (Créer le maillage).
2. Pour chaque élément, établir la matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$ reliant les degrés de libertés (Déplacements) nodaux $\{u_e\}$ et les forces $\{f_e\}$ appliquées aux nœuds : $[K_e] \{u_e\} = \{f_e\}$
3. Assembler les matrices et les vecteurs élémentaires en un système global $[K] \{U\} = \{F\}$ de manière à satisfaire les conditions d'équilibre aux nœuds.
4. Modifier le système global en tenant compte des conditions aux limites
5. Résoudre le système $[K] \{U\} = \{F\}$ et obtenir les déplacements $\{U\}$ aux nœuds
6. Calculer les gradients (déformations et contraintes) dans les éléments et les réactions aux nœuds sur lesquels les conditions aux limites sont imposées.

Etapes pratiques du calcul par EF :

Pré-processeur :

- ◆ Choisir le type d'éléments
- ◆ Entrer les propriétés géométriques
- ◆ Entrer les paramètres physiques
- ◆ Créer le modèle géométrique
- ◆ Créer le maillage : définir les nœuds et les éléments
- ◆ Appliquer les sollicitations
- ◆ Imposer les conditions aux limites

Calcul

- ◆ Choisir le type d'analyse (statique, dynamique,...)
- ◆ Construire la matrice et le vecteur élémentaire $[K_e]$, $\{f_e\}$
- ◆ Assembler $[K_e]$ et $\{f_e\}$ dans $[K]$ et $\{F\}$
- ◆ Prendre en compte les conditions aux limites
- ◆ Résoudre le système d'équations $[K] \{U\} = \{F\}$

- ◆ Calculer les variations additionnelles (σ , ε ...)

Post-processeur

- ◆ Présenter les résultats de façon intelligible et synthétique : sous forme numérique et sous forme graphique
- ◆ Effectuer des fonctions complémentaires : combinaisons, interprétations, Interpolations, animation, ...

4- OUTIL DE CALCULE PAR ELEMENTS FINIS :

➤ DESCRIPTION DE ROBOT :

Autodesk Robot Analysis 2014 est un logiciel de calcul des efforts internes, basé sur la méthode des Éléments finis.

Ce logiciel, qui en est à sa quatorzième édition, est fréquemment utilisé par les ingénieurs civils lors de la conception et l'analyse de ponts, d'édifices et de barrages, etc.

Le logiciel est utilisé pour les structures en béton armé, charpente métallique ou autres matériaux de construction et sous n'importe quelle forme de chargement : ponctuel, linéaire, surfacique. Le logiciel traite plusieurs types de chargement statique (poids propre de la structure et charges d'exploitation) ou dynamique (séisme, explosion...). De plus, il dispose de plusieurs adaptations pour les différentes vérifications : RPOA, règlements américains et autres.

Le logiciel permet d'effectuer les étapes de modélisation (définition de la géométrie, conditions aux limites, chargements de la structure, etc.) de façon totalement graphique, numérique ou combinées, en utilisant les innombrables outils disponibles.

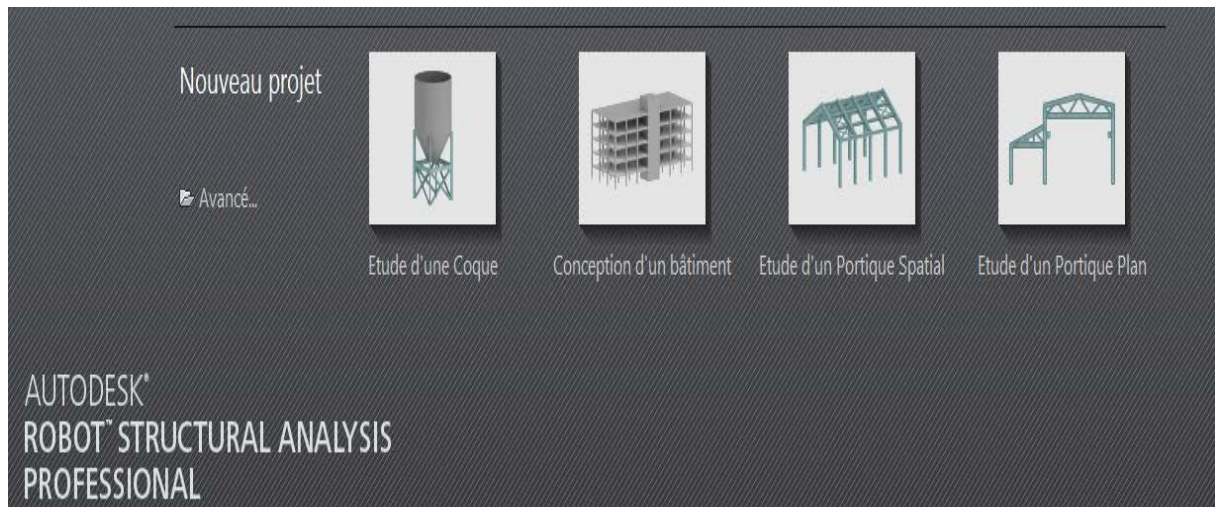


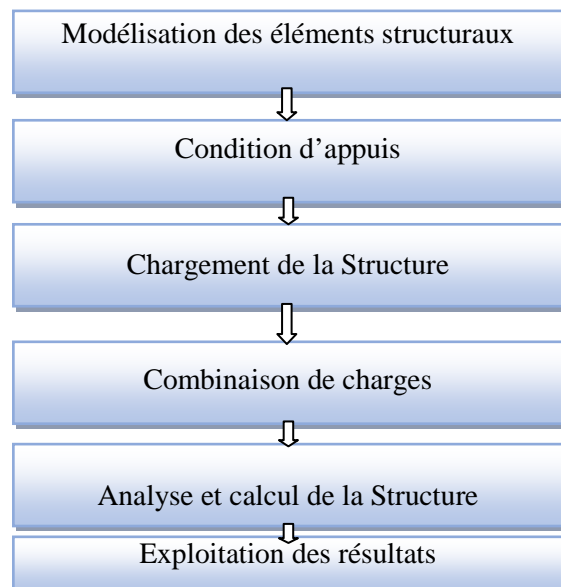
Fig. .V.1: Bibliothèque des structures du ROBOT 2014.

Le programme offre les possibilités d'analyse suivantes :

- Analyse statique linéaire.
- Analyse statique non linéaire.
- Analyse dynamique.

❖ **Etapes de modélisation sous le logiciel Autodesk Robot Analysis :**

Les étapes sont données dans l'organigramme ci-dessous :



➤ **LIGNES DE CONSTRUCTION :**

Les lignes de construction forment une grille auxiliaire qui peut servir à définir les différents éléments de la structure et à se référer aux composants de la structure sélectionnés (effectuer la sélection).

A l'aide des lignes de construction, nous pouvons afficher rapidement le plan de travail sélectionné (Boîte de dialogue vue) au sélectionner les éléments situés sur les lignes de construction.

La définition des lignes de construction se fait à l'aide de la fenêtre en dessous :

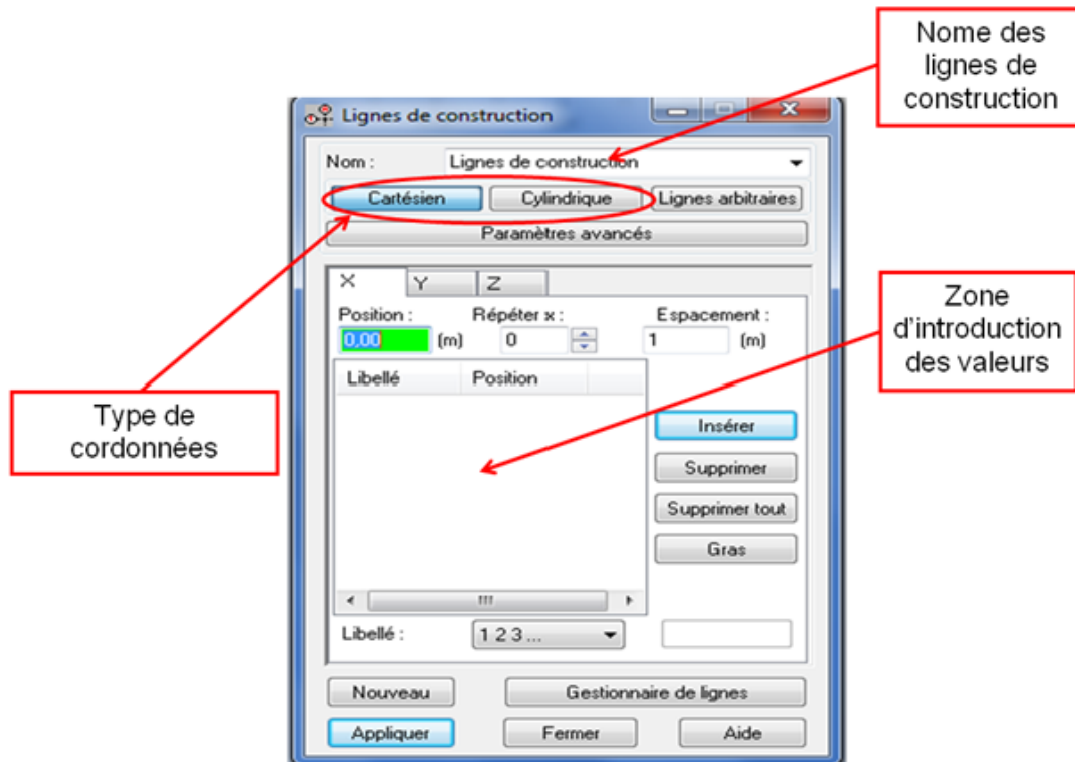


Fig.V.2. lignes de construction

➤ **MODILISATION DES ELEMENTS STRUCTURAUX :**

Les éléments à modélisé dans un ouvrage sont seulement les éléments qui participent à la résistance de l'ouvrage et les autres éléments sont introduits au modèle comme chargement. Les éléments structuraux sont donnés comme suit :

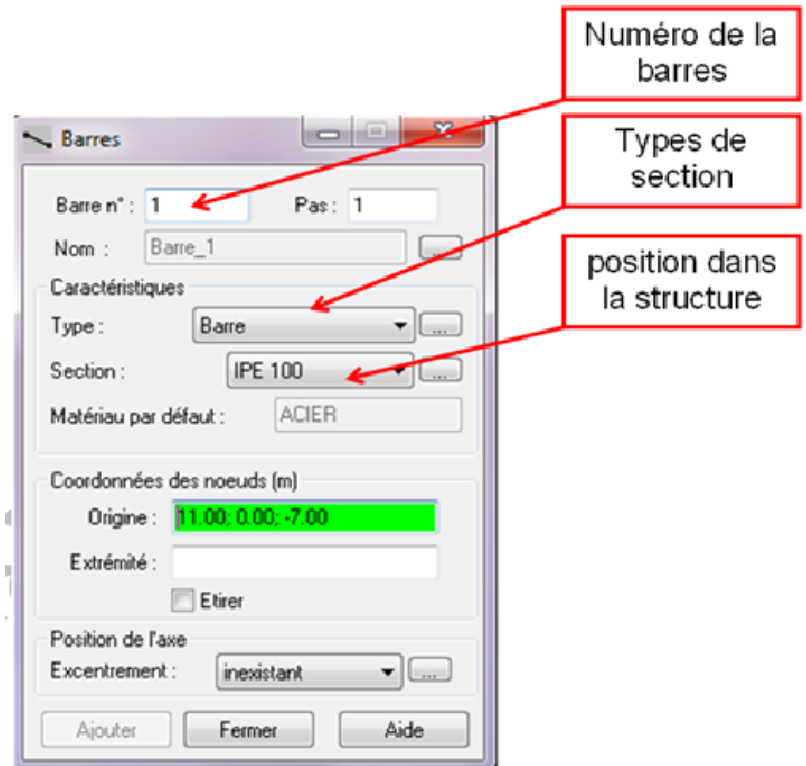
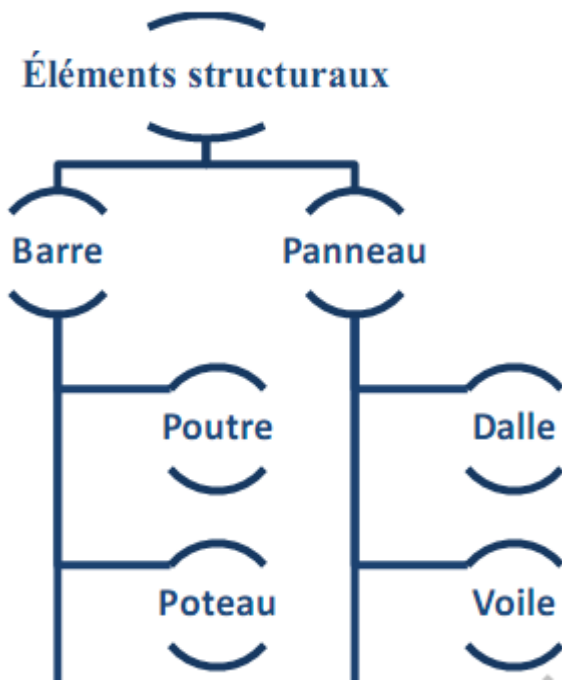


Fig.V.3- élément barre

➤ **AFFECTATIONS DES APPUIS :**

Dans le logiciel il existe plusieurs types d'appuis, pour notre cas on se limite à deux types d'appuis :

- **Appuis rigides** : un appui dans le logiciel est un nœud conditionné par certains degrés de Liberté (déplacement, rotation), La définition des appuis rigides consiste à :

- Donner le nom de l'appui.
- Définir les degrés de liberté.

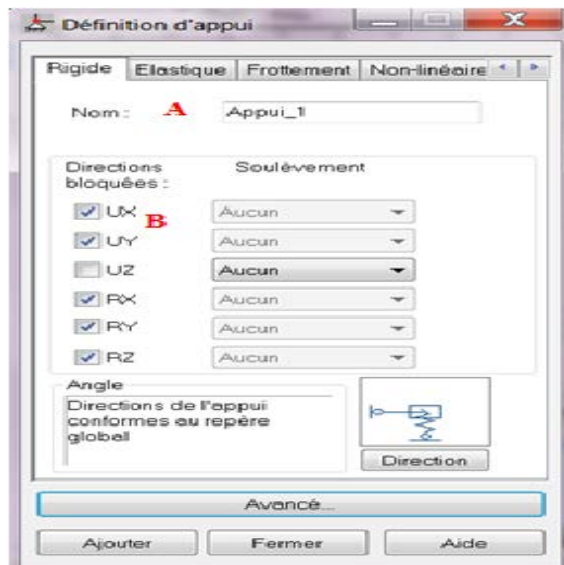


Fig.V.4. appui rigide

- **Appuis élastique** : dans le cas d'une interaction entre un milieu rigide et milieu souple. On utilise les appuis élastiques.

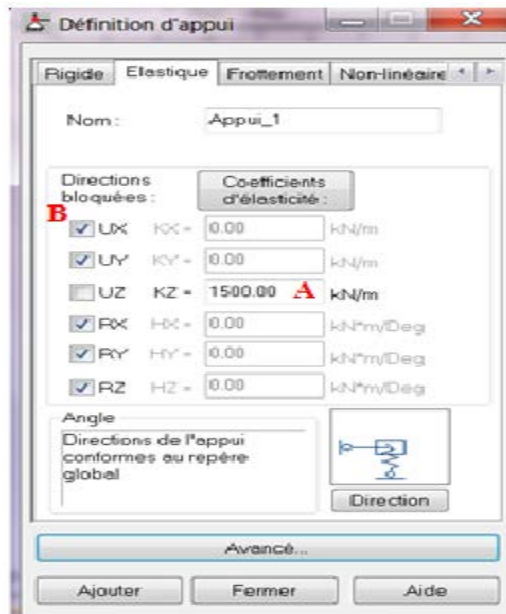


Fig.V.5 appui élastique

➤ **chargement de la structure :**

Il existe deux types de chargement, statique et dynamique :

✓ **chargement statique :**

L'accès à la commande cas de charge se fait par la fenêtre suivante :

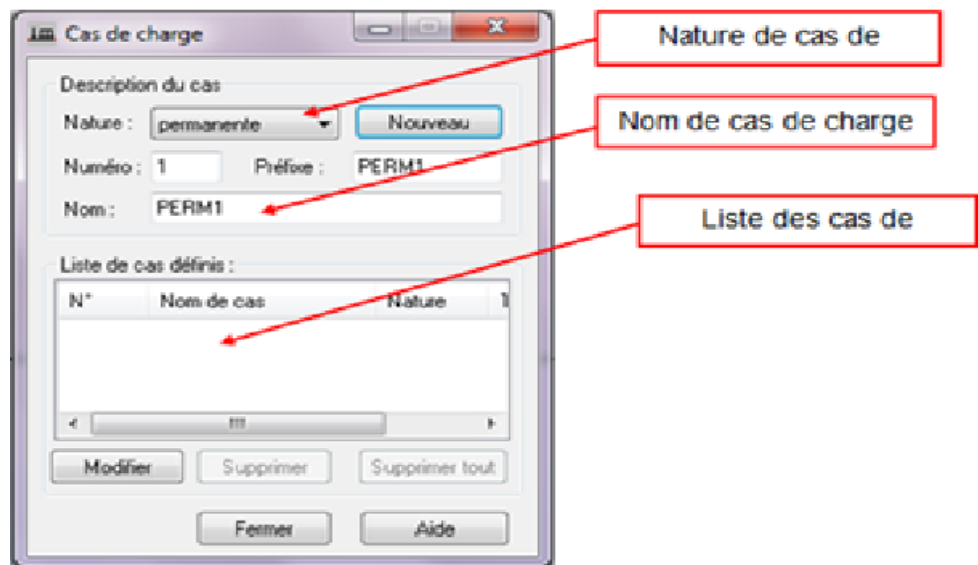


Fig.V.6 cas de charge

✓ **Chargement dynamique :**

- **charge roulantes :**

L'application des charges roulantes dans le logiciel passe par deux étapes, dont la première qui consiste à définir les différentes charges roulantes selon le règlement utilisé et la deuxième étape consiste à définir l'axe de circulation de la charge roulante tout en indiquant le nom de la charge.

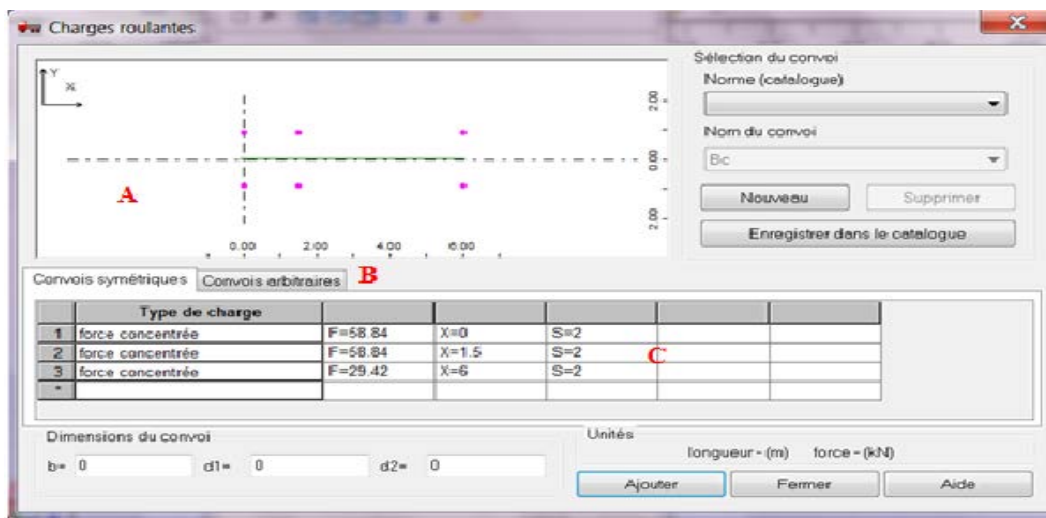


Fig.V.7- Définition des charges roulantes

- **chargement sismique :**

Pour modéliser l'effet sismique dans le logiciel RSA, il existe deux analyses, et chaque analyse doit précéder par une analyse modale.

- analyse spectrale : Dans le cas où le règlement sismique utilisé pour les calculs n'est pas intégré dans le logiciel, on procède à une analyse Spectrale par l'importation d'une fonction (spectre) qui représente l'effet sismique.
- Analyse sismique : Cette analyse est utilisée dans le cas où le règlement sismique est intégré dans le logiciel.

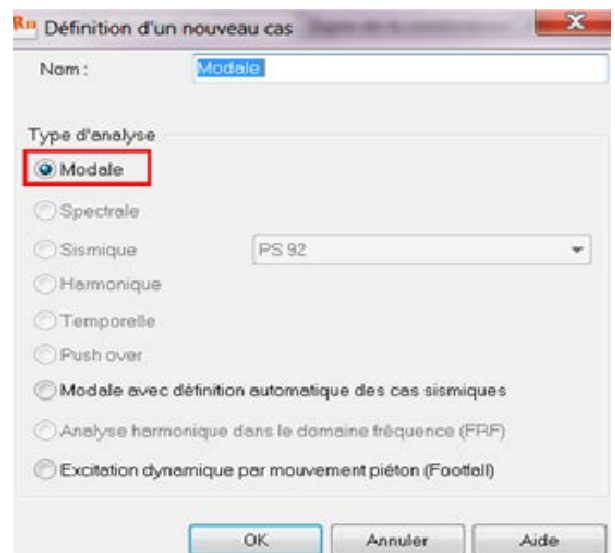


Fig.V.7 Analyse modale

➤ **ANALYSE ET CALCUL DE LA STRUCTURE :**

Avant de procéder au lancement de calcul le logiciel nous permet de vérifier les erreurs dans la structure (A), la fenêtre ci-dessous montre l'accès à la commande vérification et calcul(B) de la Structure.

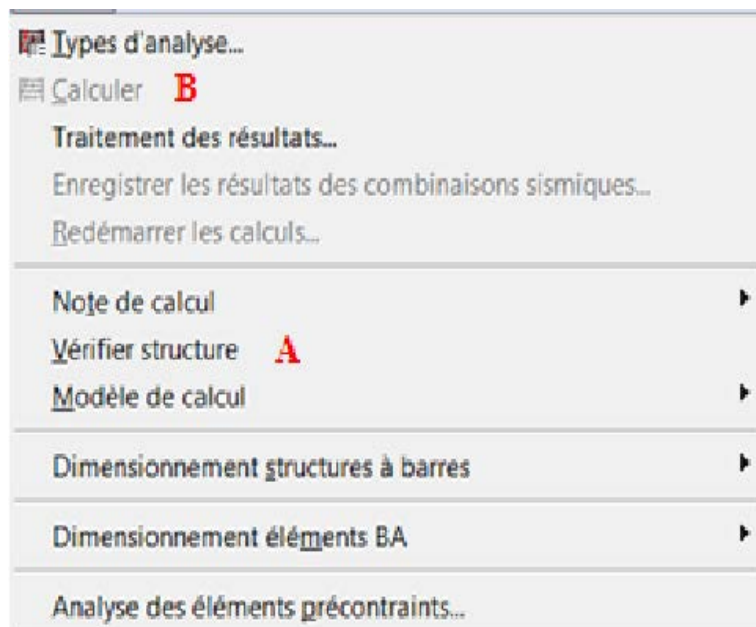


FIG.III.8 Vérification et lancement de calcul

V-3 CONCLUSION :

La méthode des éléments finis est une étude de simulation robuste utilisé par les logiciels de calcul des structures comme Autodesk Robot Analysis qui permet de modéliser n'importe quelle structure et le calcul des efforts.

Chapitre VI

APPLICATION DES DEUX METHODES SUR UN TABLIER

VI. Application des deux méthodes sur un tablier (analytiques et numériques)

1. INTRODUCTION :

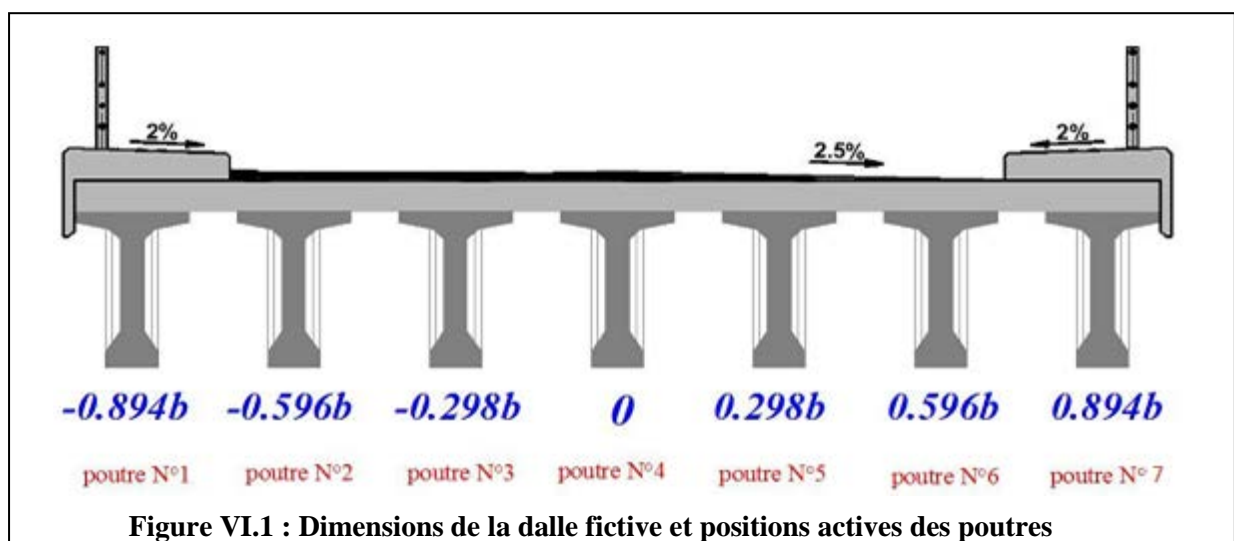
Le calcul de sollicitation longitudinale se fait en considérant la structure comme un élément barre; mais en effet pour un calcul exact des sollicitations de notre tablier il faut savoir comment ces efforts se répartissent transversalement pour bien armer notre construction, et ses éléments.

Plusieurs auteurs ont amélioré, élargi ce qui est important, vérifié expérimentalement, sur modèles et sur constructions réalisées.

On applique la méthode de GUYON MASSONNET et la méthode des éléments finis(ROBOT) sur un tablier de pont à poutre qui se trouve à la wilaya de BLIDA sur oued BENI AZZA et on compare les résultats.

2. LA METHODE DE GUYON MASSONNET SUR UN TABLIER DE PONT A POUTRE :

2.1 Détermination des paramètres de calcul :



CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES :

- ❖ La portée de l'ouvrage.....24.7m
- ❖ Longueur des poutres 25.7m
- ❖ Hauteur des poutres..... 1,30m
- ❖ Le nombre des poutres dans chaque travée..... 7 poutres
- ❖ L'entre axe de poutres1,45 m
- ❖ Largeur de la chaussée7m
- ❖ Largeur des trottoirs1.35 m

- ❖ Largeur totale du pont9.7.m
- ❖ Épaisseurs du hourdis.....0.20m

Le largeur active(B) :

Le pont est constitué de 7 poutres ($n = 7$), espacées de $b_0 = 1.45\text{m}$ (entre-axe des poutres) .Donc la largeur active du pont sera : $B=2b = n \times b_0 = 10.15\text{m}$

$$b=5.075\text{m.}$$

Position active des poutres :

D'après le schéma les positions actives des poutres seront données de la façon suivante :

La position active des poutres : $P_i = b_0 * 2i / 9.7$

(-0.894b ; -0.596b ; -0.298b ; 0 ; 0.298b ; 0.596 b ; 0.894b)

➤ **détermination des coefficients de Guyon-Massonnet :**

Rigidité flexionnelle des poutres ρ_P (cm^4)	117834.89 E
Rigidité flexionnelle des entretoises ρ_E (cm^4)	666.666 E
Rigidité torsionnelle des poutres γ_P (cm^4)	1276.26 E
Rigidité torsionnelle des entretoises γ_E (cm^4)	555.556 E
Paramètre d'entretoisement θ	0.76
Paramètre de torsion α	0.15

Tableau .IV. 1 : Détermination des paramètres θ , α

➤ **Coefficients de répartition transversale $K_{\alpha\text{moy}}$:**

$$K = f(\theta ; \alpha ; Y)$$

Ils dépendent :

- Du paramètre de l'entretoisement θ ;
- Du paramètre de torsion α ;
- De l'excentricité relative (e/b) ;
- De l'ordonnée relative (y/b) de la section où on veut étudiés le moment;
- La section où on veut étudier le moment (la section la plus sollicitée)

Les valeurs de K pour ($\alpha=0$ et $\alpha=1$) dans le cas de θ entre (0 et 2), sont consignés dans les tableaux de Massonnet, donc pour un calcul rigoureux de K dans le cas ($0 < \alpha < 1$) on utilisera les formules d'interpolation de Sattler.

Si $0 < \theta \leq 0.1$ la formule d'interpolation sera : $K_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0)\alpha^{0.05}$

Si si $0.1 < \theta \leq 1$ la formule d'interpolation sera : $K_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0) \alpha^{\left(1 - e^{-\frac{0.065 \cdot \theta}{0.665}}\right)}$

Si si $1.0 < \theta$ la formule d'interpolation sera : $K_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0) \sqrt{\alpha}$

**Puisque $0.1 < \theta = 0.661 < 1,00$ notre cas est la deuxième.

$$K_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0) \alpha^{0.648} = K_0 + (K_1 - K_0) 0.292.$$

Dans le cas où θ calculé ne figure pas dans les tableaux on doit faire une interpolation, dans notre cas on va faire une interpolation entre la valeur $\theta = 0.75$ et $\theta = 0.8$ pour trouver les valeurs correspondants $\theta = 0.76$.

il faut maintenant de chercher les tableaux de K_0 et K_1 pour $\theta = 0.76$; on fait une interpolation entre $\theta = 0.75$ et $\theta = 0.80$.

Application sur notre exemple de calcul:

Pour calculer K_0 relative a $(y = -b ; e = 0)$

$$K_0(\theta = 0.76) = \left(\frac{0.76 - 0.75}{0.80 - 0.75}\right) \times (K_0(\theta = 0.80) - K_0(\theta = 0.75)) + K_0(\theta = 0.75)$$

Application numérique :

$$K_0(\theta = 0.76) = \left(\frac{0.76 - 0.75}{0.80 - 0.75}\right) \times (-0.2595 + 0.126) - 0.126 = 0.195$$

Lorsque on applique cette procédure sur tous les tableaux on trouve les coefficients K_0 ; K_1 pour $\theta = 0.76$.

Calcul de K_α :

Maintenant on fait l'interpolation par la méthode de Sattler pour obtenir notre cas ($\alpha = 0.15$).

Exemple de calcul:

Pour calculer K_α relative a $(y = -b ; e = 0)$

$$K_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0) \alpha^{0.648} = K_0 + (K_1 - K_0) 0.292.$$

Application:

$$K_\alpha = 0.1433 + (0.7396 - 0.1433) 0.346 = 0.34962.$$

Si on applique cette procédure sur tous les tableaux on trouve les coefficients K_α pour $\alpha = 0.15$

Mais si la poutre se trouve entre deux sections dont les lignes d'influence sont connues, il fallait d'interpoler en fonction θ et α et on tracer la ligne d'influence propre à cette poutre.

L'ouvrage concerné par l'étude est d'une largeur active de 5.04×2 m porté par 7 poutres espacés également de 1.45 m.

A partir du tableau ci-après ; on peut conclure les coefficients de répartition transversale de notre cas:

thêta=0,76									
alfa =0.15 ⇒K 0.15									
y/e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	0,0842521	0,556953	1,038532	1,477008	1,69268	1,477008	1,03853	0,55695	0,08425
0,298b	-0,204129	0,152129	0,536144	0,963125	1,39282	1,670447	1,58978	1,28059	0,91787
0,596b	-0,263170	-0,03232	0,229701	0,563336	0,99230	1,483014	1,88450	1,99885	1,98599
0,894b	-0,241479	-0,16341	-0,05517	0,137899	0,48888	1,068332	1,90184	2,89315	3,84659

TABLEAUX VI -2- k0.15 pour θ=0.76

Après avoir tracé les lignes d'influence pour chaque poutre dans la section mi travée jugée dangereuse , on doit disposer nos systèmes de chargement (B_c , B_t , B_r) et surcharge surfacique ($A(l)$, accompagnée de convoi (Mc_{120} , D_{240}) pour chaque poutre dans notre cas nous avons 07 poutres.

La méthode de disposition de chargement pour chaque poutre : on met le chargement sur la poutre pour avoir un cas défavorable et solliciter au maximum la poutre intermédiaire, par contre pour les deux poutres de rive on ne peut pas disposer le chargement sur les poutres à cause de l'espace entre le trottoir et l'essieu qu'on ne peut pas dépasser, les cinquante centimètres (50 cm) pour B_t , Mc_{120} et les 25 cm pour B_c (RCPR). Pour le convoi exceptionnel D_{240} , il faut la mettre au milieu du tablier, La charge surfacique $A(l)$ est disposée sur tout le tablier de pont.

Pour calculer le coefficient K , la méthode change en fonction de la nature de chargement :
 Pour des surcharges concentrées (B_c , B_t): On mesure la longueur entre l'impact de l'essieu avec tablier et l'intersection avec la courbe d'influence, Pour B_t et B_c une fois chargées on fait la moyenne des deux longueurs.

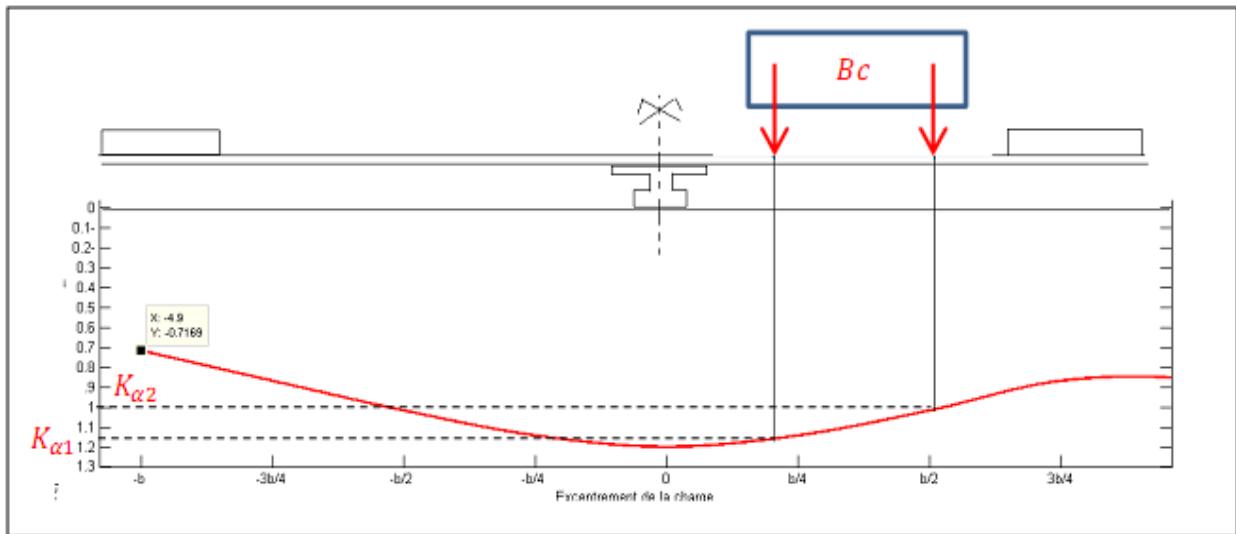


Figure VI.2 : Calcul du coefficient de répartition moyen pour une charge concentré (Ex: Bc)

Pour des surcharges surfaciques (A(l), B_r, MC120, D 240) : on calcule la surface encadrée par l'impact de l'essieu avec le tablier de pont et l'intersection avec la courbe d'influence divisé par la longueur de la voie (A(l)) ou la longueur d'impact (Mc120), la longueur de convoi D 240 .

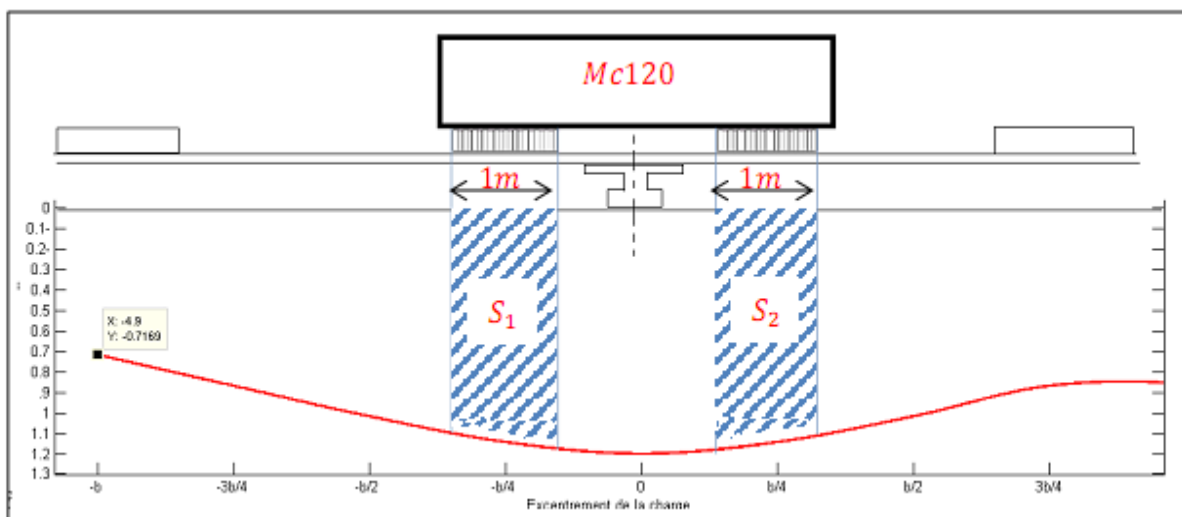


Figure VI.3 : Calcul du coefficient de répartition moyen pour une charge répartie (ex:Mc120)

Le calcul de moment longitudinal réparti de chaque poutre et chaque système de chargement on multiplier le coefficient K par le moment longitudinal moyen (M₀ de chaque poutre).

$$M_{xt} = K_{\alpha moy} \times M_{xm}$$

Tableau récapitulatif du moment à mi- travée :

Désignation	Nombre de voie	Poutre 4		Poutre5		Poutre6		Poutre 7		
		M ₀ (t.m)	K _α	M réel (t.m)	K _α	M réel (t.m)	K _α	M réel (t.m)	K _α	M réel (t.m)
Surcharge A(L)	1	54,03	1,29	69.69	1,67	90,2301	1,65	89,1495	1,44	77,8032
	2	109,35	1,29	141.062	1,28	139,968	1,1	120,285	0,77	84,1995
Trotoirs	1	2,2	0,33	0,726	1,11	2,442	1,99	4,378	3,38	7,436
	2	4,41	0,33	1,4553	0,55	2,4255	0,33	1,4553	0,69	3,0429
Surcharge Bc	1	41,14	1,05	43,197	1,51	62,1214	1,75	71,995	1,93	79,4002
	2	76,6	1,28	98,048	1,41	108,006	1,37	104,942	1,24	94,984
Surcharge Bi	1	34,6	1,13	39,098	1,49	51,554	1,29	44,634	0,93	32,178
	2	69,81	1,3	90,753	1,07	74,6967	0,81	56,5461	0,47	32,8107
Mc 120		93,58	1,24	116.039	1,14	106.681	1,03	96,3874	0,77	72,0566
Poids G		191.3	1	191.3	1	191.3	1	191.3	1	191.3
D 240		132	1,32	174.24	1,12	147.84	1,01	133,32	0,56	73,92

TABLEAUX . VI.3 le moment revient à chaque poutre

TABLEAUX DE COMBINAISON :

On peut maintenant construire notre système de combinaison vis-à-vis a l'ELU et l'ELS

COMBINAISON DE CHARGE					
		P4	P5	P6	P7
ELS	G+1,2((A) +St)	362.32	362.19	340.89	301.26
	G+1,2((Bc) + St)	310.70	323.83	322.48	314.20
	G+Mc120	307.33	297.981	287.68	263.35
	G+D240	365.54	339.14	324.62	265.22

ELU	1,35G+1,6(A+St)	486.28	486.11	457.71	404.87
	1,35G+1,6(Bc+St)	417.45	434.97	433.167	422.12
	1,35G+1,35(MC120)	414.9	402.27	388.37	355.53
	1,35G+1,35D240	493.47	457.83	438.237	358.04

**Tableau VI.4 : Combinaison des moments fléchissant
à ELU et ELS (0.25L)**

CONCLUSION :

✓ La poutre la plus sollicitée c'est la poutre 4 (poutre de milieu) sous la combinaison :

○ **E.L.S :**

G+D240=365.54 T.m

○ **E.L.U :**

1,35G+1,35D240 =493.47 T.m

➤ Calcul de la répartition des efforts tranchants :

L'effort tranchant sera calculé pour la période en service ; le calcul des efforts tranchants sera calculé de la même méthode que celle utilisée pour le moment fléchissant.

Les Coefficients $\epsilon\alpha$, $\epsilon\alpha'$ dépendent de Θ et α . Pour la détermination de ces deux paramètres ; Dans le tableau de Guyon- Massonnet sont données les ϵ_0 , ϵ_1 et ϵ'_1 qui correspondent à $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. Pour θ ne figurant pas dans les tableaux de Guyon - Massonnet on doit faire une interpolation.

La détermination des coefficients $\epsilon\alpha$ se fait comme celle de $K\alpha$ mais avec quelques spécifications.

- En section sur appui : On utilisera $\epsilon\alpha$ obtenue par interpolation entre ϵ'_0 et ϵ'_1 avec $\epsilon'_0 = \epsilon_0$ et $\epsilon'_1 \neq \epsilon_1$.
- En section courants : On utilisera $\epsilon\alpha$ obtenu par interpolation entre ϵ_0 et ϵ_1 l'interpolation se fera comme suite :

$$\text{Si } |y| + |e| \leq \frac{3}{4} b \quad \epsilon\alpha = \epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \alpha$$

$$\text{Si } |y| + |e| > \frac{3}{4} b \quad \epsilon'\alpha = \epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \alpha^{0.5}$$

Les cellules en bleu, sont celles pour lesquelles la deuxième condition est vérifiée.

Nous passons maintenant aux positions réelles des poutres.

ε' pour $\theta = 0,76$

Thêta= 0.76	Alfa=0,15								
y e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	-0,0211	0,0574665	0,143388	0,252502	0,40101482	0,2525338	0,143388	0,0574665	-0,021094
b/4	-0,0597	0,008075	0,069638	0,147942	0,25382065	0,4021469	0,255311	0,1663311	0,07904781
b/2	-0,0668	-0,023362	0,023311	0,073553	0,14947116	0,2611610	0,359928	0,3149366	0,27043823
3b/4	-0,0581	-0,041962	-0,021412	0,012886	0,075176	0,1746941	0,322529	0,5096439	0,57626018
b	-0,0446	-0,05408	-0,059182	-0,04896	-0,004169	0,063900	0,298053	0,5979783	0,99167665

Tableau VI.5 : Valeurs du coefficient de répartition ε' pour les positions réelles des poutres

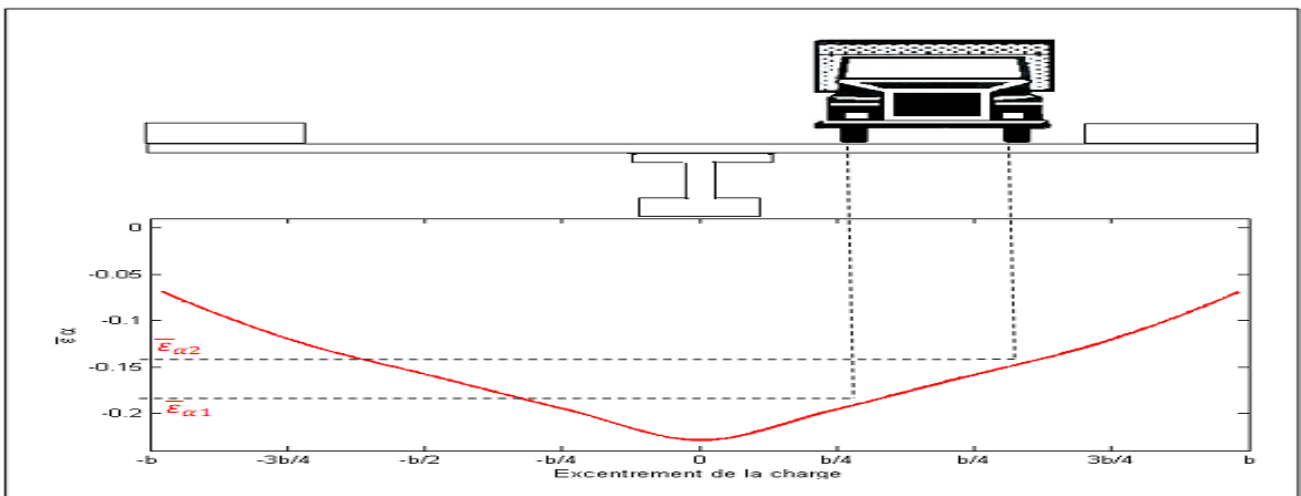


Figure VI.4: ligne d'influence du coefficient $\varepsilon'\alpha$ pour la poutre centrale

Tableau récapitulatif des efforts tranchant : X=0.0L

Désignation	Nombre de voie	T 0(t)	Poutre 4		Poutre 5		Poutre 6		Poutre 7	
			ε'_a	T réel (t)	ε'_a	T réel (t)	ε'_a	T réel(t)	ε'_a	T réel(t)
<i>Surcharge A(L)</i>	1	61,25	0,157	9,61625	0,306	18,7425	0,263	16,10875	0,199	12,18875
	2	122,5	0,185	22,6625	0,175	21,437	0,16	19,6	0,092	11,27
<i>Trottoirs</i>	1	2,5	0,021	0,0525	0,158	0,395	0,388	0,97	0,678	1,695
	2	5	0,021	0,105	0,065	0,325	0,171	0,855	0,315	1,575
<i>Surcharge Bc</i>	1	55,6	0,158	8,7848	0,288	16,0128	0,311	17,2916	0,315	17,514
	2	103,5	0,205	21,2175	0,193	19,9755	0,22	22,77	0,186	19,251
Mc 120		106,04	0,215	22,7986	0,205	21,7382	0,15	15,906	0,071	7,52884
D 240		149,64	0,21	31,4244	0,201	30,07764	0,133	19,90212	0,04	5,9856

Tableau VI.6: Les Efforts tranchants dans chaque poutre sous les différentes charges (0.0L)

Tableau récapitulatif des efforts tranchant : $X=0.25L$:

Désignation	Nombre de voie	T (0,25)(t)	Poutre 4		Poutre 5		Poutre 6		Poutre 7	
			ε_a	T réel	ε_a	T réel	ε_a	T réel	ε_a	T réel
<i>Surcharge A(L)</i>	1	30,45	0,221	6,72945	0,275	8,37375	0,25	7,6125	0,191	5,81595
	2	61,25	0,232	14,21	0,21	12,8625	0,155	9,49375	0,088	5,39
<i>Trottoirs</i>	1	1,246	0,034	0,042364	0,165	0,20559	0,39	0,48594	0,66	0,82236
	2	2,45	0,034	0,0833	0,071	0,17395	0,176	0,4312	0,31	0,7595
<i>Surcharge Bc</i>	1	13,342	0,169	2,254798	0,262	3,495604	0,236	3,148712	0,302	4,029284
	2	26,67	0,214	5,70738	0,243	6,48081	0,183	4,88061	0,169	4,50723
<i>Mc 120</i>		27,496	0,221	6,076616	0,21	5,77416	0,145	3,98692	0,068	1,869728
<i>D 240</i>		69,958	0,274	19,168492	0,232	16,230256	0,131	9,164498	0,04	2,79832

Tableau VI.7: Efforts tranchants dans chaque poutre sous les différentes charges (0.25L)

➤ **Combinaison d'action :**

a) **Combinaison pour l'effort tranchant $X= 0.00L$:**

On peut maintenant construire notre système de combinaison vis-à-vis à l'ELU et l'ELS

COMBINAISON DE CHARGE					
		P4	P5	P6	P7
ELS	G+1,2((A) +St)	58.32	57.19	55.68	47.66
	G+1,2((Bc) + St)	56.58	55.44	59.48	56.13
	G+Mc120	53.79	53.73	46.90	38.52
	G+D240	62.42	61.07	50.9	36.98
ELU	1,35G+1,6(A+St)	78.27	84.42	74.76	64.06
	1,35G+1,6(Bc+St)	75.95	74.43	79.83	75.36
	1,35G+1,35(MC120)	72.61	71.18	63.31	52.00
	1,35G+1,35D240	84.26	82.44	68.71	49.92

Tableau VI.8: Combinaison des l'effort tranchant à ELU et ELS (0.0L)

CONCLUSION :

✓ La poutre la plus sollicité c'est la poutre 4 (poutre de milieu) sous la combinaison :

○ E.L.S :

G+D240=62.42 T

○ E.L.U :

1,35G+1,35D240 =.84.26 T

b) **Combinaison pour l'effort tranchant $X= 0.25L$:**

On peut maintenant construire notre système de combinaison vis-à-vis l'ELU et l'ELS

COMBINAISON DE CHARGE					
		P4	P5	P6	P7
ELS	G+1,2((A) +St)	32.65	31.17	27.46	23.45
	G+1,2((Bc) + St)	22.43	23.51	21.93	21.88
	G+Mc120	21.57	21.27	19.48	17.37
	G+D240	34.66	31.73	24.66	18.29

ELU	1,35G+1,6(A+St)	43.79	41.82	36.87	31.53
	1,35G+1,6(Bc+St)	30.17	31.61	29.5	29.43
	1,35G+1,35(MC120)	29.12	28.71	26.29	23.47
	1,35G+1,35D240	46.79	42.83	33.29	24.69

Tableau VI.9: Combinaison des l'effort tranchant à ELU et ELS (0.25L)

CONCLUSION :

✓ La poutre la plus sollicité c'est la poutre 4 (poutre de milieu) sous la combinaison :

- E.L.S.

G+D240=34.66 T

- E.L.U.

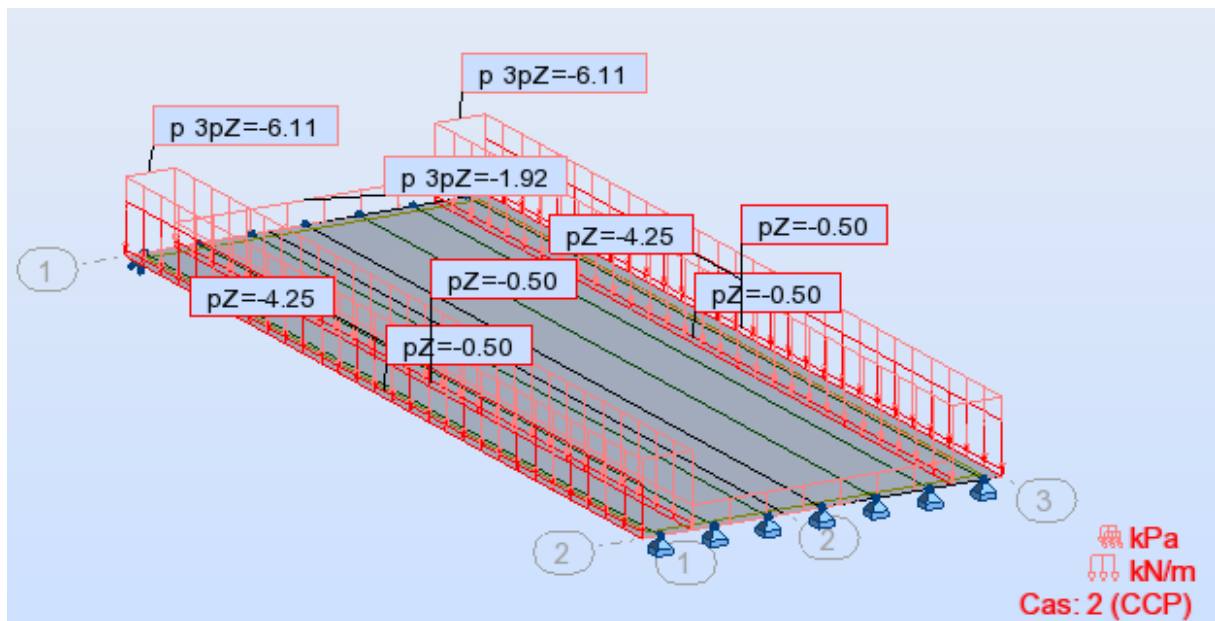
1,35G+1,35D240 =46.79 T.

3. APPLICATION PAR LA METHODE DES ELEMENT FINIS

(ROBOT) :

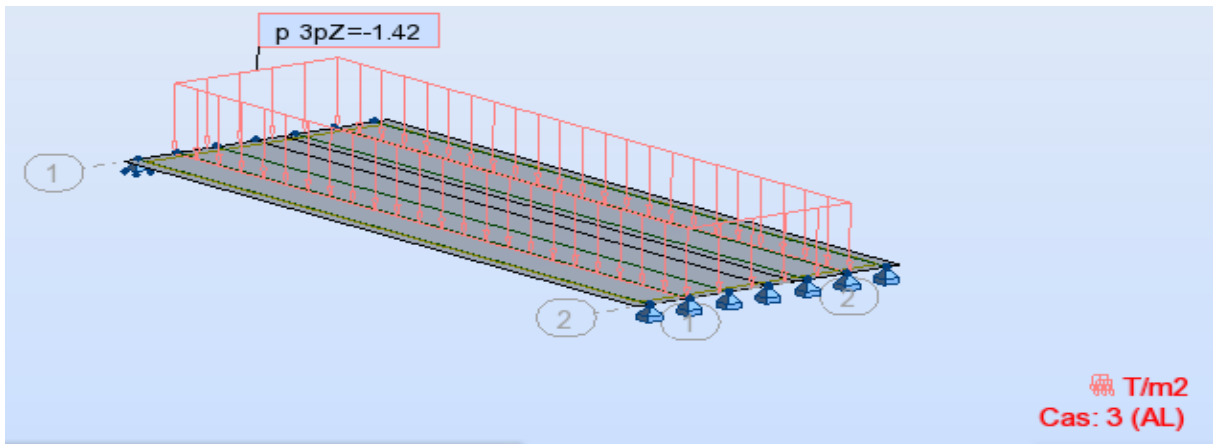
Calcul des charges :

1-Charges permanentes et compléments des Charges permanentes :

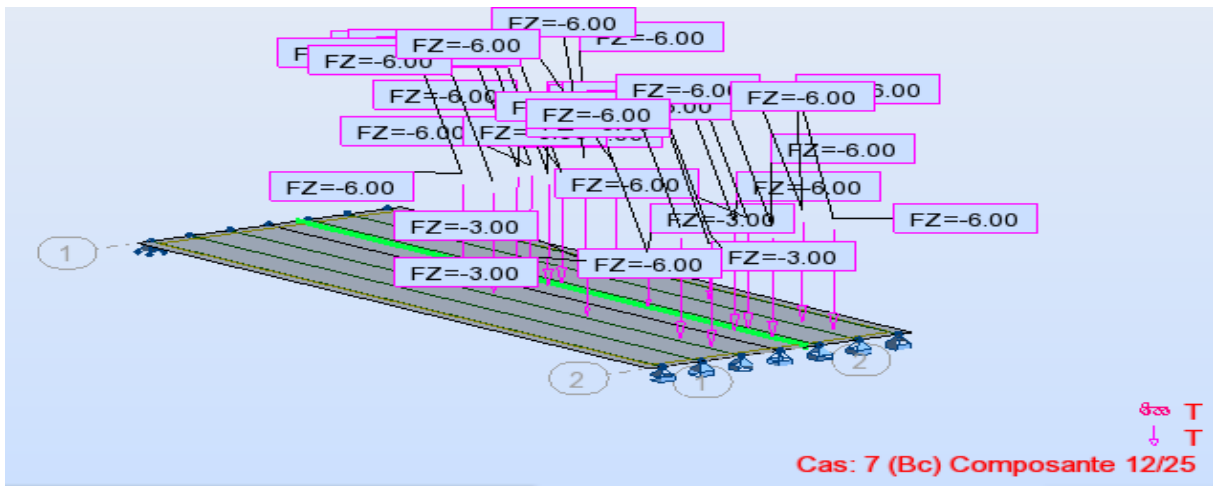


2-Calcul des surcharges routières :

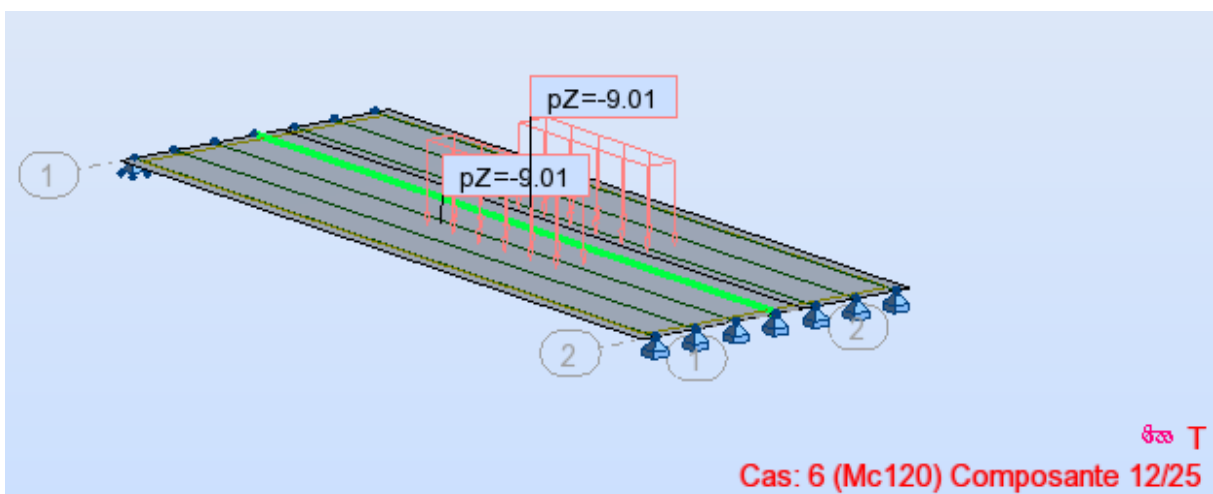
2-1 Surcharge A (L) :



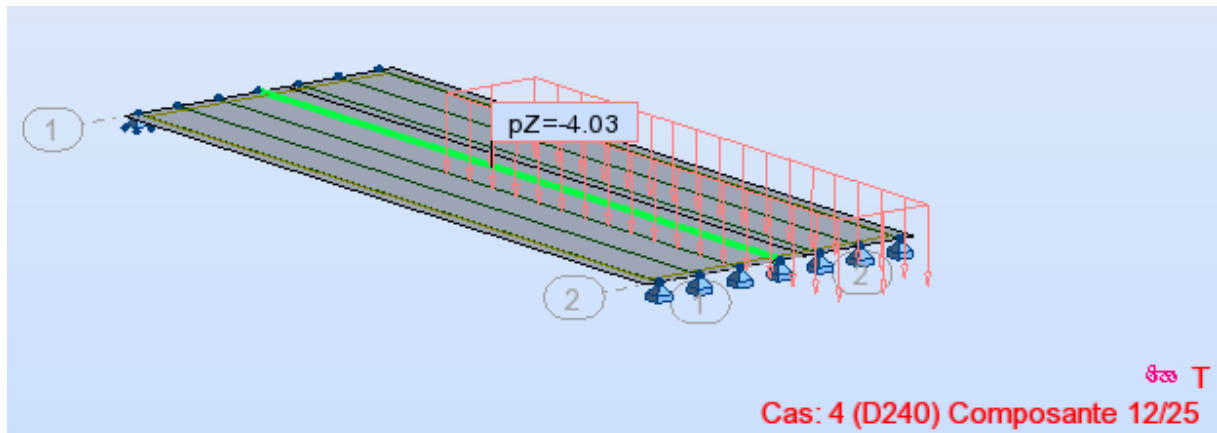
2-2 Surcharge Bc :



2-3 Surcharge militaire Mc₁₂₀ :

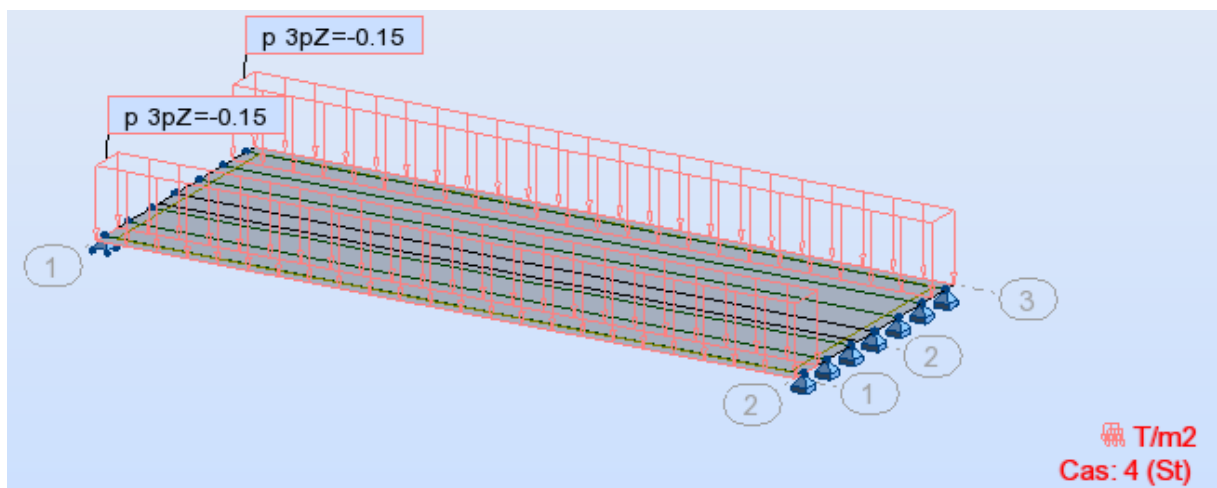


2-4 Surcharge D240 :



2-5 Surcharge sur trottoir (ST):

Elles s'appellent aussi charge générale, Nous appliquons sur les trottoirs une charge uniforme de 150 Kg/m².



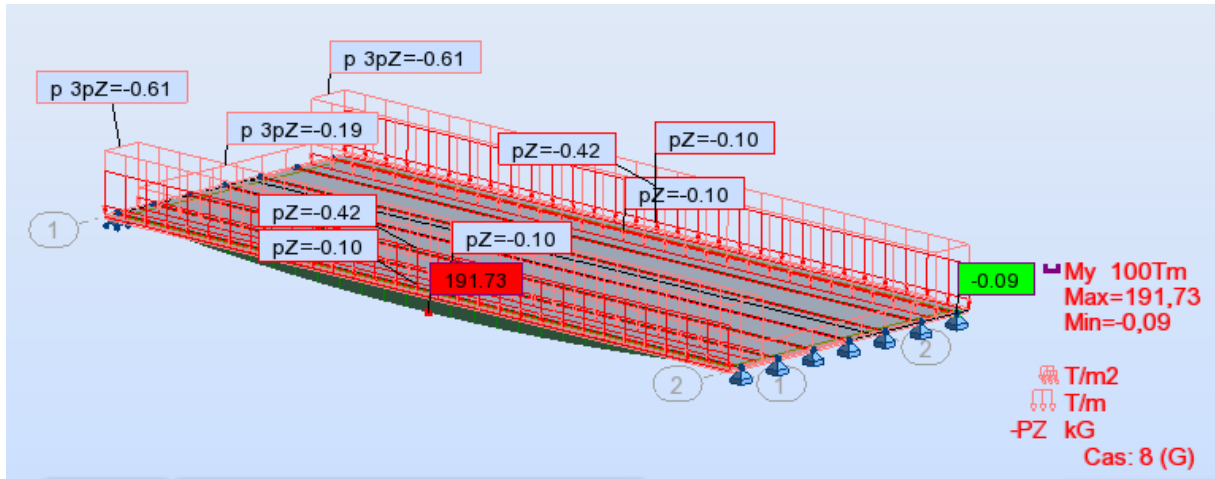
3- Les combinaisons de charges :

Les résultats obtenus sont récapitulés dans le tableau suivant :

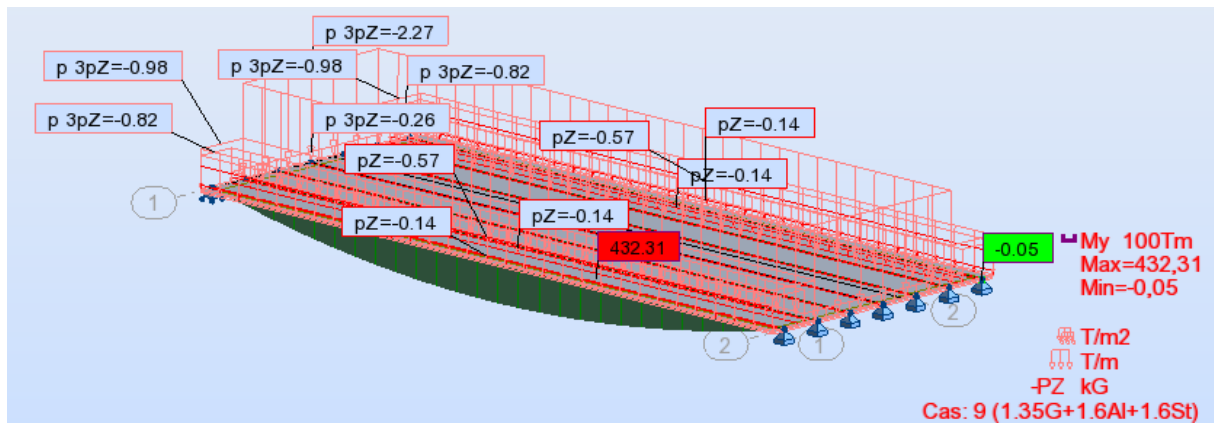
	combinaison	Moment (T.m)	Effort tranchant (T)
ELS	G + 1.2 (A(I) +St)	322.09	51.35
	G + 1.2 (Bc+St)	305.44	57.75
	G + M_{c120}	272.44	48.47
	G + D₂₄₀	338.61	57.59
ELU	1.35 G + 1.6 (A(I) +St)	432.31	68.92
	1.35 G + 1.6 (Bc+St)	417.55	77.45
	1.35 G + 1.35 M_{c120}	372	65.44
	1.35 G + 1.35 D₂₄₀	457.13	77.75

Tab. VI.10. Sollicitation dans les poutres

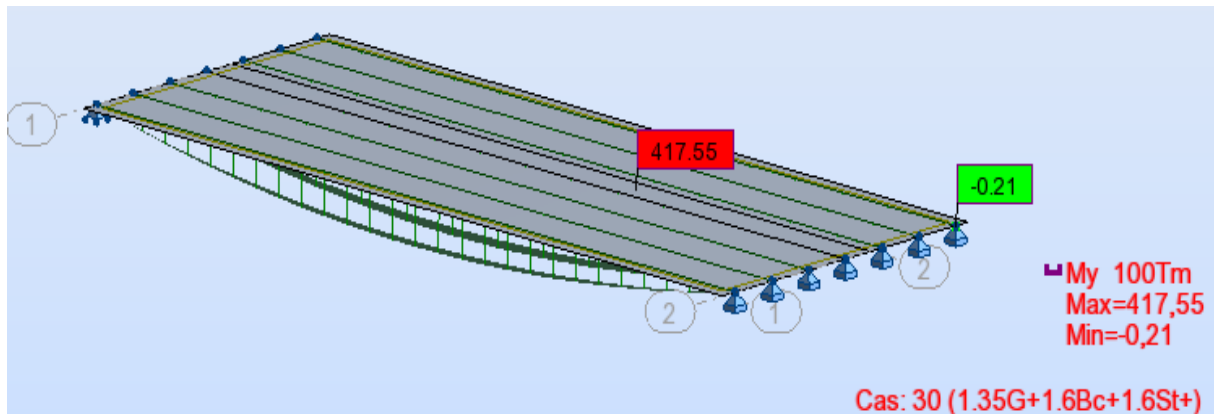
a) Le moment MAX sous poids propre :



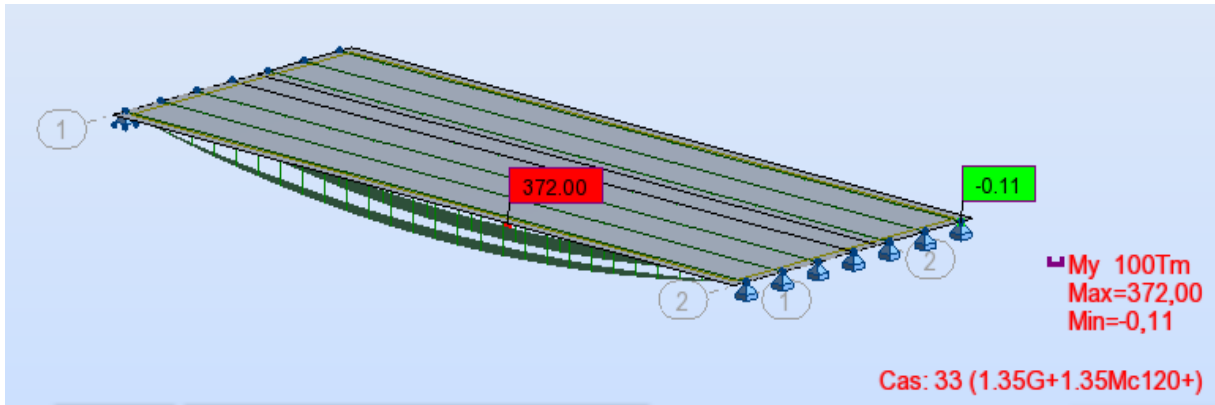
b) Le moment MAX sous combinaison [1.35G+1.6 (AI+ ST)] :



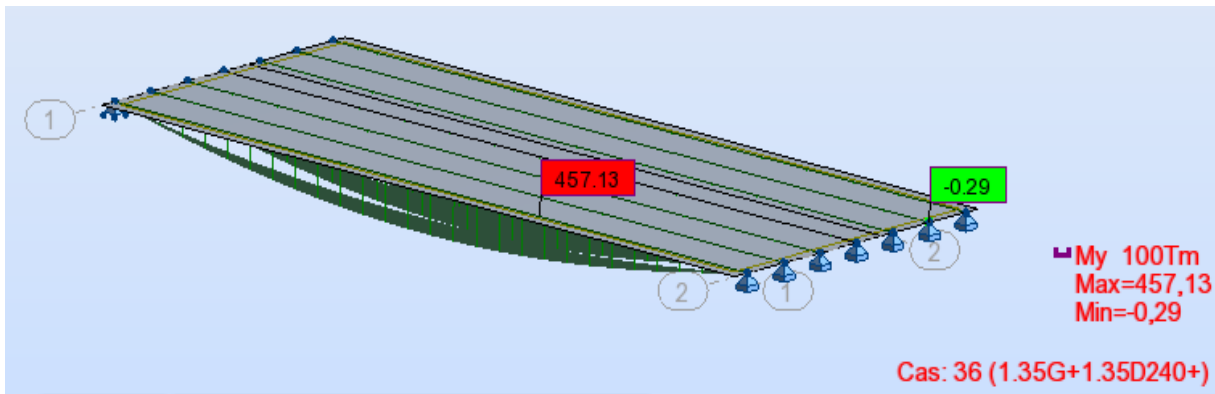
c) Le moment MAX sous combinaison [1.35G+1.6 (Bc+ ST)] :



d) Le moment MAX sous combinaison [1.35G+1.35 Mc120] :



e) Le moment MAX sous combinaison [1.35G+1.35 D240] :



Remarque :

En faire la même chose pour la combinaison à L'ELS.

4. DISCUSSIONS DES RESULTATS POUR LES DEUX METHODES :

D'après les résultats analytique et numérique on trouve un pourcentage d'erreur de :

➤ **Moment fléchissant :**

combinaison	Analytique	Numérique	Pourcentage(%)
1,35G +1,35 D240	493.47	457.13	7
G +D240	365.54	338.61	7

Tableau VI.11 : pourcentage d'erreur du moment fléchissant

➤ **L'effort tranchant :**

combinaison	Analytique	Numérique	Pourcentage(%)
1,35G +1,35 D240	84.26	77.75	8
G +D240	62.42	57.59	8

Tableau VI.12 : pourcentage d'erreur de l'effort tranchant

Dans ce cas de comparaison nous remarquons que les deux méthodes donnent presque la même valeur de moment et de l'effort tranchant maximale du tablier.

5. COCLUSION :

Nous constatons que l'écart max entre les deux méthodes est inférieur à 10%. De ce fait la méthode des éléments finis donne des résultats qui convergent mieux vers la solution analytique (GUYON-MASSONNET).

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Ce mémoire de master a pour but de déterminer la réponse d'un tablier de pont à poutres modélisé par une plaque mince (théorie de Love Kirchhoff) sous le passage d'une charge roulantes. et aussi la deuxième partie qui concerne la comparaison entre deux méthodes (analytiques et numériques) pour le calcul des efforts transversales dans un pont à poutres multiples.

Pour terminer, ce travail montre quelques points des résultats :

- Les résultats de l'analyse temporelle montre que le choix de la méthode d'intégration directe n'a pas d'influence sur la réponse du tablier. La réponse du tablier est importante lorsque la charge est excentrée. Il y a aussi une proportionnalité entre la vitesse du véhicule et la réponse du tablier. Effectivement, la modélisation du véhicule par une charge ponctuelle donne des amplitudes plus importantes qu'un chargement par essieux.
- Les méthodes analytiques permettent de réaliser un pré dimensionnement des structures à Poutres et à dalle.
- La méthode de Massonnet est simple à utiliser grâce aux différentes tables permettant de calculer les coefficients de répartitions transversales.
- La méthode des éléments finis est une étude de simulation robuste utilisée par les logiciels de calcul des structures
- Les premiers calculs de ponts multi poutres à entretoises utilisant la M.E.F. nécessitent la traduction géométrique de l'ouvrage en grillage de poutres comportant la raideur de la dalle.
- Dans Le calcul des ponts (grillage de poutre...) le logiciel Robot, a donné des résultats qui convergent mieux vers la solution analytique (GUYON-MASSONNET).

REFERENCES

- [1] **MASSONNET CHARLES et BARES RICHARD** « le calcul des grillage de poutre et dalle orthotropes selon la méthode de GUYON-MASSONNET-BARES » DUNOD.PARIS, 1966.424P
- [2] **M.NORINE ABDERAHMANE TURKI** « répartition transversal des efforts dans les tabliers des ponts» ISBA.TP
- [3] **Mr. RESPLENDINO JACQUES** « démonstration et exemple de calcul »
- [4] **YANNICK SIEFFERT** « l'entretroisement des ponts mixtes multi poutre ferroviaires » Thèse INSA de Lyon 2004
- [5] **ALEXANDRE ERN** « Aide –mémoire éléments finis » Dunod, PARIS, 2005.
- [6] **ROCKET LENNETH, ROYEVANS, WILIAM, GRIFITHS et DAVID NETHEROCOT** «Introduction à la méthode des éléments finis, Eyrolles PARIS 1979
- [7] **MASSONNET** « contribution à calcul des ponts à poutre multiples » Annales des travaux publics Belgique 1950, pp.377-422.
- [8] **GUYON.Y** « calcul des ponts larges à poutre multiple solidarisée par des entretoises » Annales des ponts et chaussées de France, 1946, PP.553-612
- [9] **Mr. DOUBRERE JEAN-CLAUDE** « Resistance des matériaux »
- [10] **COURBON JEAN** « plaque minces élastique » Eyrolles Edition .1980
- [11] **B.BOUA et N.HEMAIDI ZOURGUI** « formation Autodesk ROBOT Structural Analyses » CTPP. Mars 2012
- [12] **B.BOUA** «Magister MODELISATION NUMERIQUE D'UNE CHARGE ROULANTE SUR UN TABLIER DE PONT DALLE»ENSTP .2010
- [13] fascicule61 titre II « PROGRAMMES DE CHARGES ET ÉPREUVES DES PONTS-ROUTES »

ANNEXES

LES TABLEAUX DE GUYON-MASSONET UTILISEE :

Théta=0.75	Alfa=0=> K0								
y e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	-0,126	0,4719	1,0606	1,5732	1,8138	1,5732	1,0606	0,4719	-0,126
b/4	-0,4324	0,0588	0,5657	1,092	1,5732	1,814	1,5951	1,1305	0,6074
b/2	-0,4953	-0,1809	0,1589	0,5657	1,0606	1,5951	1,9919	2,0449	1,9577
3b/4	-0,4508	-0,3299	-0,1809	0,0588	0,4719	1,1305	2,0449	3,0841	4,0292
b	-0,3776	-0,4508	-0,4953	-0,4324	-0,126	0,6074	1,9577	4,0292	6,6762
Théta=0.75	Alfa=1=> K1								
y e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	0,667	0,8035	0,9869	1,2018	1,3294	1,2018	0,9869	0,8035	0,667
b/4	0,4351	0,549	0,711	0,9377	1,2018	1,3825	1,3128	1,1584	1,0233
b/2	0,2906	0,3804	0,5118	0,711	0,9869	1,3128	1,5717	1,5976	1,5456
3b/4	0,203	0,2741	0,3804	0,549	0,8035	1,1584	1,5976	2,0174	2,2628
b	0,1452	0,203	0,2906	0,4351	0,667	1,0233	1,5456	2,2628	3,1462

Théta=0.80	Alfa=0=> K0								
y e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	-0,2595	0,401	1,0595	1,6478	1,9348	1,6478	1,0595	0,401	-0,2595
b/4	-0,4898	0,0123	0,5394	1,1076	1,6478	1,9191	1,6383	1,0694	0,4362
b/2	-0,4719	-0,1844	0,1348	0,5394	1,0595	2	2,0526	2,0353	1,8428
3b/4	-0,353	-0,2834	-0,1844	0,0123	0,401	1,0694	2,0353	3,1419	4,1195
b	-0,2094	-0,353	-0,4719	-0,4898	-0,2595	0,4362	1,8428	4,1195	7,1154
Théta=0.80	Alfa=1=> K1								
y e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	0,6259	0,7738	0,9802	1,2308	1,3841	1,2308	0,9802	0,7738	0,6259
b/4	0,3923	0,5089	0,6812	0,9313	1,2308	1,4371	1,3426	1,1547	0,9971
b/2	0,2516	0,3389	0,472	0,6812	0,9802	1,3426	1,6305	1,6381	1,5588
3b/4	0,1695	0,2358	0,3389	0,5089	0,7738	1,1547	1,6381	2,1023	2,3534
b	0,1177	0,1695	0,2516	0,3923	0,6259	0,9971	1,5588	2,3534	3,3539

Théta=0.76	Alfa=0=> K0								
y e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	-0.1527	0.45772	1.06038	1.58812	1.838	1.58812	1.06038	0.45772	-0.1527
b/4	-0.4438	0.0495	0.56044	1.09512	1.58812	1.83502	1.60374	1.11828	0.57316
b/2	-0.4906	-0.1816	0.15408	0.56044	1.06038	1.60374	2.00404	2.04298	1.93472
3b/4	-0.4312	-0.3206	-0.1816	0.0495	0.45772	1.11828	2.04298	3.09566	4.04726
b	-0.3439	-0.4312	-0.4906	-0.44388	-0.1527	0.57316	1.93472	4.04726	6.76404

Théta=0.76	Alfa=0=> K1								
y e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	-0.1527	0.45772	1.06038	1.58812	1.838	1.58812	1.06038	0.45772	-0.1527
b/4	-0.4438	0.0495	0.56044	1.09512	1.58812	1.83502	1.60374	1.11828	0.57316
b/2	-0.4906	-0.1816	0.15408	0.56044	1.06038	1.60374	2.00404	2.04298	1.93472
3b/4	-0.4312	-0.3206	-0.1816	0.0495	0.45772	1.11828	2.04298	3.09566	4.04726
b	-0.34396	-0.4312	-0.49062	-0.4438	-0.1527	0.57316	1.93472	4.04726	6.76404

Théta=0.76	Alfa=0=> K0.15								
y e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	0,084252	0,55695	1,03853	1,47700	1,69268	1,47700	1,03853	0,55695	0,08425
b/4	-0,18971	0,19301	0,6026	1,04877	1,47700	1,70607	1,52052	1,12977	0,70307
b/2	-0,26478	-0,01991	0,25620	0,60266	1,03853	1,52052	1,88123	1,91529	1,82186
3b/4	-0,24799	-0,149184	-0,01991	0,1930121	0,5569532	1,12977	1,915294	2,78576	3,5314
b	-0,20273	-0,24799	-0,26478	-0,189717	0,0842521	0,70307	1,82186	3,53148	5,7197

ϵ' pour $\theta = 0,76$

Théta=0.76	Alfa=0,15								
y e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	-0,0211	0,0574665	0,143388	0,252502	0,40101482	0,2525338	0,143388	0,0574665	-0,021094
b/4	-0,0597	0,008075	0,069638	0,147942	0,25382065	0,4021469	0,255311	0,1663311	0,07904781
b/2	-0,0668	-0,023362	0,023311	0,073553	0,14947116	0,2611610	0,359928	0,3149366	0,27043823
3b/4	-0,0581	-0,041962	-0,021412	0,012886	0,075176	0,1746941	0,322529	0,5096439	0,57626018
b	-0,0446	-0,05408	-0,059182	-0,04896	-0,004169	0,063900	0,298053	0,5979783	0,99167665

Thêta=0.76	Alfa=0,15								
y e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	-0,0211	0,05746658	0,14338872	0,2525028	0,4010148	0,2525338	0,1433887	0,0574665	-0,021094
0,298b	-0,06110	0,00203951	0,06074395	0,1336594	0,2337855	0,3750776	0,2753982	0,1948634	0,115794
0,596b	-0,06347	-0,0305048	0,00613758	0,0502574	0,1209421	0,2279577	0,3455673	0,3897042	0,3878738
0,894b	-0,0503	-0,0489422	-0,0431681	-0,022741	0,0294732	0,1108768	0,3084308	0,5605245	0,8155400