

VIBRATIONS EXTENSIONNELLES DES PLAQUES MINCES RECTANGULAIRES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS D'ORDRE VARIABLE

Par

Abderrahim HOUMAT

PhD Université de Californie

Enseignant à l'Institut de Génie Civil, Université de Tlemcen

Résumé

Cet article présente un élément fini rectangulaire avec des degrés de liberté variables pour l'analyse des vibrations extensionnelles des plaques minces rectangulaires. Les déplacements à l'intérieur de l'élément sont décrits par un nombre fixe de termes polynômiaux plus un nombre variable de termes trigonométriques. Les déplacements des nœuds et les amplitudes des fonctions trigonométriques sont utilisés comme coordonnées généralisées. La compatibilité entre éléments est accomplie en égalant les coordonnées généralisées aux nœuds et aux côtés des éléments. Les fréquences correspondant aux trois premiers modes extensionnels symétriques-symétriques, symétriques-antisymétriques, et antisymétriques-antisymétriques d'une plaque libre de forme carrée sont calculées et sont comparées avec des résultats analytiques connus et avec des résultats utilisant un élément fini isoparamétrique quadratique. Les comparaisons avec l'élément isoparamétrique quadratique montrent que l'élément d'ordre variable produit une meilleure précision avec moins de degrés de liberté. La méthode est utilisée pour calculer les fréquences correspondant aux huit premiers modes d'un mur voile à quatre ouvertures.

Mots clés : élément fini d'ordre variable - plaques minces rectangulaires - vibrations extensionnelles.

1 INTRODUCTION

Dans cet article, un élément fini rectangulaire avec des degrés de liberté variables est développé pour l'analyse des vibrations extensionnelles des plaques minces rectangulaires. Des éléments similaires ont été développés par Milsted et Hutchinson [1] pour l'analyse des vibrations des membranes et par Hutchinson et Benitou [2] pour l'analyse des

vibrations flexionnelles des plaques minces rectangulaires.

Plusieurs éléments finis à l'intérieur desquels les déplacements sont décrits par des termes polynômiaux seulement sont connus pour l'analyse des contraintes planes. Les premiers éléments sont : le triangle à déformation constante développé par Turner et al. [3], le triangle à déformation linéaire développé par Fraejes de Veubeke [4], et le rectangle à déplacement bilinéaire développé par Melosh [5]. D'autres éléments sont : le rectangle linéaire cubique développé par Barber [6] et les éléments isoparamétriques présentés par Irons [7].

Dans cet article, les déplacements à l'intérieur de l'élément sont décrits par un nombre fixe de termes polynômiaux similaires à ceux utilisés pour le rectangle à déplacement bilinéaire et un nombre variable de termes trigonométriques similaires à ceux utilisés par Milsted et Hutchinson [1] pour le déplacement transversal de la membrane à l'intérieur de l'élément. Un second groupe de coordonnées généralisées est choisi pour satisfaire la compatibilité entre éléments. Les termes polynômiaux sont utilisés pour définir les déplacements des nœuds et les termes trigonométriques sont utilisés pour définir les déplacements aux côtés et à l'intérieur de l'élément. Une transformation non couplée des coordonnées du système original au nouveau système est exigée. Le procédé de solution consiste à former les matrices de rigidité, masse et de transformation de l'élément. Les matrices de rigidité et masse de l'élément sont alors transformées au nouveau système de coordonnées généralisées puis assemblées dans les matrices de rigidité et masse globales. Le problème standard de valeurs propres résultant est alors résolu et les fréquences sont obtenues.

Les fréquences correspondant aux trois premiers modes extensionnels symétriques-symétriques, symétriques-antisymétriques et antisymétriques-antisymétriques d'une plaque libre de forme carrée sont calculées et sont comparées avec des résultats analytiques connus et avec des résultats obtenus par la méthode des éléments finis utilisant un élément isoparamétrique quadratique. La méthode est aussi utilisée pour calculer les fréquences correspondant aux huit premiers modes d'un mur voile à quatre ouvertures. La formulation de l'élément développé dans cet article n'est pas limitée à un élément rectangulaire mais peut être facilement généralisée pour un élément quadrilatéral.

2 FORMULATION

La figure 1 montre un élément rectangulaire d'épaisseur e . Les coordonnées sans dimension ξ et η sont définies comme suit :

$$\xi = \frac{x}{a} \quad (1)$$

$$\eta = \frac{y}{b} \quad (2)$$

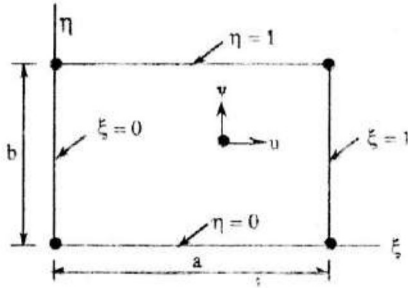


Figure 1 : Coordonnées et dimensions de l'élément.

Les déplacements à l'intérieur de cet élément sont des translations dans le plan x - y .

Donc :

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Les fonctions de déplacements supposées pour cet élément sont :

$$u = q_1 + q_2\xi + q_3\eta + q_4\xi\eta + q_{m1} \sin\alpha_m\xi + q_{m2}\eta \sin\alpha_m\xi + q_{n1} \sin\alpha_n\eta + q_{n2}\xi \sin\alpha_n\eta + q_{mn1} \sin\alpha_m\xi \sin\alpha_n\eta \quad (4)$$

$$v = q_5 + q_6\xi + q_7\eta + q_8\xi\eta + q_{m3} \sin\alpha_m\xi + q_{m4}\eta \sin\alpha_m\xi + q_{n3} \sin\alpha_n\eta + q_{n4}\xi \sin\alpha_n\eta + q_{mn2} \sin\alpha_m\xi \sin\alpha_n\eta \quad (5)$$

où :

$$\alpha_m = m\pi \quad ; \quad m = 1, 2, \dots, NX \quad (6)$$

$$\alpha_n = n\pi \quad ; \quad n = 1, 2, \dots, NY \quad (7)$$

\mathbf{u} peut être écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}\mathbf{q} \quad (8)$$

où :

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha_m\xi & \eta \sin\alpha_m\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & \sin\alpha_n\eta & \xi \sin\alpha_n\eta \\ \sin\alpha_n\eta & \xi \sin\alpha_n\eta & 0 & 0 & \sin\alpha_m\xi & \eta \sin\alpha_m\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\alpha_n\eta & \xi \sin\alpha_n\eta & 0 & \sin\alpha_m\xi & \eta \sin\alpha_m\xi \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{q}^T = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_{m1} \ q_{m2} \ q_{m3} \ q_{m4} \ q_{n1} \ q_{n2} \ q_{n3} \ q_{n4} \ q_{mn1} \ q_{mn2}\} \quad (10)$$

Les indices sont définis comme suit :

$$m1 = 4m + 5 \quad (11)$$

$$m2 = m1 + 1 \quad (12)$$

$$m3 = m1 + 2 \quad (13)$$

$$m4 = m1 + 3 \quad (14)$$

$$n1 = 4(n + NX) + 5 \quad (15)$$

$$n2 = n1 + 1 \quad (16)$$

$$n3 = n1 + 2 \quad (17)$$

$$n4 = n1 + 3 \quad (18)$$

$$mn1 = 4(2 + NX + NY) + 2(m-1)NY + 2n-1 \quad (19)$$

$$mn2 = mn1 + 1 \quad (20)$$

L'opérateur différentiel linéaire \mathbf{d} est défini comme suit :

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (21)$$

En appliquant l'opérateur \mathbf{d} au vecteur \mathbf{u} , une matrice \mathbf{h} est obtenue de sorte que :

$$\mathbf{h} = \mathbf{d}\mathbf{g} \quad (22)$$

La matrice de rigidité \mathbf{K}_q et la matrice masse \mathbf{M}_q de l'élément sont exprimées dans le système de coordonnées q comme suit :

$$\mathbf{K}_q = abe \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{h}^T \mathbf{C} \mathbf{h} d\xi d\eta \quad (23)$$

$$\mathbf{M}_q = \rho abe \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{g}^T \mathbf{g} d\xi d\eta \quad (24)$$

□ Modes symétriques-antisymétriques :

$$\begin{aligned} u(x,0) \neq 0 ; v(x,0) &= 0 \\ u(0,y) \neq 0 ; v(0,y) &= 0 \\ u(0,0) \neq 0 ; v(0,0) &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Les valeurs des paramètres de fréquence Ω correspondant aux trois premiers modes extensionnels sont calculées. Elles sont données dans les tableaux 1, 2, et 3 et sont comparées avec des résultats utilisant un éléments fini isoparamétrique quadratique et avec des résultats analytiques obtenus par Zillmer [8] en utilisant la théorie d'élasticité tridimensionnelle. La méthode développée par Zillmer consiste à combiner des solutions exactes des équations différentielles en trois séries doubles qui satisfont les conditions aux limites correspondantes aux contraintes de cisaillement. Les conditions aux limites correspondantes aux contraintes normales sont satisfaites par orthogonalisation sur la frontière. Le paramètre de fréquence Ω est défini comme étant le rapport de la fréquence naturelle ω à la vitesse d'onde de cisaillement. Les figures 3(a), (b), (c) et (d) illustrent les modélisations correspondant aux différentes solutions. Dans le cas de la méthode des éléments finis d'ordre variable appliquée à ce problème, un seul élément est utilisé pour modéliser un quart de la plaque et les nombres de termes trigonométriques NX et NY sont variés. Par exemple, la figure 3(a) montre qu'un seul élément est utilisé dans un quart de la plaque et NX = NY = 3.

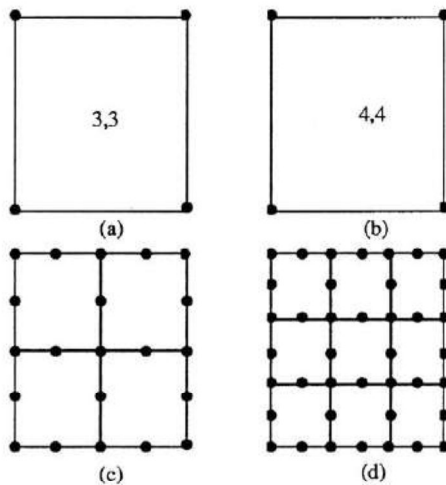


Figure 3 : Modélisations d'un quart de la plaque. (a) et (b) : Modélisation par éléments finis d'ordre variable. Les nombres à l'intérieur de l'élément indiquent respectivement les nombres de termes trigonométriques NX et NY. (c) et (d) : Modélisation par éléments isoparamétriques quadratiques.

Les comparaisons des résultats des tableaux 1, 2, et 3 montrent qu'en utilisant un seul élément et en variant les nombres de termes trigonométriques, les résultats de la méthode des éléments finis d'ordre variable convergent rapidement vers les résultats analytiques avec moins de degrés de liberté que la méthode des éléments finis. Le temps de calcul exigé pour la formation des matrices de rigidité et masse de l'élément fini d'ordre variable peut être largement réduit si la multiplication par les zéros se trou-

Ω	(a) (50)	(b) (72)	(c) (42)	(d) (80)	Référence [8]
1	3.9270	3.9241	3.9287	3.9237	3.9225
2	7.3239	7.2933	7.4190	7.3062	7.3084
3	8.9413	8.8989	8.9634	8.9002	8.8953

Tableau 1 : Paramètres de fréquence Ω correspondant aux trois premiers modes extensionnels symétriques-symétriques de la plaque. (a), (b), (c) et (d) se réfèrent aux modélisations de la figure 3. Les nombres entre parenthèses indiquent les nombres de degrés de liberté.

Ω	(a) (50)	(b) (72)	(c) (42)	(d) (80)	Référence [8]
1	4.1888	4.1808	4.1885	4.1802	4.1853
2	6.3197	6.3018	6.3297	6.3010	6.3037
3	8.4555	8.4278	8.5812	8.4418	8.4254

Tableau 2 : Paramètres de fréquence Ω correspondant aux trois premiers modes extensionnels symétriques-antisymétriques de la plaque.

Ω	(a) (50)	(b) (72)	(c) (42)	(d) (80)	Référence [8]
1	4.4462	4.4441	4.4451	4.4433	4.4485
2	5.0565	5.0520	5.0553	5.0506	5.0644
3	5.8392	5.8373	5.8393	5.8365	5.8354

Tableau 3 : Paramètres de fréquence Ω correspondant aux trois premiers modes extensionnels antisymétriques-antisymétriques de la plaque.

vant en dehors des blocs 4 par 4 et 2 par 2 de la matrice de transformation T est négligée lorsque les matrices de l'élément sont transformées du système original de coordonnées généralisées au nouveau système. Les tableaux 1, 2, et 3 montrent que quelques paramètres de fréquence obtenus par la méthode des éléments finis d'ordre variable et la méthode des éléments finis convergent vers des valeurs légèrement plus petites que les valeurs analytiques. Une des raisons peut être que la méthode analytique utilise la théorie d'élasticité tridimensionnelle qui tient compte de l'effet de l'épaisseur de la plaque alors que la théorie utilisée est la théorie des contraintes planes qui néglige cet effet.

La méthode des éléments finis d'ordre variable est appliquée à l'analyse des vibrations d'un mur voile à quatre ouvertures. La figure 4(a) montre la forme et les dimensions du mur. Les propriétés du matériau de cette structure sont $E/\rho = 10^4$ et $\nu = 0.2$. Brebbia et al. [9] ont résolu ce problème par la méthode des éléments finis utilisant un élément rectangulaire à déplacement bilinéaire. Les figures 4 (b) et (c) illustrent les modélisations des différentes solutions. Les valeurs des paramètres de fréquence Ω correspondant aux huit premiers modes sont données dans le tableau 4. Les comparaisons des résultats du tableau 4 montrent que les valeurs obtenues par la méthode des élé-

ments finis d'ordre variable sont les limites inférieures de celles obtenues par la méthode des éléments finis et par conséquent sont plus précises. Le même tableau montre que la méthode des éléments finis d'ordre variable exige moins d'éléments et par conséquent moins de degrés de liberté que la méthode des éléments finis. Ceci conduit automatiquement à une économie importante du temps de calcul.

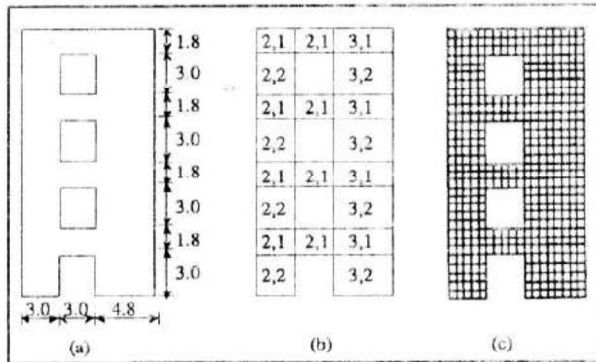


Figure 4 : Géométrie et modélisations du mur voile.
 (a) Géométrie.
 (b) Modélisation par éléments finis d'ordre variable. Les nombres à l'intérieur de l'élément indiquent respectivement les nombres de termes trigonométriques NX et NY.
 (c) Modélisation par éléments rectangulaires à déplacement bilinéaire.

Ω	1	2	3	4	5	6	7	8
(b) (408)	0.0298	0.1011	0.1058	0.1833	0.2161	0.2755	0.3065	0.3296
(c) (1088)	0.0321	0.1100	0.1181	0.1850	0.2380	0.2846	0.3080	0.3439

Tableau 4 : Paramètres de fréquence Ω correspondant aux huit premiers modes du mur voile. (b) et (c) se réfèrent aux modélisations de la figure 4. Les nombres entre parenthèses indiquent les nombres de degrés de liberté.

4 CONCLUSION

L'élément fini d'ordre variable présenté dans cet article est utilisé pour l'analyse des vibrations extensionnelles des plaques minces rectangulaires. La formulation peut être légèrement modifiée pour être généralisée à un élément quadrilatéral. L'analyse d'une plaque libre de forme carrée montre que les résultats obtenus par la méthode des éléments finis d'ordre variable convergent rapidement vers des

valeurs extrêmement précises avec moins d'éléments et par conséquent moins de degrés de liberté que la méthode des éléments finis utilisant un élément isoparamétrique quadratique. La méthode est appliquée à l'analyse des vibrations d'un mur voile à quatre ouvertures. L'avantage principal de cette méthode vis-à-vis de la méthode des éléments finis est que le nombre de degrés de liberté peut être varié sans que le nombre d'éléments soit changé et que les résultats correspondant aux modes supérieurs sont plus précis **□**

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.G. Milsted et J.R. Hutchinson : "Use of trigonometric terms in the finite element method with application to vibrating membranes". Journal of Sound and Vibration, Vol. 32, No. 3, 1974.
- [2] J.R. Hutchinson et J.J. Benitou : "Variable order finite elements for plate vibration". Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 103, No. EM5, 1977.
- [3] M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin et L.J. Topp : "Stiffness and deflection analysis of complex structures". Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 23, No. 9, 1956.
- [4] B. Fraeijis de Veubeke : "Displacement and equilibrium models in the finite element method". Chapitre 9 de Stress Analysis, Edition O.C. Zienkiewicz et G.S. Hollister, Wiley, New York, 1965.
- [5] R.J. Melosh : "Basis of derivation of matrices for the direct stiffness method". AIAA Journal, Vol. 1, No. 7, 1963.
- [6] R.B. Barber : "Refined rectangular finite element for plane stress analysis". Thèse d'ingénieur, Département de Génie Civil, Stanford University, 1970.
- [7] B.M. Irons : "Engineering applications of numerical integration in stiffness methods". AIAA Journal, Vol. 4, No. 11, 1966.
- [8] S.D. Zillmer : "Vibrations of a free rectangular parallelepiped". Thèse de Master en Génie Civil, University of California, Davis, 1981.
- [9] C.A. Brebbia, J.C.F. Telles et L.C. Wrobel : "Boundary element techniques : theory and application in engineering". Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1984.