

# GAUCHISSEMENT SECONDAIRE DANS LES PROFILS OUVERTS

Par

Naceur Eddine HANNACHI

Docteur es Sciences, Maître de Conférences à l'Université de Tizi-Ouzou

## Résumé

Cet article permet d'assimiler un phénomène complexe rencontré dans des poutres à sections minces ouvertes : "Le gauchissement secondaire". On peut ainsi calculer les contraintes (non négligeables) issues de ce phénomène généralement présent dans les sections minces ouvertes sollicitées en torsion.

Mots clés : torsion - gauchissement - sections minces.

## 1 INTRODUCTION

Des expérimentations réalisées sur des poutres en béton armé soumises à la torsion [1], mettent en évidence l'existence d'un gradient de déformation longitudinale dans l'épaisseur des profils ouverts.

Ces constatations ont d'ailleurs été faites par Krpan [2], Hwang et Hsu [3] sans toutefois être expliquées physiquement ou modélisées pour permettre le calcul de ce gradient.

Celui-ci, provient d'un phénomène de "gauchissement secondaire" (peu familier aux ingénieurs) qui peut être expliqué de façon concise ci-après.

## 2 THEORIE DU GAUCHISSEMENT SECONDAIRE

### 2.1 Rappel : Expression des contraintes normales de gauchissement gêné dans un profil mince

Le raisonnement est aussi valable dans le feuillet moyen d'un profil d'épaisseur non négligeable.

Un point quelconque P du profil dans la section d'abscisse z devient P' dans la section d'abscisse z + dz qui subit une rotation dθ<sub>1</sub> par rapport à la section z (il s'agit du terme θ<sub>1</sub> de la rotation associé au bi-moment B). Le déplacement de P' par rapport à P dans le plan des sections droites (Figure 1) est défini

par ses deux composantes parallèles à la tangente et à la normale au profil en P, respectivement :

$$\begin{cases} da(s) = r_t(s) \cdot d\theta_1 \\ db(s) = -r_n(s) \cdot d\theta_1 \end{cases}$$

r<sub>t</sub> et r<sub>n</sub> étant les distances de la tangente et de la normale en P au centre de torsion T.

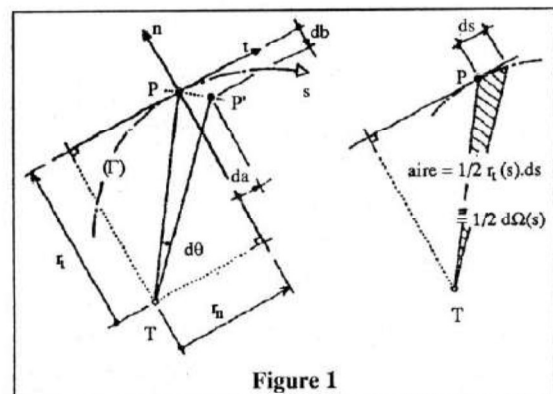


Figure 1

La distorsion γ<sub>zs</sub> du feuillet moyen associée à la rotation θ<sub>1</sub> doit être nulle. En projection sur le plan tangent au profil au point P (Figure 2a) ceci se traduit par l'équation :

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial w_c}{\partial s} + \frac{\partial a}{\partial z} = 0$$

En exprimant le déplacement ∂a à partir de l'expression établie plus haut, on calcule le déplacement w<sub>c</sub> de gauchissement

$$\frac{\partial w_c}{\partial s} = -r_t(s) \cdot \frac{d\theta_1}{dz}$$

$$w_c(s) = -\frac{d\theta_1}{dz} \cdot \int r_t(\zeta) \cdot d\zeta = -\frac{d\theta_1}{dz} \cdot \Omega(s)$$

Si le gauchissement est empêché, il apparaît des contraintes normales :

$$\sigma_c(s) = -E \frac{\partial w_c}{\partial z} = E \cdot \Omega(s) \cdot \frac{d^2\theta_1}{dz^2}$$

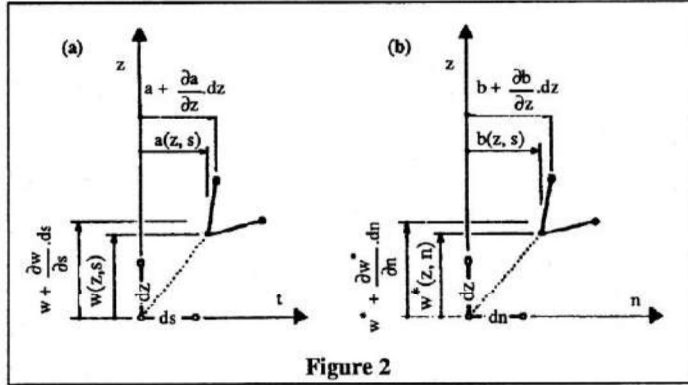


Figure 2

## 2.2 Gauchissement gêné dans l'épaisseur d'un profil non infiniment mince

En un point quelconque du profil, repéré par l'abscisse  $s$  du point  $P$  du feuillet moyen et l'abscisse  $u$  sur la normale  $Pn$ , le déplacement longitudinal de gauchissement peut s'écrire :

$$w_c(s, u) = w_c(s) + w_c^*(s, u)$$

Le premier terme étant le gauchissement "général", c'est-à-dire celui du feuillet moyen étudié en 1, et le second étant le "gauchissement secondaire"  $w_c^*$  dans l'épaisseur du profil.

Par un raisonnement analogue au précédent, on écrit que pour le supplément de déplacement  $w_c^*$ , la distorsion  $\gamma$  doit être nulle dans le plan parallèle à  $z$  et perpendiculaire au feuillet moyen (Figure 2b) :

$$\gamma_{zn}^* = \frac{\partial w_c^*}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial z} = 0$$

A partir de l'expression du déplacement  $db$  établie plus haut, on calcule le gauchissement secondaire  $w_c^*$ , sachant qu'il doit s'annuler dans le feuillet moyen ( $u = 0$ ) :

$$\frac{\partial w_c^*}{\partial u} = r_n(s) \cdot \frac{d\theta_1}{dz}$$

$$w_c^*(s, u) = r_n(s) \cdot \frac{d\theta_1}{dz} \cdot u$$

Si le gauchissement est empêché, aux contraintes  $\sigma_c(s)$  uniformes dans l'épaisseur s'ajoutent les contraintes normales de gauchissement secondaire gêné :

$$\sigma_c^*(s, u) = -E \cdot \frac{\partial w_c^*}{\partial z} = -E \cdot r_n(s) \cdot u \cdot \frac{d^2\theta_1}{dz^2}$$

qui varient linéairement dans l'épaisseur.

A ces contraintes normales sont associées des contraintes de cisaillement secondaire  $\tau_c^*$  qui, dans la section droite, sont perpendiculaires à la ligne moyenne ( $\Gamma$ ) du profil. En écrivant l'équilibre d'un petit parallélépipède de côtés  $dz$ ,  $ds$ ,  $du$ , on obtient l'équation :

$$\frac{\partial \sigma_c^*}{\partial z} + \frac{\partial \tau_c^*}{\partial u} = 0$$

$$\text{D'où } \frac{\partial \tau_c^*(s, u)}{\partial u} = E \cdot r_n(s) \cdot \frac{d^3\theta_1}{dz^3} \cdot u$$

La contrainte de cisaillement doit s'annuler à la surface du profil soit pour  $u = \pm t/2$ ,  $t$  étant l'épaisseur. Par suite :

$$\tau_c^*(s, u) = E \cdot \frac{d^3\theta_1}{dz^3} \cdot \frac{r_n(s)}{2} \cdot (u^2 - \frac{t(s)^2}{4})$$

contraintes varient paraboliquement dans l'épaisseur.

En toute rigueur, le phénomène de gauchissement secondaire modifie l'inertie de gauchissement  $K_1$  et la part du couple  $C_2$  équilibrée par la gêne du gauchissement, les contraintes de cisaillement  $\tau_c^*$  équilibrant elles-mêmes un couple :

$$\begin{aligned} C^* &= - \int_{(\Gamma)} \left[ r_n(s) \cdot \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_c^*(s, u) \cdot du \right] \cdot ds \\ &= \frac{1}{12} E \frac{d^3\theta_1}{dz^3} \cdot \int_{(\Gamma)} r_n(s)^2 \cdot t(s)^3 \cdot ds \end{aligned}$$

On peut écrire aussi

$$C^* = EK_1^* \frac{d^3\theta_1}{dz^3}$$

D'où l'inertie de gauchissement secondaire  $K_1^*$  :

$$K_1^* = \frac{1}{12} \int r_n(s)^2 \cdot t(s)^3 \cdot ds \text{ (dimension } L^6)$$

### 3 GAUCHISSEMENT SECONDAIRE HORS DU DOMAINE LINEAIRE ET APRES FISSURATION

#### 3.1 Expressions générales

##### 3.1.1 Position de la ligne moyenne ( $\Gamma$ ) du profil

Pour un solide homogène et linéairement élastique, la ligne moyenne du profil, de point courant P à l'abscisse s, est située à mi-épaisseur. En béton armé, l'hétérogénéité due aux armatures apporte déjà une perturbation de la position de cette ligne moyenne. Plus généralement, hors du domaine linéaire, la ligne moyenne est définie comme le lieu du point Q (remplaçant le point P) origine des axes principaux Qtn, compte tenu de la variation du module de déformation E dans l'épaisseur du profil selon une équation analogue à :

$$\iint_{(S')} E_b(x, y) \cdot y \cdot ds' + \sum_i E_a(x_i, y_i) \cdot y_i \cdot A_i = 0$$

(S') étant l'aire comprimée de la section de béton (plus, le cas échéant, l'aire tendue mais non fissurée).  
A<sub>i</sub> : l'aire d'une armature de coordonnées (x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>).

La détermination "exacte" de la position de la ligne moyenne est inutile pour un profil mince. La question se pose pour les profils épais, particulièrement pour l'étude locale des déformations et des contraintes dues au gauchissement secondaire.

Pratiquement, la ligne moyenne ( $\Gamma$ ) ne peut être définie rigoureusement de façon continue avec l'abscisse s. On peut la définir par tronçons de longueur l<sub>i</sub> et d'épaisseur moyenne constante  $\bar{t}_i$  associés à chaque armature (ou groupe d'armatures) d'aire A<sub>i</sub> et d'abscisse s<sub>i</sub> :

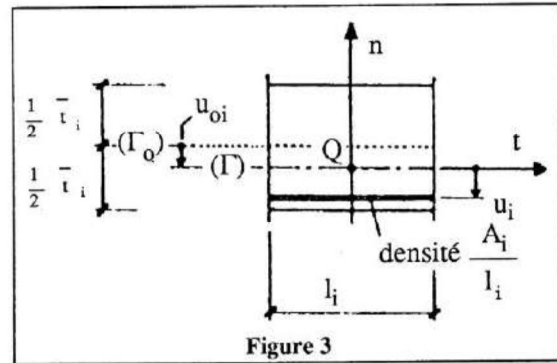
$$l_i = \frac{1}{2} (s_{i+1} - s_{i-1})$$

$$\bar{t}_i = \frac{1}{l_i} \int_{\frac{1}{2}(s_{i-1}+s_i)}^{\frac{1}{2}(s_i+s_{i+1})} t(s) \cdot ds$$

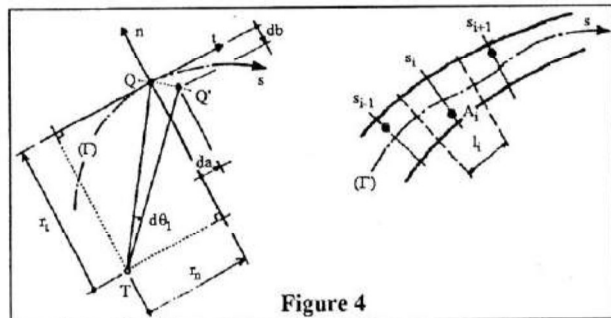
L'armature, distante de u<sub>i</sub> de la ligne moyenne ( $\Gamma$ ) est supposée répartie sur toute la longueur l<sub>i</sub> avec une densité A<sub>i</sub>/l<sub>i</sub> (Figure 3). L'origine des abscisses u dans l'épaisseur est prise en Q (axe Qn) ; ce point est à une distance u<sub>oi</sub> de la mi-épaisseur, c'est-à-dire de la ligne moyenne géométrique ( $\Gamma_0$ ) du béton, connue a priori. La distance u<sub>oi</sub> est déterminée par l'équation :

$$\int_{\frac{1}{2}(s_{i-1}+s_i)}^{\frac{1}{2}(s_i+s_{i+1})} \left[ \frac{1}{2}(\bar{t}_i - u_{oi}) E_b(s, u) \cdot u \cdot du + E_a(s_i, u_i) \cdot u_i \cdot \frac{A_i}{l_i} \right] ds = 0$$

Les modules E<sub>a</sub> et E<sub>b</sub> sont des modules sécants correspondants à l'état de contrainte totale due à l'ensemble des sollicitations (flexion composée, gauchissement général et gauchissement secondaire). Le module E<sub>b</sub> est nul si le béton est tendu et fissuré. Si on veut raisonner en déformations moyennes il faut, soit remplacer E<sub>a</sub> par le module fictif de l'acier E<sub>a</sub>, soit prendre un module fictif E<sub>b</sub> non nul dans la zone tendue et fissurée du béton.



La ligne moyenne ( $\Gamma$ ) étant ainsi définie et le centre de torsion T étant défini par les équations classiques, les distances r<sub>i</sub>(s) et r<sub>n</sub>(s) le sont aussi (Figure 4).



##### 3.1.2 Contraintes et déformations longitudinales de gauchissement secondaire gêné

Le déplacement longitudinal de gauchissement secondaire est :

$$w_c^*(s, u) = r_n(s) \cdot u \cdot \frac{d\theta_1}{dz}$$

S'il est gêné, il apparaît des déformations longitudinales :

$$\varepsilon_c^*(s, u) = -r_n(s) \cdot u \cdot \frac{d^2 \theta_1}{dz^2}$$

et des contraintes dans le béton et les armatures :

$$\begin{cases} \sigma_{c,b}(s, u) = -E_b(s, u) \cdot r_n(s) \cdot u \cdot \frac{d^2 \theta_1}{dz^2} \\ \sigma_{c,a}(s_i, u_i) = -E_a(s_i, u_i) \cdot r_n(s_i) \cdot u_i \cdot \frac{d^2 \theta_1}{dz^2} \end{cases}$$

### 3.1.3 Contraintes de cisaillement secondaires

On considère l'équilibre d'un élément de volume compris entre deux sections droites d'abscisses  $z$  et  $z + dz$ , deux abscisses du profil  $s$  et  $s + ds$ , l'abscisse  $u$  dans l'épaisseur et la face extérieure  $u = t/2 - u_0$  du profil (Figure 5). Il est soumis aux forces résultantes des contraintes normales  $\sigma_c^*$  :

$$F^*(z, s, u) = \left[ \int_u^{\frac{1}{2}(\bar{t}_i - u_a)} \sigma_{c,b}^*(s, \eta) d\eta + \alpha \cdot \sigma_{c,a}^*(s_i, u_i) \cdot \frac{A_i}{l_i} \right] ds$$

$$\text{avec } \begin{cases} \alpha = 1 \text{ si } -\frac{1}{2}(\bar{t}_i - u_{oi}) \leq u \leq u_i \\ \alpha = 0 \text{ si } u_i < u \leq -\frac{1}{2}(\bar{t}_i - u_{oi}) \end{cases}$$

et

$$F^*(z + dz, s, u) = F^* + \frac{\partial F^*}{\partial z} \cdot dz$$

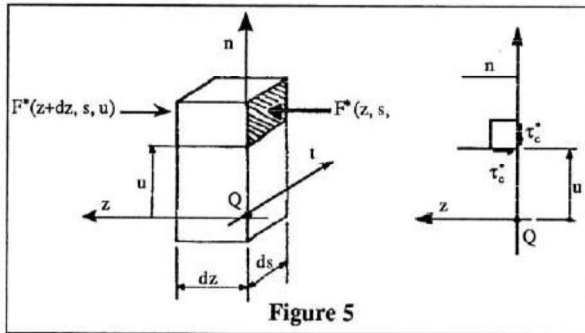


Figure 5

La différence de ces deux forces doit être équilibrée par la résultante des contraintes de cisaillement  $\tau_c^*$  agissant sur la facette  $dz \cdot ds$ , ces contraintes étant nulles sur la face extérieure du profil. Soit :

$$\frac{\partial F^*}{\partial z} \cdot dz = \tau_c^*(s, u) \cdot dz \cdot ds$$

Compte tenu de l'expression de  $\sigma_c^*$ , on écrit

$$\frac{\partial F^*}{\partial z} \cdot dz = \left[ -r_n(s) \cdot \frac{d^3 \theta_1}{dz^3} \int_u^{\frac{1}{2}(\bar{t}_i - u_a)} E_b(s, \eta) \eta \cdot d\eta + \alpha \cdot E_a(s_i, u_i) \frac{A_i}{l_i} \right] ds \cdot dz$$

Dans cette expression intervient la "rigidité statique secondaire" calculée pour une longueur unité du profil ( $ds = 1$ ) :

$$\overline{ES}^*(s, u) = \int_u^{\frac{1}{2}(\bar{t}_i - u_a)} E_b(s, \eta) \cdot \eta \cdot d\eta + \alpha \cdot E_a(s_i, u_i) \cdot u_i \cdot \frac{A_i}{l_i}$$

(qui a la dimension d'une force).

### 1.4 Couple de torsion secondaire et rigidité de gauchissement secondaire

Le couple résultant des contraintes  $\tau_c^*$  par rapport au centre de torsion  $T$  s'écrit :

$$C^* = - \int_{(T)} [r_n(s)^2 \cdot \int_{-\frac{1}{2}(\bar{t}_i - u_a)}^{\frac{1}{2}(\bar{t}_i - u_a)} \tau_c^*(s, u) \cdot u \cdot du] \cdot ds$$

$$= \frac{d^3 \theta_1}{dz^3} \cdot \int_{(T)} [r_n(s)^2 \cdot \int_{-\frac{1}{2}(\bar{t}_i - u_a)}^{\frac{1}{2}(\bar{t}_i - u_a)} \overline{ES}^*(s, u) \cdot du] \cdot ds$$

Par analogie avec la relation entre le couple de torsion sectoriel  $C_2$  et la rigidité de gauchissement  $\overline{EK}_1$ , on peut écrire

$$C^* = \overline{EK}_1^* \frac{d^3 \theta_1}{dz^3}$$

ce qui définit la "rigidité de gauchissement secondaire" :

$$\overline{EK}_1^* = \int_{(T)} [r_n(s)^2 \cdot \int_{-\frac{1}{2}(\bar{t}_i - u_a)}^{\frac{1}{2}(\bar{t}_i - u_a)} \overline{ES}^*(s, u) \cdot du] \cdot ds$$

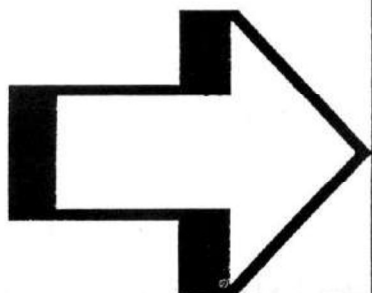
#### 4 CONCLUSION

Les recherches théoriques et expérimentales entreprises par l'auteur [1], montrent que la théorie de la torsion mixte des poutres à profil mince ouvert, peut être appliquée aux poutres en béton armé.

Toutefois cette théorie devra obligatoirement tenir compte du gauchissement secondaire sur l'épaisseur du profil, qui n'a pas d'effet sur l'équilibre d'ensemble, mais qui engendre des contraintes normales secondaires non négligeables ②

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] N.E Hannachi : "*Rigidités de gauchissement et torsion de poutres à profil mince ouvert avec fissuration de flexion*". Thèse de Doctorat d'Etat, Octobre 1989.
- [2] P. Krpan : "*The behaviour of open, thin-walled, restrained reinforced concrete members in torsion*". University of Toronto, Department of Civil Engineering, thèse de PhD octobre, 1974.
- [3] C.S. Hwang, T.T.C. Hsu : "*Mixed torsion analysis of reinforced concrete channel beams ; a Fourier Series approach*". ACI Journal, septembre/octobre 1983.



**DANS LE PROCHAIN NUMÉRO,**

**DU MÊME AUTEUR :**

**"LE CALCUL DE LA RIGIDITÉ**

**DE TORSION**

**EN ÉLASTICITÉ**

**NON LINÉAIRE"**