

ANALYSE DE LA VIBRATION DES PROBLEMES DE DEFORMATION PLANE PAR UNE METHODE DE FRONTIERE

Par

Abderrahim HOUMAT

PhD Université de Californie

Enseignant, Institut de Génie Civil Université de Tlemcen

Résumé

Une méthode de frontière est présentée pour l'analyse de la vibration libre des problèmes de déformation plane simplement raccordés et de formes et conditions aux limites arbitraires. Le problème est formulé en fonction d'une série de solutions exactes des équations différentielles résultantes en coordonnées polaires. Les conditions aux limites sont satisfaites en un nombre de points distincts répartis sur la frontière. Des résultats sont obtenus pour un barrage en terre dont la base est supposée parfaitement encastree dans un sol rigide et sont comparés avec des solutions obtenues par la méthode des éléments finis. Les comparaisons montrent que la méthode de frontière donne d'excellents résultats.

Mots clés : déformation plane - vibration libre - méthode de frontière.

1 INTRODUCTION

Dans cet article, l'analyse de la vibration libre des problèmes de déformation plane est formulée en fonction d'une série de solutions exactes des équations différentielles résultantes en coordonnées polaires. Pour la simplicité, les conditions aux limites sont satisfaites en des points distincts uniformément répartis sur la frontière. Un système d'équations homogènes est assemblé en considérant la contribution des points choisis aux conditions aux limites. Le procédé de solution est de chercher les zéros du déterminant d'une matrice dont les coefficients sont fonctions de la fréquence. Cette méthode était appliquée par Houmat et Hutchinson [1] au problème de vibration libre des corps de révolution.

Les résultats sont comparés avec des solutions obtenues par la méthode des éléments finis. L'analyse par éléments finis utilise un élément triangulaire isoparamétrique quadratique.

2 FORMULATION

Dans cette analyse tous les symboles sont sans dimension. Les déplacements : radial u et circonférenciel v , la coordonnée r , et les dimensions globales sont rendus sans dimension en les divisant par une dimension h choisie arbitrairement. Les contraintes sont rendues sans dimension en les divisant par le module de cisaillement. La fréquence ω est rendue sans dimension en la multipliant par h et en la divisant par la vitesse d'onde de cisaillement. Les nombres d'onde α et β sont rendus sans dimension en les multipliant par h . La dépendance du temps est supprimée en supposant que les déplacements varient sinusoïdalement avec le temps.

Le problème est formulé en fonction d'une série de solutions exactes des équations différentielles résultantes en coordonnées polaires. Les formes de ces solutions sont données dans le Tableau 1. Elles sont exprimées en fonction des fonctions de Bessel du premier genre J .

Deux conditions aux limites en un point P sur la frontière peuvent être spécifiées comme suit :

$$\text{Type I : } u = 0 \quad \text{ou} \quad T_r = 0 \quad (1)$$

$$\text{Type II : } w = 0 \quad \text{ou} \quad T_\theta = 0 \quad (2)$$

T_r et T_θ sont les composantes du vecteur de traction T au point P le long des directions : radiale r et circonférencielle θ respectivement, et sont données par :

$$T_r = \sigma_{rr} \cos \varphi + \tau_{r\theta} \sin \varphi \quad (3)$$

$$T_\theta = \tau_{r\theta} \cos \varphi + \sigma_{\theta\theta} \sin \varphi \quad (4)$$

φ est l'angle entre n le vecteur unitaire normal à la frontière au point P et l'axe r .

Dans ce qui suit, les conditions aux limites sont approchées en utilisant la Méthode de Frontière (M.F.).

Algerie EQUIPEMENT

	Forme 1	Forme 2
u	$\delta J_n'(\delta r) \begin{Bmatrix} \frac{\sin(n\theta)}{n} \\ \cos(n\theta) \end{Bmatrix}$	$\frac{1}{r} J_n(\beta r) \begin{Bmatrix} n \sin(n\theta) \\ -\cos(n\theta) \end{Bmatrix}$
v	$\frac{1}{r} J_0(\delta r) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ n \sin(n\theta) \end{Bmatrix}$	$\beta J_n'(\beta r) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \frac{\sin(n\theta)}{n} \end{Bmatrix}$
σ_r	$[-K\omega^2 J_n(\delta r) + 2\delta^2 J_n''(\delta r)] \begin{Bmatrix} \frac{\sin(n\theta)}{n} \\ \cos(n\theta) \end{Bmatrix}$	$\frac{2}{r} [\beta J_n'(\beta r) - \frac{1}{r} J_n(\beta r)] \begin{Bmatrix} n \sin(n\theta) \\ -\cos(n\theta) \end{Bmatrix}$
$\sigma_{\theta\theta}$	$[-K\omega^2 J_n(\delta r) + \frac{2}{r} \delta J_n'(\delta r) - \frac{2n^2}{r^2} J_n(\delta r)] \begin{Bmatrix} \frac{\sin(n\theta)}{n} \\ \cos(n\theta) \end{Bmatrix}$	$\frac{2}{r} [-\beta J_n'(\beta r) + \frac{1}{r} J_n(\beta r)] \begin{Bmatrix} n \sin(n\theta) \\ -\cos(n\theta) \end{Bmatrix}$
$\tau_{r\theta}$	$\frac{2}{r} [\delta J_n'(\delta r) - \frac{1}{r} J_n(\delta r)] \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ -n \sin(n\theta) \end{Bmatrix}$	$[\beta^2 J_n''(\beta r) - \frac{1}{r} \beta J_n'(\beta r) + \frac{n^2}{r^2} J_n(\beta r)] \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \frac{\sin(n\theta)}{n} \end{Bmatrix}$

Tableau 1 : Solutions des équations différentielles de déformation plane en coordonnées polaires. J_n indique la fonction de Bessel du premier genre. Les primes indiquent la différentiation par rapport à l'argument.

$$K = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

2.1 Méthode de Frontière (M. F.)

Dans cette méthode, les conditions aux limites sont exactement satisfaites en un nombre de points répartis sur la frontière. Les expressions de u , v , T_r et T_θ en fonction des coordonnées r et θ , du coefficient de Poisson ν et de la fréquence ω sont les suivantes :

$$u = E_n^1 A_n + H_n^1 B_n \quad (5)$$

$$v = E_n^2 A_n + H_n^2 B_n \quad (6)$$

$$T_r = E_n^3 A_n + H_n^3 B_n \quad (7)$$

$$T_\theta = E_n^4 A_n + H_n^4 B_n \quad (8)$$

Les coefficients E sont formés à partir de la forme 1 du Tableau 1, alors que les coefficients H sont formés à partir de la forme 2. A et B sont des constantes indéterminées. L'indice de sommation n est comme suit :

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots, NT \quad (9)$$

Les nombres d'onde α et β sont exprimés en fonction de la fréquence ω et du coefficient de Poisson ν comme suit :

$$\alpha^2 = \frac{(1-2\nu)\omega^2}{2(1-\nu)} \quad (10)$$

$$\beta^2 = \omega^2 \quad (11)$$

2.2 Procédé de solution

En satisfaisant les conditions aux limites en un nombre de points distincts répartis sur la frontière, deux équations homogènes de types I et II peuvent être écrites pour chaque point choisi. Un système d'équations homogènes est obtenu. Ces équations sont comme suit :

$$E_n^m A_n + H_n^m B_n = 0 \quad (12)$$

où m prend les deux valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Type I : } m &= 1 \text{ (pour } u = 0) \\ \text{ou } m &= 3 \text{ (pour } T_r = 0) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{Type II : } m &= 2 \text{ (pour } v = 0) \\ \text{ou } m &= 4 \text{ (pour } T_\theta = 0) \end{aligned} \quad (14)$$

Il y a deux équations pour chaque point choisi. Le nombre d'inconnus est égalé au nombre d'équations en choisissant un nombre approprié de termes NT . La forme finale peut être exprimée comme suit :

$$[\text{Matrice carrée}] \{ \text{Inconnues} \} = \{ 0 \} \quad (15)$$

Le nombre de points NP et l'ordre M de la matrice carrée sont comme suit :

$$\begin{aligned} NP &= NT \\ M &= 2NT \end{aligned} \quad (16)$$

Les coefficients de la matrice carrée dans l'équation (15) sont fonction de la fréquence ω et du coefficient de Poisson ν . Les fréquences sont, donc, déterminées en choisissant une valeur appropriée de ν et en cherchant la fréquence ω qui annule le déterminant de la matrice carrée. Après la détermination de la fréquence ω , le déplacement modal correspondant est déterminé en résolvant le système d'équations (15) pour les coefficients A et B et en remplaçant ces coefficients dans les expressions des déplacements u et v dans les équations (5) et (6).

3 RESULTATS

La figure 1 montre la forme et les dimensions du problème analysé. C'est un barrage en terre dont la base est supposée encastrée dans un sol rigide. La valeur du coefficient de Poisson ν est égale à 0,45.

Les résultats de la Méthode de Frontière (M.F) sont comparés avec des solutions obtenues par la Méthode des Eléments Finis (M.E.F) utilisant un élément triangulaire isoparamétrique quadratique. Des résultats pour deux nombres de points différents sont obtenus. A cause de la symétrie, les points sont répartis sur la moitié de la frontière, comme le montre la figure 1. Par conséquent, les modes appelés "pairs" et ceux appelés "impairs" sont obtenus séparément. Dans les modes "pairs" le déplacement radial u est une fonction paire de θ , alors que dans les modes "impairs" u est une fonction impaire de θ .

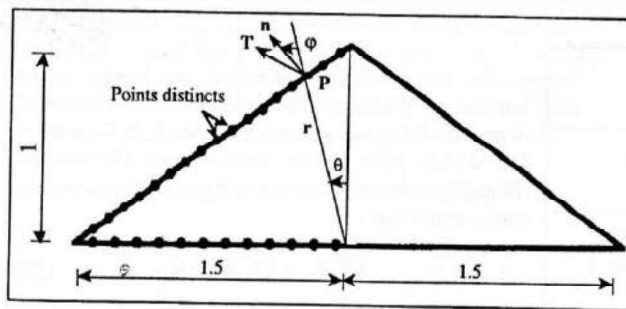


Figure 1 : Coordonnées et dimensions du barrage.

Dans les tableaux, NP indique le nombre de points utilisés dans la M.F et NE indique le nombre d'éléments finis utilisé dans la M.E.F. Les trois premières fréquences "paires" et "impaires" sont déterminées.

Les Tableaux 2 et 3 comparent les résultats de la M.F avec les solutions de la M.E.F. On peut remarquer que les résultats obtenus par les deux méthodes sont presque égaux pour les modes les plus bas. Ceci peut être expliqué par le fait que ces modes sont simples et peuvent être représentés par un élément fini quadratique. Par contre, les autres modes sont plus complexes et ne peuvent pas être représentés exactement par un élément quadratique. Dans ce cas, l'utilisation d'un élément de plus haute précision tel qu'un élément cubique est nécessaire pour obtenir de bons résultats.

	M.F		M.E.F
	NP = 20	NP = 24	NE = 50
1	2.330	2.330	2.330
2	4.331	4.329	4.370
3	5.503	5.503	5.520

Tableau 2 : Trois premières fréquences "paires" obtenues par la M.F et la M.E.F.

Les méthodes de frontière similaires à la méthode présentée dans cet article mais qui utilisent des formes de solutions en coordonnées cartésiennes peuvent engendrer

	M.F		M.E.F
	NP = 20	NP = 24	NE = 50
1	3.758	3.753	3.761
2	6.064	6.063	6.158
3	6.745	6.736	6.860

Tableau 3 : Trois premières fréquences "impaires" obtenues par la M.F et la M.E.F.

des fréquences fictives à cause de la séparation des modes. Ces fréquences peuvent être facilement reconnues et éliminées en examinant les modes de déplacements correspondants. La méthode de frontière présentée dans cet article ne produit pas de fréquences fictives puisque les formes de solutions utilisées sont en coordonnées polaires et ne permettent pas une séparation de modes.

4 CONCLUSION

La méthode de frontière présentée dans cet article donne d'excellents résultats pour les problèmes de déformation plane simplement raccordés et de formes et conditions aux limites arbitraires. La programmation de cette méthode est simple. L'utilisation du programme est aussi simple à cause du nombre très petit de données exigées. L'avantage principal de cette méthode vis-à-vis de la méthode des éléments finis est sa réduction de la dimension du problème en exigeant seulement une approximation sur la courbe qui définit la frontière. La réduction de la dimension du problème conduit automatiquement à une économie importante du temps de calcul. Cette méthode représente une excellente alternative aux méthodes des éléments finis et de frontière conventionnelle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Houmat A & Hutchinson J.R : "A Boundary Method for Free Vibration of Solids of Revolution". Japan U.S.A ; Boundary Element Symposium ; Ed. C.A Brebbia pp. 121-135, Springer-Verlag 1990.