

# MODELE D'ELEMENTS FINIS POUR LE CALCUL DU BATIMENT

Par

**Amar BOUBERGUIG**

ITC Seritec S.A., Le Mont-sur-Lausanne

## Résumé

L'auteur montre d'abord les nombreux problèmes soulevés lorsque l'on aborde le calcul statique d'un bâtiment de type "dalles, murs, colonnes" par la méthode classique consistant à isoler, à chaque niveau, la dalle correspondante, et à la subdiviser en éléments finis en substituant des appuis ponctuels fixes aux murs et colonnes.

Il évoque ensuite diverses méthodes de calcul mieux adaptées, en particulier la modélisation de l'ensemble de la structure du bâtiment à l'aide d'éléments "coques".

Il définit enfin un modèle spécialement développé "dalles, murs et colonnes", partant d'hypothèses simplificatrices, décomposition notamment des effets des charges horizontales et verticales. Il en précise les domaines d'emploi et donne quelques exemples d'application intégrant les interactions sol-structure et la mise en œuvre de la précontrainte.

**Mots clés :** bâtiment - méthode des éléments finis - éléments coques, dalles, murs, colonnes.

## 1 INTRODUCTION

Lorsqu'on aborde le calcul statique du bâtiment, la méthode classique consiste à isoler pour chaque étage la dalle correspondante, pour la subdiviser en éléments finis, en substituant aux colonnes et murs porteurs des appuis fixes (Figure 1).

Si ce modèle permet d'obtenir des résultats corrects sur une grande partie de la dalle, il pose par contre un certain nombre de problèmes, en particulier au droit des porteurs. En effet, si on considère le cas d'un mur, on peut en principe déterminer la réaction qu'il exerce sur la dalle de deux manières différentes : en répartissant le

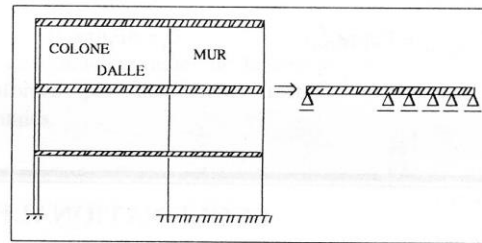


Figure 1 : Modèle statique pour l'analyse du bâtiment.

long de ce mur les réactions ponctuelles obtenues au droit des appuis fixes (Figure 1) ou en additionnant les efforts tranchants calculés dans la dalle de part et d'autre du même mur. Commençons par examiner ces deux méthodes ainsi que les conséquences qu'elles peuvent avoir sur la précision des résultats.

### 1.1 Réaction du mur déterminée à partir des efforts tranchants dans la dalle

Le calcul des efforts tranchants dépend de la théorie sur laquelle est basé l'élément fini de dalle. En effet, selon le modèle de Kirchhoff (théorie classique des dalles), la rotation de la section est égale à la pente de la déformée ( $\theta_x = \partial w / \partial y$ ,  $\theta_y = \partial w / \partial x$ ), alors que selon la théorie de Mindlin, le champ des rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  reste indépendant du champ des déplacements et par conséquent des pentes  $\partial w / \partial y$  et  $\partial w / \partial x$ . Ainsi, le long d'un mur situé au bord d'une dalle et parallèle à l'axe Y, on aurait selon Mindlin les conditions de bord suivantes :

$$w = 0 \quad (\theta_x \neq 0), \quad M_x = 0 \quad \text{et} \quad M_{xy} = 0 \quad (1)$$

et selon Kirchhoff :

$$w = 0, \quad \theta_x = 0 \quad \text{et} \quad M_x = 0 \quad (M_{xy} \neq 0) \quad (2)$$

Ceci entraîne des différences importantes dans le calcul des efforts tranchants et du moment de torsion dans les zones d'appui. Les figures 2 et 3(\*) mettent en évidence ces

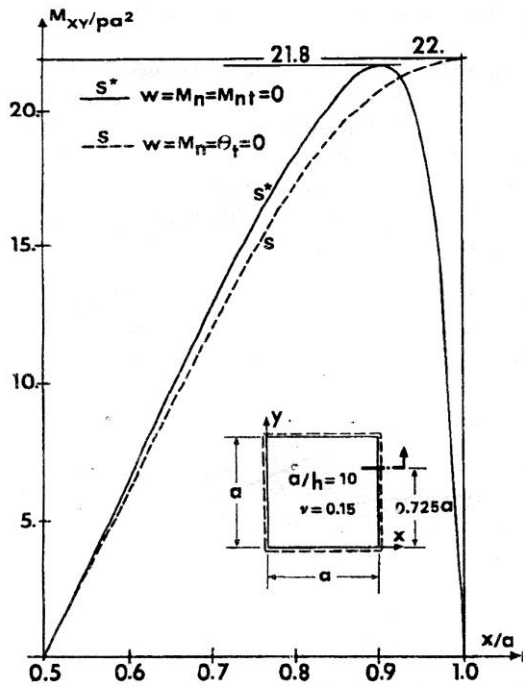


Figure 2 : Distribution des moments  $M_{xy}$  (multipliée par un facteur 1 000) le long de la ligne  $y/a = 0,725$  dans une dalle carrée simplement appuyée sur les quatre côtés et soumise à une charge uniforme. Conditions de bord le long de la ligne  $x = a$  :

$S^*$  :  $W, M_x$  et  $M_{xy} = 0$  (théorie de Mindlin),

$S$  :  $W, M_x$  et  $\theta_x = 0$  (théorie de Kirchhoff).



Figure 3 : Distribution des efforts tranchants  $Q_x$  (multipliée par un facteur 10) le long de la ligne  $y/a = 0,5$  pour la même dalle que celle de la figure 2.

différences pour une dalle carrée appuyée sur les quatre bords et amènent aux deux remarques suivantes :

a) la théorie de Kirchhoff "encastre" à la torsion le long d'un bord simplement appuyé, puisque le blocage des déplacements  $w$  annule automatiquement les pentes le long de l'appui ( $\theta_x = \partial w/\partial y = 0$ , ou  $\theta_y = \partial w/\partial x = 0$ ).

Par ailleurs, l'effort tranchant ( $Q_x$  ou  $Q_y$ ) n'est plus égal à la réaction ( $V_x$  ou  $V_y$ ), puisque la théorie classique des dalles fait intervenir les termes dus au moment de torsion :

$$V_x = Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad \text{et} \quad V_y = Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (3)$$

b) La théorie de Mindlin permet par contre d'obtenir des moments de torsion nuls le long de la ligne d'appui simple et des efforts tranchants égaux aux réactions. Cependant, pour obtenir une telle solution, il faudrait un maillage relativement dense pour traduire correctement les variations brutales des efforts dans les zones d'appui (Figure 2). En effet, les maillages utilisés dans la pratique et qui suffisent à calculer la déformée et les moments de flexion s'avèrent souvent insuffisants pour la détermination des moments de torsion et des efforts tranchants dans ces zones d'appui. On signalera qu'une méthode a été proposée dans la référence [7] pour améliorer la convergence de ces efforts et éviter un maillage très serré. Malheureusement, il ne semble pas qu'elle soit implémentée dans la plupart des programmes utilisés dans la pratique.

## 1.2 Réaction du mur déterminée à partir des réactions d'appuis ponctuels

La deuxième possibilité consiste à déterminer les réactions des murs en partant des réactions obtenues au droit des appuis ponctuels. Le problème soulevé par cette méthode réside dans les difficultés d'interprétation de ces réactions d'appuis.

Cela est dû essentiellement au fait que, le long d'un mur porteur, le calcul par éléments finis ne permet pas d'obtenir directement la réaction répartie, mais la concentre au droit des nœuds par "équivalence énergétique". Les valeurs de ces forces concentrées dépendent donc de la variation de la force répartie qu'elles remplacent. Les difficultés d'interprétation des réactions d'appuis ainsi calculées s'expliquent par le fait que la substitution des forces concentrées à des forces réparties par "équivalence énergétique" donne des valeurs tout à fait différentes de celles qu'on a l'habitude d'obtenir "manuellement" en supposant que chaque nœud reprend la charge comprise entre les deux entre-axes qui lui sont adjacents. La figure 2 met en évidence ces différences pour des distributions simples (linéaire et parabolique) des forces réparties, et cela dans deux cas : un élément fini quadratique (3 nœuds par côté)

(\*) Ces deux figures sont tirées de la références [3]. Les résultats présentés ont été obtenus en utilisant un réseau de  $10 \times 10$  éléments cubiques sur un quart de la dalle et un calcul de l'effort tranchant selon la méthode présentée dans les références [4] et [1]. Ces mêmes résultats ont été également obtenus par la méthode de segmentation présentée dans la référence [8].

et un élément fini cubique (4 noeuds par côté) (Figure 4). Si une méthode [4] a été proposée pour déterminer, à partir des réactions concentrées, les réactions réparties correspondantes (méthode qui donne effectivement de bons résultats), il n'en reste pas moins que les valeurs obtenues par le calcul ne sont pas exploitables automatiquement et nécessitent donc un traitement manuel.

En conclusion, on peut dire que, même si les murs et les colonnes étaient infiniment rigides et pouvaient être remplacés par des appuis fixes, il apparaît clairement que la détermination des efforts qui passent dans ces porteurs n'est pas immédiate. Si maintenant on tient compte du fait que les porteurs ont une rigidité finie et peuvent donc se déformer, on constate alors qu'il y a un deuxième facteur d'erreur lié à la différence du mode de déformation entre le modèle de calcul et la réalité.

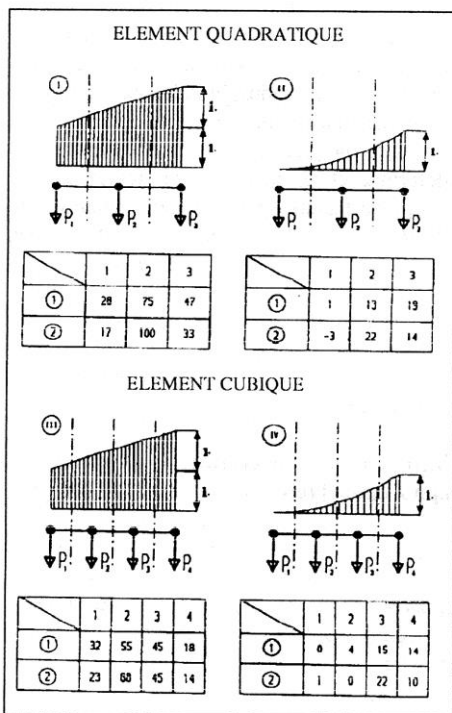


Figure 4 : Réactions concentrées équivalentes à des réactions réparties :

- 1) méthode classique de l'ingénieur,
- 2) équivalence énergétique.

### 1.3 Déformation de la dalle au droit des porteurs

Pour mettre en évidence l'importance du mode de déformation, il suffit de prendre l'exemple d'un mur qui s'arrête à l'intérieur d'une dalle (Figure 5 : un tel exemple se rencontre souvent dans la pratique). On voit alors immédiatement qu'il y a une grande différence entre la déformation d'une dalle reposant sur un mur élastique et celle d'une dalle où ce mur a été remplacé par un ensemble d'appuis fixes. En effet, alors que dans le premier cas le mur se tasse sur toute sa longueur sous l'effet d'une charge répartie, dans le deuxième cas la dalle non seulement ne subit aucun tassement, mais en plus aura tendance à se soulever après le premier appui fixe, si bien que le

deuxième appui devra exercer une réaction négative pour annuler le déplacement vertical (Figure 5). L'erreur ainsi introduite, ajoutée aux considérations exposées précédemment, explique pourquoi il est difficile de déterminer à partir des réactions d'appuis ponctuels les efforts qui passent dans les murs porteurs. De plus, les moments de flexion dans la dalle au point d'arrêt du mur seront nettement surestimés par rapport à ceux qu'on obtiendrait en tenant compte du tassement du mur.

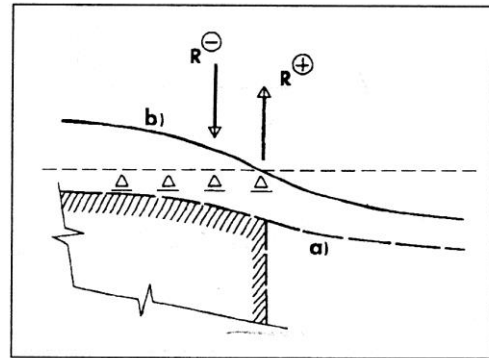


Figure 5 : Mode de déformation de la dalle :

- a) en tenant compte du tassement du mur,
- b) en remplaçant le mur par des appuis fixes aux noeuds des éléments finis.

Un autre modèle consisterait à remplacer le mur par un ressort continu (milieu élastique exerçant une réaction proportionnelle en chaque point au déplacement vertical de la dalle, selon la relation  $R = C \cdot w$ , où  $C$  est le module de réaction du mur, figure 6c). Le principal défaut de ce modèle est qu'il ne tient compte que de la rigidité à la compression du mur (Figure 6a) et néglige complètement sa rigidité au cisaillement (Figure 6b).

De cette façon, il ne peut traduire la diffusion des efforts dans le mur, ce qui conduit à sous-estimer considérablement la rigidité réelle de celui-ci et par voie de conséquence les moments de flexion dans la dalle.

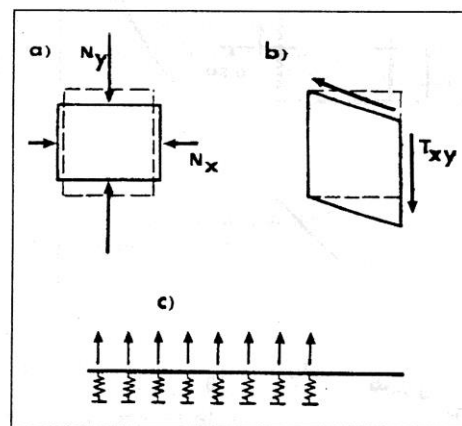


Figure 6 : Déformation d'un élément infinitésimal du mur :

- a) déformation liée à l'effort normal,
- b) déformation liée au cisaillement,
- c) modèle de dalle sur milieu élastique montrant comment la rigidité du mur au cisaillement est négligée.

En ce qui concerne les colonnes, leur remplacement par des appuis fixes non seulement annule le déplacement vertical, mais de plus ne fournit aucune indication sur les moments auxquels elles sont soumises. Or, si ces moments de flexion sont moins importants pour la colonne elle-même (puisque les contraintes de traction qu'ils engendrent sont souvent compensées par l'effort normal), ils prennent par contre une grande importance pour le dimensionnement de la dalle au poinçonnement [14], [11].

En effet, la répartition dans la dalle des cisaillements dus à l'effort normal dans la colonne peut être considérablement modifiée par la présence des moments de flexion  $M_x$  et  $M_y$  dans cette dernière, comme le montre la figure 7 dans la direction X.

Essayons maintenant de voir quelles conséquences pratiques peut avoir l'ensemble des considérations résumées ci-dessus.

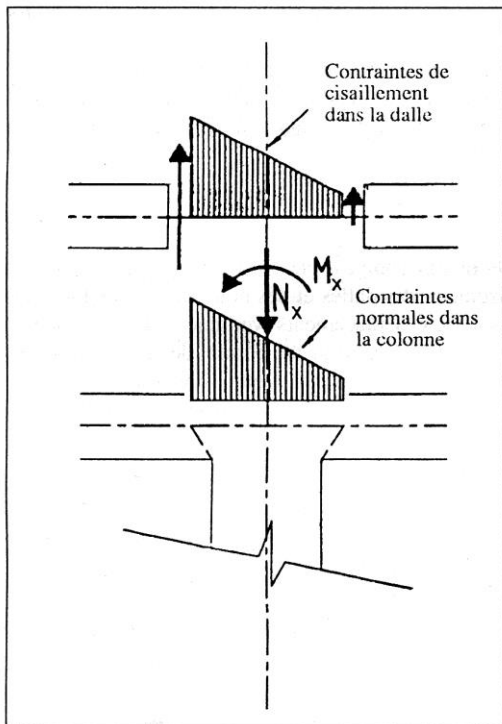


Figure 7 : Répartition des contraintes tangentielles dans la dalle et des contraintes normales dans la colonne soumise à un effort normal  $N_x$  et un moment de flexion  $M_x$ .

#### 1.4 Conséquences pratiques

La principale conséquence réside dans le fait que l'ingénieur doit interpréter et éventuellement corriger les résultats du calcul par éléments finis pour d'une part les compléter en faisant "manuellement" la descente des charges ou la vérification au poinçonnement, et d'autre part en éliminer les imperfections en réduisant les pointes de moments négatifs ou en déduisant des réactions d'appuis ponctuelles les efforts qui passent dans les murs porteurs. Si ces interventions sont tolérables dans le cadre d'une utili-

sation classique des résultats du calcul pour l'élaboration manuelle des plans d'exécution, elle devient particulièrement pénalisante lorsqu'il s'agit d'automatiser l'ensemble [9] en intégrant le programme d'éléments finis dans une chaîne de conception assistée par ordinateur (CAO) comme le montre la figure 8.

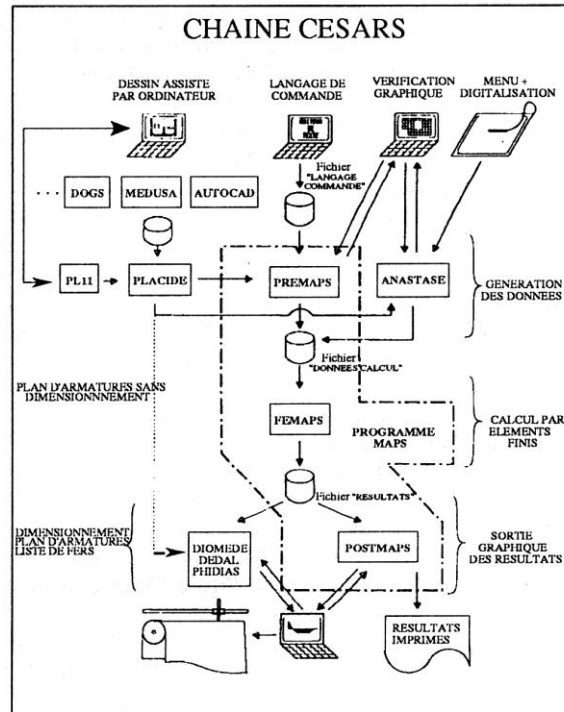


Figure 8 : Intégration du programme d'éléments finis MAPS dans une chaîne CAO appliquée au bâtiment.

Dans cette chaîne, les données pour le calcul par éléments finis (FEMAPS) peuvent être générées de deux manières :

- Selon un processus interactif graphique (visualisation du réseau au fur et à mesure de sa génération) à l'aide d'un menu, d'une tablette digitalisante et en reprenant éventuellement les coordonnées des plans dessinés par un programme de DAO (MEDUSA, AUTOCAD ou tout autre système produisant un fichier graphique ou IGES [13]).
- Par un préprocesseur (PREMAPS [1], [2]) basé sur un langage de commande et une visualisation graphique de la structure et de ses différents paramètres (charges, appuis, etc...).

Les résultats du calcul seront soit représentés graphiquement sous forme de diagrammes, courbes de niveau, etc..., par le postprocesseur POSTMAPS [1] [2], soit utilisés par le module DIOMEDE pour dimensionner les aciers et permettre aux programmes DEDALE et PHIDIAS de dessiner les plans d'armatures (en reprenant par l'intermédiaire de PLACIDE certains éléments du dessin initial produit par les systèmes DAO) et les listes des fers.

L'élément central de cette chaîne étant le calcul par élé-

ments finis, il apparaît alors clairement que plus le modèle de calcul est proche de la réalité et peut fournir des résultats précis et complets, moins l'intervention manuelle de l'ingénieur est nécessaire. On voit donc immédiatement l'importance que prend le modèle de calcul dans le degré d'automatisation d'une chaîne CAO pour l'élaboration des plans d'exécution.

Une première solution, pour remédier aux inconvénients du calcul classique du bâtiment et tenir compte de l'interaction dalle-porteurs, consisterait à modéliser l'ensemble de la structure à l'aide d'éléments "coque". De cette façon, on tiendrait compte à la fois des efforts flexionnels dans la dalle et les colonnes et des effets membranaires dans les murs. Si cette méthode permet théoriquement de résoudre convenablement le problème, dans la pratique, la complexité géométrique des dalles de bâtiment (Figure 9) nécessite souvent l'utilisation d'un grand nombre d'éléments finis. Comme le calcul en coque se fait avec des noeuds à 5 ou 6 degrés de liberté (la place disque nécessaire étant proportionnelle au carré du nombre de degrés de liberté de la structure et le temps calcul au cube de ce nombre), il apparaît clairement que l'on dépassera très vite les capacités des ordinateurs moyens dont dispose la plupart des bureaux d'ingénieurs. Toutes ces considérations nous ont amenés à développer un modèle spécialement adapté au bâtiment. On peut ainsi modéliser l'ensemble dalle-murs-colonnes (Figure 9), et cela éventuellement sur plusieurs étages.

On remarquera cependant qu'une telle modélisation n'est possible que si l'on admet certaines hypothèses.

### 1.5 Hypothèses

Si l'on tient compte du fait que la plupart des calculs

statiques du bâtiment peuvent se décomposer en deux parties : l'effet des charges horizontales et celui des charges verticales, on peut faire les considérations suivantes :

#### a) Effet des charges horizontales

Pour cette partie du calcul, on constatera que l'on n'a nullement besoin de modéliser l'ensemble de la structure par des éléments "coque". En effet, la rigidité des dalles dans leur propre plan étant de loin supérieure à leur rigidité flexionnelle, on peut négliger les efforts membranaires auxquels elles sont soumises et limiter leur rôle à la transmission des charges. De cette façon, on peut les modéliser simplement par grillage de poutres.

Ainsi, un système de barres planes ou spatiales s'avère souvent suffisant pour l'analyse des efforts qui passent dans les colonnes et les murs sous l'effet des charges horizontales.

A la limite, on modéliserait uniquement les murs par des éléments "coque" pour une analyse plus fine. En conséquence, les modèles classiques simples donnant la plupart du temps entière satisfaction pour cette partie du calcul, on ne s'occupera, dans ce qui suit, que de l'effet des charges verticales.

#### b) Effet des charges verticales

Pour ces charges, on supposera que les déplacements horizontaux des dalles et des murs restent négligeables par rapport aux déplacements verticaux. Tout découlera de cette hypothèse, puisqu'elle permet de simplifier le modèle éléments "coque" et, par cette limitation du nombre de degrés de liberté, de réduire considérablement la quantité de calculs.

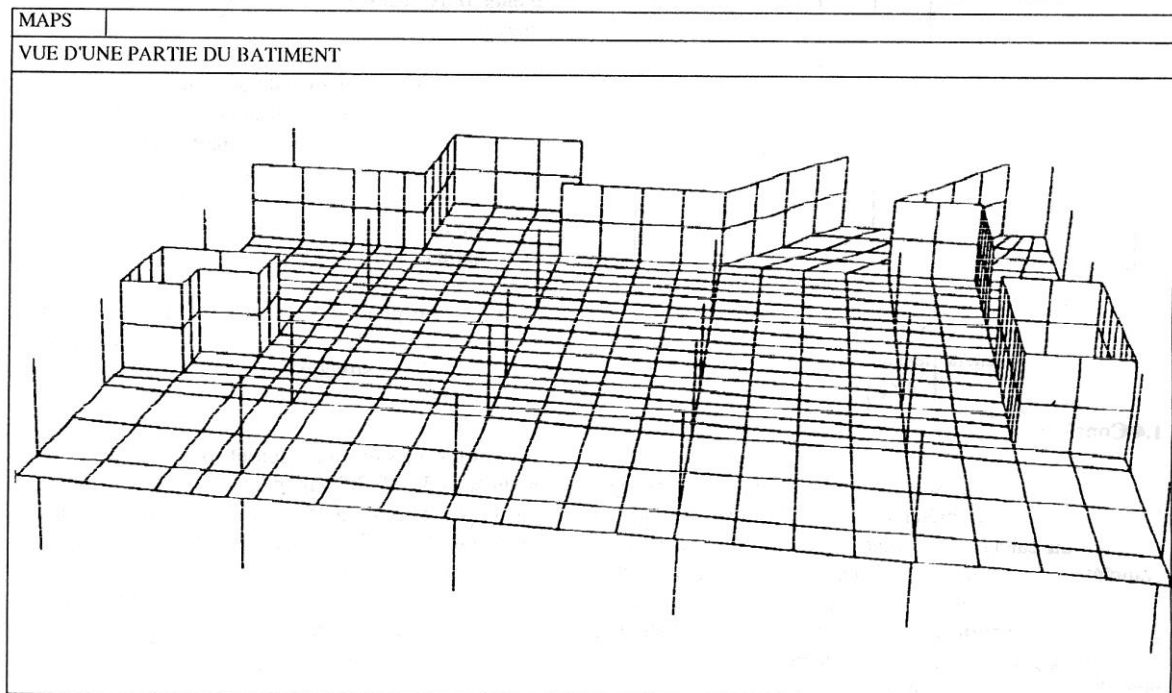


Figure 9 : Modélisation en éléments finis d'un étage de bâtiment.

## 2 MODELE D'ELEMENTS FINIS

Par rapport à un référentiel global XYZ, on modélise l'ensemble de la structure par la combinaison de trois types d'éléments : les dalles, les murs et les colonnes (Figure 10a). Les noeuds connectés aux éléments dalles auront trois degrés de liberté (le déplacement  $w$  selon l'axe Z, et les deux rotations  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  autour des axes X et Y) ; ceux connectés uniquement aux éléments murs auront un degré de liberté (le déplacement  $w$ ) et enfin ceux connectés uniquement aux colonnes auront cinq degrés de liberté (les trois déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$  selon X, Y, Z et les deux rotations  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ) (Figure 10b). De cette façon, la compatibilité des déplacements est assurée entre ces trois types d'éléments finis. En revanche, les champs des déplacements et des déformations ainsi que les efforts seront différents d'un type à l'autre.

On notera par ailleurs (Figure 10c) que l'on peut combiner aux dalles des éléments "grillage de poutres" pour simuler les sommiers. Pour les planchers nervurés, on peut utiliser également le modèle "dalle orthotrope" qui s'adapte bien à ce genre de structure. Dans ce qui suit, on fera un bref rappel de la théorie utilisée pour la formulation en éléments finis.

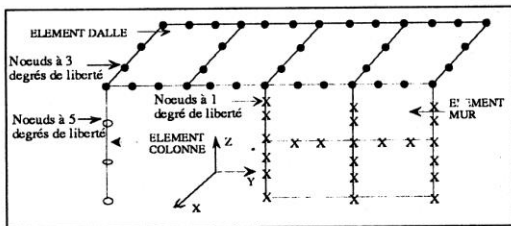


Figure 10a : Combinaison des trois types d'éléments : dalles, murs, colonnes.

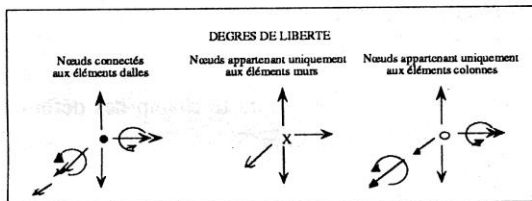


Figure 10b : Degrés de liberté associés aux noeuds de chaque type d'élément.

### 2.1 Eléments "dalles"

Ces éléments sont basés sur la théorie de Mindlin qui tient compte des déformations dues à l'effort tranchant. Ainsi, le champ des rotations et celui des déplacements verticaux sont définis indépendamment (Figure 11) par les polynômes d'interpolation de *Serendip* en fonction des rotations et déplacements aux noeuds :

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

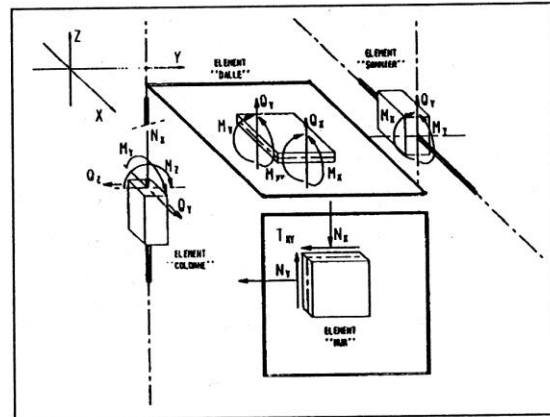


Figure 10c : Efforts dans les différents types d'éléments.

La géométrie de l'élément étant définie en fonction des coordonnées nodales par :

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \sum N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix} \quad (5)$$

La matrice de rigidité sera alors calculée en se basant sur la relation contraintes-déformations pour les dalles isotropes :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (6a)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \frac{5Et}{12(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{Bmatrix} \quad (6b)$$

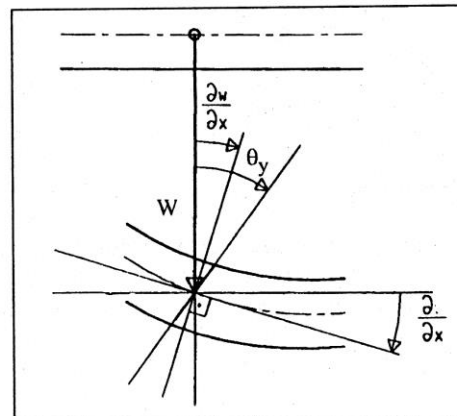


Figure 11 : Déplacement vertical et rotation dans l'élément "dalle".

Pour les dalles orthotropes, ces relations s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (7a)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_x \end{Bmatrix} \quad (7b)$$

Les coefficients  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_{xy}$ ,  $D_1$ ,  $S_x$  et  $S_y$  sont donnés dans la littérature [11] en fonction du type d'orthotropie (Figure 12).

Ce modèle s'adapte particulièrement bien à certains types de constructions, tels les planchers nervurés ou mixtes (Figure 12).

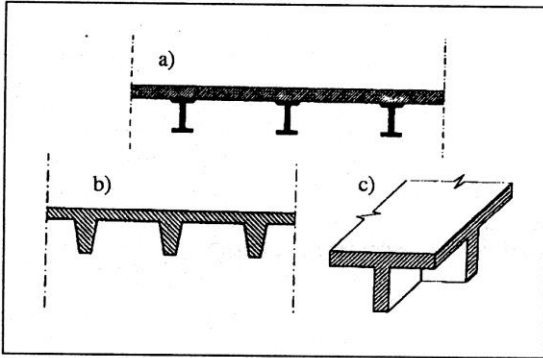


Figure 12 : Exemples de dalles orthotropes.

A partir des relations (6) et (7), le calcul des moments de flexion et de torsion se fait d'une manière classique. En revanche, les efforts tranchants ne sont pas obtenus à partir des déformations correspondantes [3], mais par dérivation du champ des moments [1] selon les relations classiques d'équilibre :

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (8a)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (8b)$$

## 2.2 Eléments "murs"

On désigne sous ce terme tout élément bidimensionnel situé dans un plan perpendiculaire au plan global  $X, Y$ . La géométrie d'un élément "mur" s'exprime en fonction des coordonnées nodales :

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \sum N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix} \quad (9)$$

On définit un repère local lié à l'élément :

$$X^* = \left| \sum \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix} \right| \quad (10a)$$

$$Y^* = \left| \sum \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix} \right| \quad (10b)$$

En fonction de ce repère, le champ des déplacements se compose uniquement des déplacements verticaux (Figure 13) :

$$V^* = \sum N_i(\xi, \eta) \cdot V_i^* \quad (11)$$

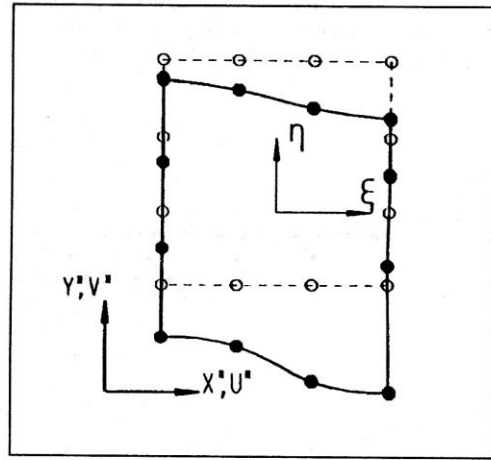


Figure 13 : Champ des déplacements verticaux dans un élément "mur".

Le reste de la formulation est basé sur la théorie de l'état de contrainte plan, en tenant compte du fait que les déplacements horizontaux sont nuls sur tout l'élément. On peut définir alors le champ des déformations :

$$\epsilon_y = \frac{\partial V^*}{\partial y^*} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial V^*}{\partial x^*} \quad (12)$$

La relation contraintes-déformations s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E.t}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

La matrice de rigidité sera déterminée en appliquant les relations classiques des éléments finis [6].

### 2.3 Eléments "colonnes"

Comme les éléments "dalles", ils sont basés sur la théorie qui tient compte des déformations dues à l'effort tranchant. Leur formulation dérive de celle exposée dans [5].

Ces éléments barres, à trois, quatre ou cinq noeuds selon le degré du polynôme d'interpolation, sont soumis aux trois déplacements  $u, v, w$  suivant les axes  $X, Y, Z$  et aux deux rotations  $\theta_x, \theta_y$  autour de  $X$  et  $Y$  (Figure 14).

Aux noeuds en contact avec la dalle, les déplacements  $u$  et  $v$  seront supposés nuls. D'où l'on déduit l'expression du champ des déplacements d'une barre dont le premier noeud, par exemple, est en contact avec la dalle :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum [M_i] \cdot \delta_i \quad (14a)$$

avec :

$$[M_i] \cdot \{\delta_i\} = N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \end{Bmatrix} \quad (14b)$$

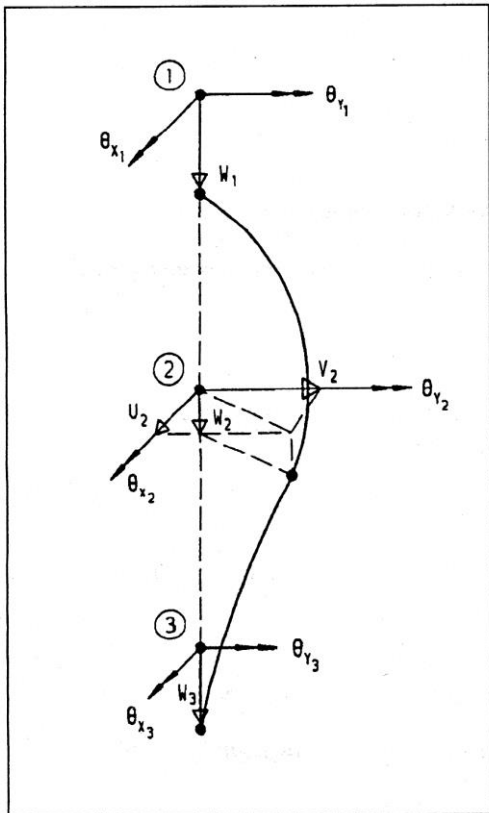


Figure 14 : Champ des déplacements et des rotations dans un élément "colonne".

et :

$$[M_i] \cdot \{\delta_i\} = N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (14c)$$

La suite des calculs se fait selon la méthode classique des éléments finis à partir de la relation contraintes-déformations :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ Q_x \\ Q_y \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E.F & & & & \\ & G.F_x & & & \\ & & G.F_y & & \\ 0 & & & E.I_x & \\ & & & & E.I_y \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \theta_y \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \theta_x \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

On remarquera que ce modèle encastre la colonne dans la dalle et fournit ainsi les moments de flexion qui passent dans la colonne. Ceci est particulièrement utile, puisqu'il permet le dimensionnement de la dalle au poinçonnement, en tenant compte de tous les efforts (Figure 7). Cependant, on peut modéliser également une rotule en éliminant au niveau de la matrice de rigidité de la colonne les termes liés à la rotation par "condensation statique".

### 2.4 Effet du sol élastique

Un bâtiment peut reposer sur un sol (Figure 15) de deux manières : par l'intermédiaire de dalles (radier sur sol élastique ou semelles de fondation) ou de barres (pieux résistant par l'effet de fût et l'effet de pointe). Il est intéressant alors de savoir quelle est la part de la réaction du sol reprise respectivement par le radier, les semelles et les pieux.

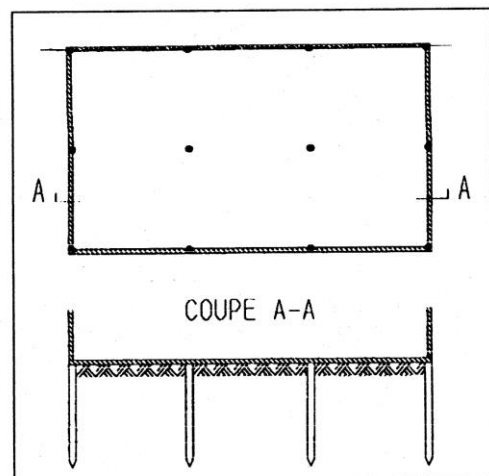


Figure 15 : Bâtiment reposant sur un radier et des pieux sur sol élastique.

En ce qui concerne les dalles, le sol exerce une réaction répartie (sur la surface du radier ou des semelles) et proportionnelle en chaque point au déplacement vertical  $w$  :

$$R(x,y) = k_r \cdot w(x,y) \quad (16)$$

où  $k_r$  est le module de réaction du sol. Le calcul par éléments finis consiste alors à ajouter à la matrice de rigidité  $[K]$  de chaque élément du radier ou des semelles une matrice  $[K_R]$  proportionnelle au module de réaction du sol. Pour chaque élément, le déplacement  $w$  s'écrivant :

$$w(\xi, \eta) = [N_1(\xi, \eta), 0, 0, \dots] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \vdots \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{\delta\} \quad (17)$$

la matrice  $[K_R]$  s'obtient par la formule :

$$[K_R] = \int_F [N]^T \cdot k_r \cdot [N] \cdot dF \quad (18)$$

où  $F$  est la surface de l'élément.

Pour les pieux, la réaction du sol (Figure 16) s'exerce

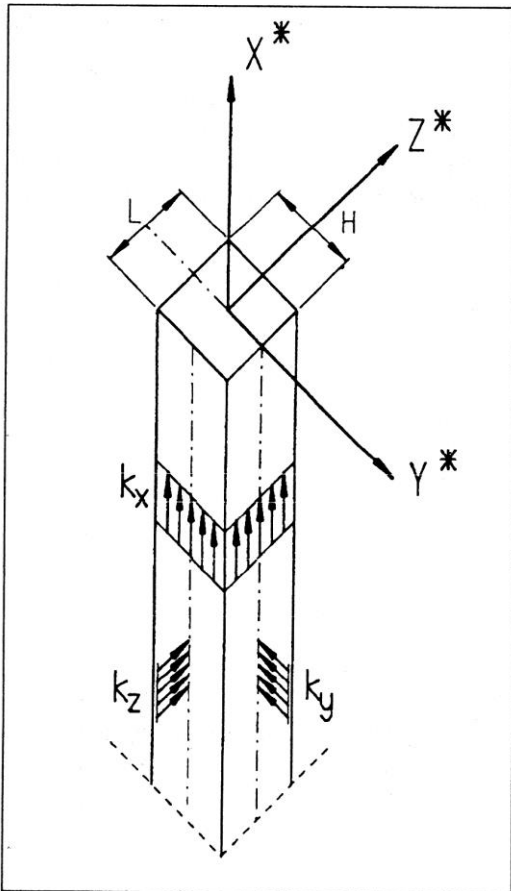


Figure 16 : Axes locaux du pieu et réactions dues au sol.

selon les trois axes locaux de la barre :  $X^*$  ( $K_x$  : effet longitudinal de fût),  $Y^*$  et  $Z^*$  ( $K_y$  et  $K_z$  : réactions du sol dues aux déplacements horizontaux). On utilise pour ces barres le même type d'éléments que les colonnes. Ainsi, les déplacements selon les axes globaux  $X, Y, Z$  s'expriment par la relation :

$$\begin{Bmatrix} u(\xi) \\ v(\xi) \\ w(\xi) \end{Bmatrix} = \sum [M_i] \cdot \{\delta_i\} = [M] \cdot \{\delta\} \quad (19)$$

avec :

$$[M_i] \cdot \{\delta_i\} = N_i(\xi) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

et :

$$[M_i] \cdot \{\delta_i\} = N_i(\xi) \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

On peut alors écrire :

- Les déplacements selon les axes locaux  $X^*, Y^*, Z^*$  de l'élément :

$$\begin{Bmatrix} u^*(\xi) \\ v^*(\xi) \\ w^*(\xi) \end{Bmatrix} = [\theta]^T \cdot \begin{Bmatrix} u(\xi) \\ v(\xi) \\ w(\xi) \end{Bmatrix} \quad (22)$$

où  $[\theta]$  est la matrice de changement de base des axes locaux de l'élément aux axes globaux.

- Les réactions du sol selon les axes globaux :

$$\begin{Bmatrix} R_x(\xi) \\ R_y(\xi) \\ R_z(\xi) \end{Bmatrix} = [\theta] \cdot [R_s] \cdot [\theta]^T \cdot [M] \cdot \{\delta\} \quad (23)$$

avec :

$$[R_s] = \begin{bmatrix} 2(H+L) \cdot k_x & 0 & 0 \\ 0 & H \cdot k_y & 0 \\ 0 & 0 & L \cdot k_z \end{bmatrix} \quad (24)$$

De cette façon, on obtient la matrice de rigidité due au sol agissant le long d'un pieu :

$$[K_p] = \int_S [M]^T \cdot [\theta] \cdot [R_s] \cdot [\theta]^T \cdot [M] \cdot ds \quad (25)$$

où  $S$  est la longueur du pieu.

## 2.5 Précontrainte

La précontrainte est un autre paramètre qui intervient dans le bâtiment lorsque les portées deviennent grandes. Le modèle proposé ici tient compte aussi bien des câbles traversant la dalle (Figure 17) que de ceux qui passent dans les sommiers (Figure 18). Dans les deux cas, le câble est remplacé par des forces nodales équivalentes agissant sur l'élément dalle traversé lui-même par le câble ou adjacent au sommier traversé par le câble.

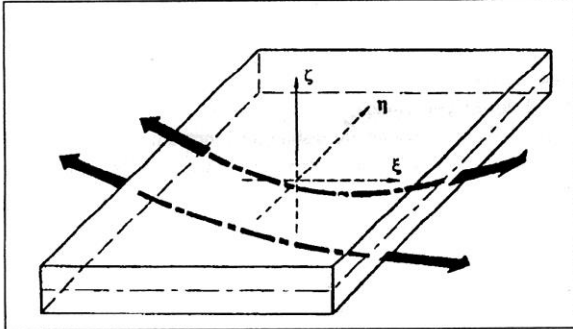


Figure 17 : Câble passant à travers un élément dalle.

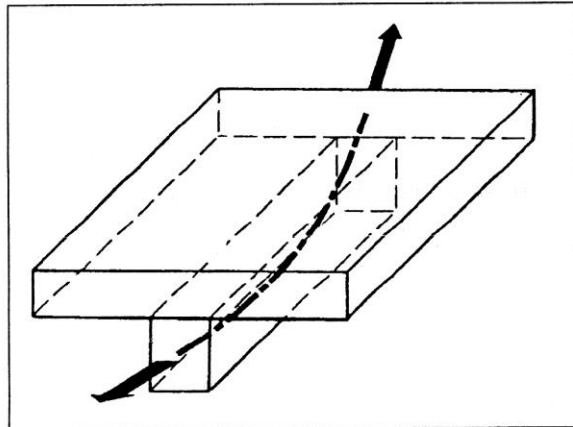


Figure 18 : Câble passant à travers un sommier et une dalle.

Le calcul de la précontrainte se fait en quatre étapes :

- détermination de la géométrie du câble ;
- calcul des pertes pour les différentes étapes de mise en tension ;
- intersection du câble avec les éléments finis ;
- calcul des forces nodales équivalentes.

### 2.5.1 Géométrie du câble

La géométrie du câble sera déterminée à partir d'un nombre  $N$  de points dont on spécifie les coordonnées  $(X_i, Y_i, Z_i)$  et éventuellement les pentes  $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$  respectivement selon  $X, Y$  et  $Z$ . L'interpolation sera faite par analogie avec la poutre continue, puisque la déformée de celle-ci satisfait à la condition du minimum d'énergie et par voie de conséquence au minimum de courbure :

$$\int_s \frac{M^2}{EI} \cdot ds = \text{Min} \Rightarrow \int_s \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \cdot ds = \int_s \frac{K^2}{EI} \cdot ds = M_1 \quad (26)$$

où  $K$  est la courbure de la déformée.

On obtient ainsi la courbe passant par les points définis par leurs coordonnées  $(X_i, Y_i, Z_i)$  et éventuellement leurs pentes  $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ , et qui présente le minimum d'oscillation entre ces points.

On commence par définir selon l'axe  $X$  une poutre continue (Figure 19) de  $(N-1)$  travées le long de l'abscisse  $\eta$  et dont chaque travée a une longueur  $L$  :

$$L_i = \eta_{i+1} - \eta_i = \sqrt{(X_{i+1} - X_i)^2 + (Y_{i+1} - Y_i)^2 + (Z_{i+1} - Z_i)^2} \quad (27)$$

A chaque appui de cette poutre, on impose un déplacement  $X_i$  (Figure 19) et éventuellement une pente  $\alpha_i$ .

Pour appliquer la méthode classique des éléments finis et calculer les rotations inconnues  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  aux noeuds où les pentes ne sont pas imposées, on utilise pour chaque travée un élément barre plane basé sur les polynômes cubiques de l'Hermite (Figure 20) :

$$\begin{aligned} H_1(\xi) &= \frac{1}{4} (\xi^3 - 3\xi + 2) \\ H_2(\xi) &= \frac{1}{4} (\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} H_3(\xi) &= \frac{1}{4} (\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1) \\ H_4(\xi) &= \frac{1}{4} (-\xi^3 + 3\xi + 2) \end{aligned}$$

où  $H_1$  et  $H_4$  sont liés aux déplacements selon  $X$  et  $H_2$  et  $H_3$  aux rotations des noeuds  $i$  et  $i+1$  de la barre  $i$ . La

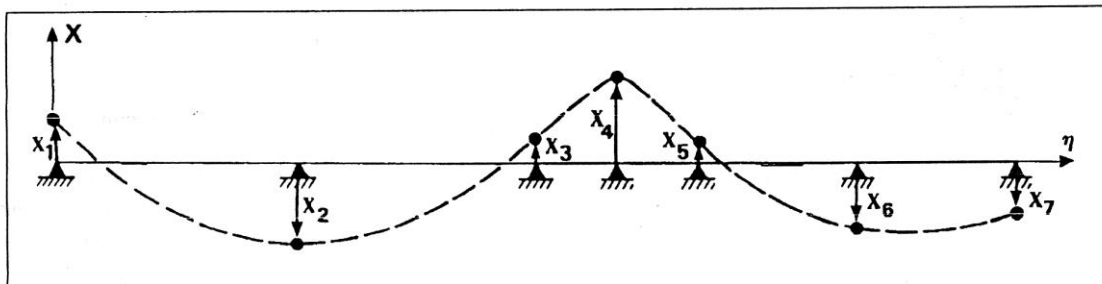


Figure 19 : Poutre continue selon l'abscisse  $\eta$  et soumise à des déplacements imposés selon  $X$ .

Remplaçons  $\sigma_{\varphi\varphi}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$  par leur expression et exécutons les intégrales (14), nous obtenons :

$$\begin{aligned} n_{\varphi} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\varphi\varphi}^0 + \nu \varepsilon_{\theta\theta}^0) \\ n_{\theta} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta\theta}^0 + \nu \varepsilon_{\varphi\varphi}^0) \end{aligned} \quad (15)$$

$n_{\varphi}$  et  $n_{\theta}$  sont les efforts normaux, par unité de longueur, de parallèle et de méridienne.

### 3.1.6 Moments de flexion dans une coque

Les composantes du moment des forces de contraintes agissant en un point M de la coque sont, par définition

$$\begin{aligned} M_{\varphi} &= \int_S t \cdot \sigma_{\theta\theta} \cdot \tau_{\theta} \cdot ds \\ M_{\theta} &= - \int_S t \cdot \sigma_{\varphi\varphi} \cdot \tau_{\varphi} \cdot ds \end{aligned}$$

Remplaçons  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\tau_{\varphi}$  et  $\tau_{\theta}$  par leur expression et intégrons par rapport à  $t$  ( $-h/2 < t < h/2$ ).

Les composantes du moment, par unité de longueur, autour de la parallèle et de la méridienne sont, respectivement, dans le cas d'une coque sphérique :

$$\begin{aligned} m_{\varphi} &= \frac{D}{R} \cdot \left( \frac{d\omega_{\varphi}}{d\theta} + \nu \cdot \omega_{\varphi} \cdot \cotg \theta \right) \\ m_{\theta} &= - \frac{D}{R} \left( \omega_{\varphi} \cdot \cotg \theta + \nu \cdot \frac{d\omega_{\theta}}{d\theta} \right) \end{aligned}$$

avec

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

D est la rigidité de la coque à la flexion.

### 3.1.7 Effort tranchant

On démontre, par des considérations énergétiques, que l'effort tranchant, par unité de longueur de parallèle est

$$Q = \frac{1}{R \cdot \sin \theta} \cdot \left[ m_{\theta} \cdot \cos \theta + \frac{d}{d\theta} (m_{\varphi} \cdot \sin \theta) \right] \quad (17)$$

### 3.2 Equations d'équilibre

Supposons la coque soumise à une force extérieure répartie d'intensité  $p$  par unité de surface. Il est, alors, aisé de déduire les équations d'équilibre par application du théorème du minimum de l'énergie potentielle. Il en résulte les équations suivantes :

$$(n_{\varphi} + n_{\theta}) \sin \theta - \frac{d}{d\theta} (Q \cdot \sin \theta) = p_1 \cdot R \cdot \sin \theta \quad (18a)$$

$$n_{\varphi} \cdot \cos \theta - \frac{d}{d\theta} (n_{\theta} \cdot \sin \theta) - Q \cdot \sin \theta = p_{\theta} \cdot R \cdot \sin \theta \quad (18b)$$

$p_1$  et  $p_{\theta}$  sont les composantes normale et tangentielle, suivant une méridienne, à la surface de la coque, de la force par unité de surface.

Ce système d'équations, dont les fonctions inconnues  $n_{\varphi}$ ,  $n_{\theta}$  et  $Q$  peuvent s'exprimer en fonction des déplacements  $u_{\theta}$  et  $u_1$ , définit complètement le comportement de la coque.

### 3.2.1 Théorie de la membrane

Si l'appui de la coque est tel que les bords puissent tourner librement, les moments de flexion sont, alors, négligeables et on obtient une bonne approximation en ne considérant que seuls les efforts normaux, ou forces de membrane, sont susceptibles de se développer de façon significative. Dans ce cas, les moments de flexion et les efforts tranchants sont ignorés et les équations (18) s'écrivent :

$$n_{\theta} \cdot \sin \theta + n_{\varphi} \cdot \sin \theta = p_1 \cdot R \cdot \sin \theta \quad (19a)$$

$$n_{\varphi} \cdot \cos \theta - \frac{d}{d\theta} (n_{\theta} \cdot \sin \theta) = p_{\theta} \cdot R \cdot \sin \theta \quad (19b)$$

Pour résoudre ce système d'équations différentielles du premier ordre en  $n_{\varphi}$  et  $n_{\theta}$ , il faut connaître l'expression de  $p_1$  et  $p_{\theta}$ .

Supposons, cas le plus courant, que la coque soit soumise à une force verticale, son poids propre, de densité  $p$  par unité de surface ; la projection de cette force sur les axes de coordonnées intrinsèques donne alors :

$$p_1 = -p \cdot \cos \theta \quad \text{et} \quad p_{\theta} = p \cdot \sin \theta$$

Eliminant  $n_{\varphi}$  entre (19a) et (19b), il vient :

$$\sin \theta \cdot \frac{dn_{\theta}}{d\theta} + 2 \cdot n_{\theta} \cdot \cos \theta = -pR$$

Cette équation admet pour solution générale

$$n_{\theta} = (pR \cdot \cos \theta + A) / \sin^2 \theta$$

$n_{\theta}$  doit rester fini au voisinage de  $\theta = 0$ . Pour cela, il faut que le numérateur s'annule en ce point. Donc,

$$A = -pR$$

L'effort normal à la méridienne par unité de parallèle est, après simplification,

$$n_{\theta} = \frac{-pR}{(1 + \cos \theta)}$$

Pour les angles d'ouverture habituels ( $\theta < 90^\circ$ ),  $n_{\theta}$  est un effort de compression.

On déduit, sans difficulté, l'expression de  $n_{\varphi}$ . L'équation

(longueur réelle du câble) et  $\alpha$  l'angle de déviation cumulé (Figure 22) :

$$s = \int ds \quad \text{et} \quad \alpha = \int \frac{ds}{|R(s)|} = \int d\alpha \quad (33)$$

où  $R(s)$  est le rayon de courbure.

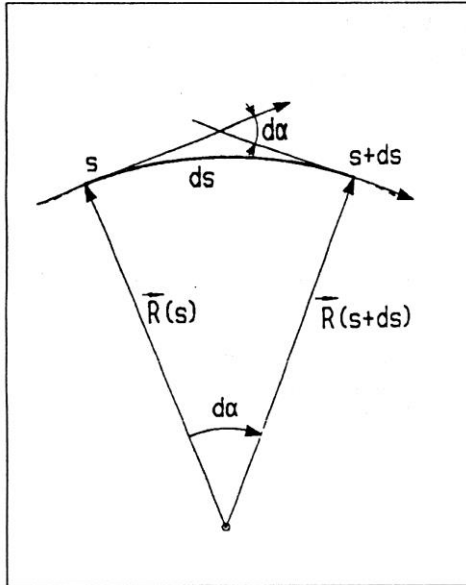


Figure 22 : Rayon de courbure et angle de déviation.

Pour le calcul de  $S$ , on procède de la sorte pour chaque tronçon  $i$  de la courbe :

$$\begin{aligned} s_1^i &= s_4^{i-1} & s_2^i &= \int_{-1/\beta}^{1/\beta} |V_t(\xi)| \cdot d\xi \\ s_3^i &= \int_{-1/\beta}^{1/\beta} |V_t(\xi)| \cdot d\xi & s_4^i &= \int_{1/\beta}^1 |V_t(\xi)| \cdot d\xi \end{aligned} \quad (34)$$

$$\Rightarrow s^i(\xi) = \sum_{j=1}^4 N_j(\xi) \cdot s_j^i \quad (35)$$

On détermine l'angle de déviation cumulé  $\alpha$  de la même manière en partant de la relation (33) et en tenant

compte du fait que le rayon de courbure s'écrit :

$$R(\xi) = \frac{V_n(\xi)}{|V_n(\xi)|} \quad (36)$$

où  $V_n$  est le vecteur normal à la courbe.

### 2.5.3 Perte par recul des clavettes

Sous l'effet d'une mise en tension à  $V_0$  (Figure 23a) l'élongation totale du câble s'obtient (Figure 24) par :

$$\Delta L = \int_0^L \frac{V(s)}{E \cdot F} \cdot ds \quad (37)$$

avec :  $L$  = longueur totale du câble,  
 $E$  = module d'élasticité de l'acier,  
 $F$  = section du câble.

Sous l'effet d'un recul de clavettes, cette élongation est réduite de  $\Delta L_1$  (Figure 23b), ce qui crée des forces de frottement  $f_2$  dirigées dans le sens contraire de celui de la mise en tension. Le point d'équilibre entre les deux forces de frottement  $f_1$  (dues à la mise en tension) et  $f_2$  se produit au point d'abscisse  $w$  de telle manière que :

$$\frac{A}{E \cdot F} = \Delta L_1 \quad (38)$$

où  $A$  est la surface délimitée par les courbes  $P_1(S)$  et  $P_2(S)$ , cette dernière étant symétrique à la première par rapport à l'axe  $GB$  (Figure 24). En conséquence, l'abscisse  $w$  sera déterminée par résolution de l'équation non linéaire :

$$\int_0^w V(s) \cdot ds - V(w) \cdot w = \frac{1}{2} \Delta L_1 \cdot E \cdot F \quad (39)$$

#### Remarque :

Ce calcul des pertes a été exposé pour la première étape de mise en tension. Il est clair que le principe reste valable pour les autres étapes, comme le montrera le troisième exemple d'application : calcul d'une dalle précontrainte.

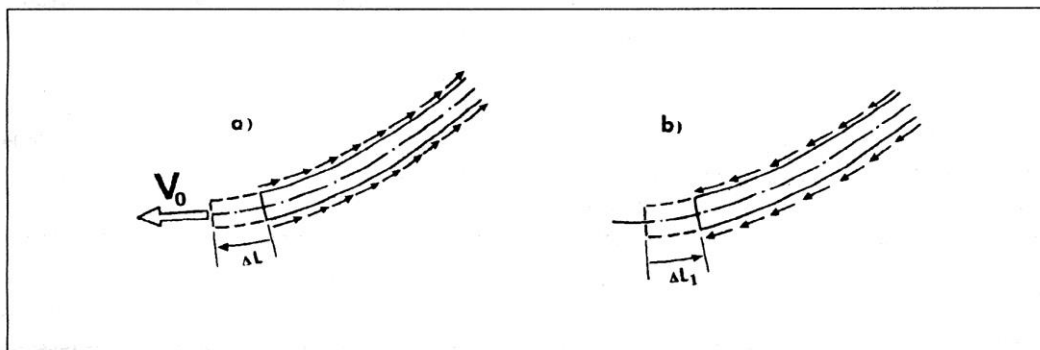


Figure 23 : Elongations et forces de frottement : a) lors de la mise en tension ( $f_1$ ), b) lors du recul des clavettes ( $f_2$ ).

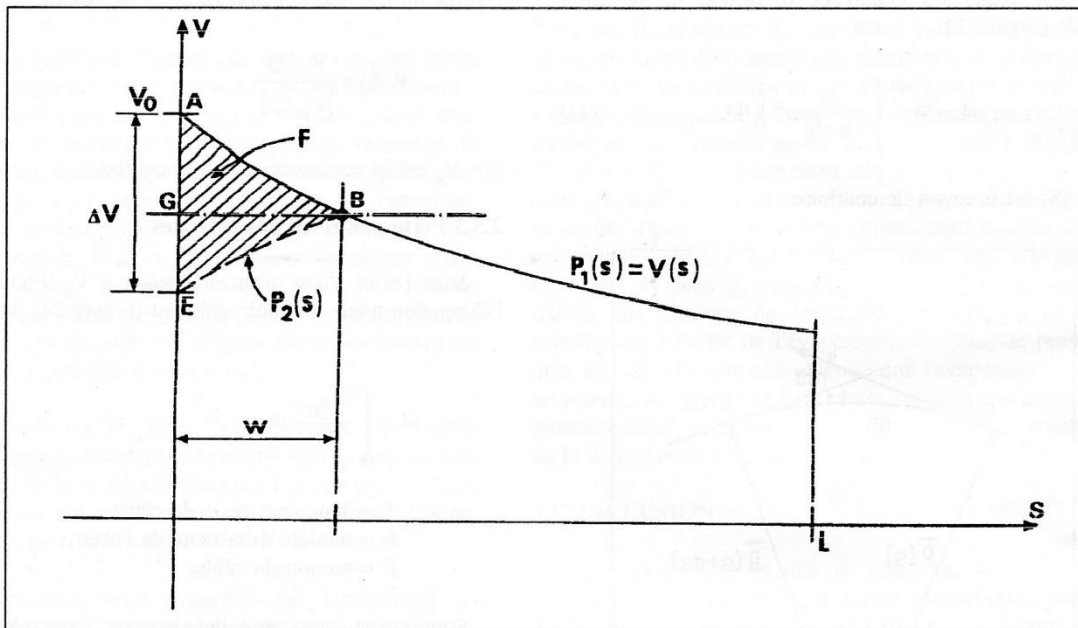


Figure 24 : Courbe représentant les pertes dues aux frottements et au recul des clavettes.

#### 2.5.4 Intersection du câble avec les éléments finis

Pour un élément fini de dalle, l'équation d'un côté à  $M$  noeuds s'écrit (Figure 25) :

$$\begin{Bmatrix} X(\eta) \\ Y(\eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 M_i(\eta) \cdot \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix} \quad (40)$$

où  $M_i$  sont les polynômes de Lagrange.

L'intersection avec le câble s'obtient en égalisant cette courbe avec les composantes  $X$  et  $Y$  de la relation (30). On obtient ainsi un système à 2 équations non linéaires pour chacun des tronçons du câble :

$$\begin{Bmatrix} X_i(\xi) \\ Y_i(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X(\eta) \\ Y(\eta) \end{Bmatrix} \quad (41)$$

En procédant ainsi pour les autres côtés de l'élément, on trouve le deuxième point d'intersection et on détermine alors la partie du câble qui traverse l'élément.

#### 2.5.5 Forces nodales équivalentes [15]

Le calcul des forces nodales équivalentes à la précontrainte se fera exactement comme dans les coques (références [1] et [2]). La seule différence consistera à négliger les composantes selon  $X$  et  $Y$  des forces de déviation et d'ancrage et à ne garder que les composantes selon  $Z$ .

En supposant que la section des câbles est négligeable devant celle du béton, et que la tension n'est pas modifiée par les déformations élastiques de la structure, on

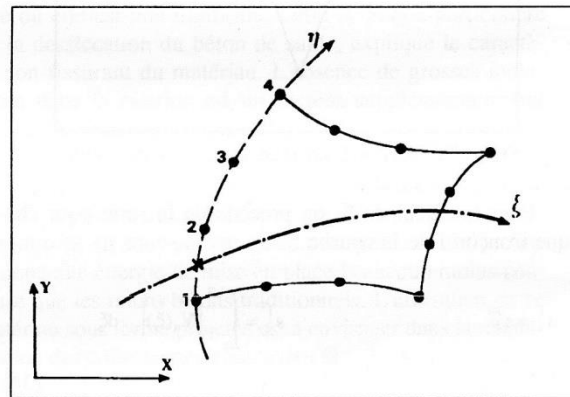


Figure 25 : Intersection des côtés d'un élément cubique de dalle (4 noeuds par côté) avec la projection plane du câble.

peut remplacer l'effet de la précontrainte par des charges nodales équivalentes, la matrice de rigidité de l'élément dalle restant inchangée. Ces forces nodales s'exprimeront alors uniquement en fonction de la géométrie du câble et de la tension.

#### a) Géométrie de la partie du câble traversant l'élément

Considérons un élément de coque traversé par un câble. Soit  $m$  le nombre de points répartis régulièrement dont on spécifie les coordonnées pour définir la géométrie du câble (Figure 26) :

$$X_c(\chi) = \begin{Bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m M_j(\chi) \cdot \begin{Bmatrix} X_{cj} \\ Y_{cj} \\ Z_{cj} \end{Bmatrix} \quad (42)$$

De même, en spécifiant les tensions en ces points :

$$T(\chi) = \sum_{j=1}^{\infty} M_j(\chi) T_j \quad (43)$$

où les  $M_j$  sont les fonctions d'interpolation de Lagrange.

### b) Charges locales dues au câble

L'effet du câble peut être remplacé par deux forces concentrées  $p_1$  et  $p_m$  respectivement au point  $j = 1$  et  $j = m$ , et deux charges réparties  $p_t$  et  $p_n$  dirigées respectivement selon la tangente et la normale à la courbe  $X_c(\chi)$ .

Connaissant les vecteurs tangent  $\mathbf{t}$  et normal  $\mathbf{n}$  :

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{V}_t}{|\mathbf{V}_t|} \quad \text{avec} \quad \mathbf{V}_t = \frac{d\mathbf{X}_c(\chi)}{d\chi} \quad (44)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{V}_n}{|\mathbf{V}_n|} \quad \text{avec} \quad \mathbf{V}_n = \frac{1}{|\mathbf{V}_t|^2} \left[ \frac{d^2\mathbf{X}_c}{d\chi^2} - \frac{a}{|\mathbf{V}_t|^2} \cdot \frac{d\mathbf{X}_c}{d\chi} \right]$$

où :  $a = d^2 X_c / d\chi^2 \cdot dX_c / d\chi$ , on peut déterminer le vecteur charge résultant :

$$\mathbf{p} = p_1 \cdot \mathbf{t} + p_n \cdot \mathbf{n}, \quad p_1 = T_1 \cdot \mathbf{t}_{\chi=1}, \quad p_m = T_m \cdot \mathbf{t}_{\chi=m}$$

où

$$p_t = dT/ds = 1/|\mathbf{V}_t| \cdot dT/d\chi$$

et

$$p_n = T/R = |\mathbf{V}_n| \cdot T \quad (45)$$

### c) Vecteur des charges nodales équivalentes

Connaissant l'expression des déplacements dans l'élément dalle :

$$\mathbf{u} = [\mathbf{N}] \cdot \delta \quad (46)$$

le vecteur des forces nodales équivalentes aux charges locales s'écrira :

$$\mathbf{S} = - \int_1^m [\mathbf{N}_c]^T \mathbf{p} |\mathbf{V}_t| d\chi - [ [\mathbf{N}_{c1}] \mathbf{p}_1 + [\mathbf{N}_{cm}] \mathbf{p}_m ] \quad (47)$$

Pour effectuer cette intégrale, il est nécessaire de déterminer pour chaque valeur du paramètre  $\chi$  les abscisses curvilignes  $\xi_c$ ,  $\eta_c$  et  $\zeta_c$  correspondantes. Pour cela, il faut résoudre la système non linéaire à trois inconnues :

$$\mathbf{X}(\xi_c, \eta_c, \zeta_c) = \mathbf{X}_c(\chi) \quad (48)$$

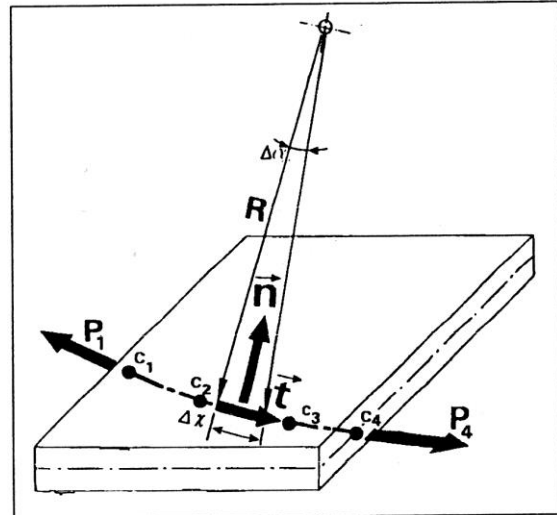


Figure 26 : Elément de dalle traversé par un câble de précontrainte.

Ainsi ce modèle permet de faire passer un nombre quelconque de câbles à travers l'élément en sommant les charges nodales équivalentes à chacun d'eux. On notera que la forme de chaque câble est considérée comme une courbe quelconque de l'espace, et que la tension peut varier le long de cette courbe, ce qui permet de tenir compte des pertes de précontrainte, au niveau du calcul des forces nodales équivalentes.

#### Remarque :

De ce vecteur des forces nodales s'appliquant sur des éléments "dalles", on ne gardera que les composantes selon  $w$ ,  $\theta_x$  et  $\theta_y$ , puisque dans la relation (46), le vecteur déplacement  $\delta$  comprend les composantes  $u$  et  $v$  selon les axes  $X$  et  $Y$ .

## 2.6 Applications

Le modèle de calcul présenté ci-dessus sera illustré par trois exemples d'application. Le premier est destiné à comparer les résultats obtenus en tenant compte de l'interaction dalle-porteurs et ceux obtenus avec le modèle "dalles sur appuis fixes". Le deuxième illustrera le calcul d'un bâtiment sur plusieurs étages avec la prise en compte d'un radier sur sol élastique et pieux. On verra en particulier comment on peut obtenir directement la descente des charges. Le dernier exemple concernera le calcul d'une dalle précontrainte avec la détermination de la géométrie du câble et des pertes pour les différentes étapes de mise en tension.

Cependant, avant d'aborder ces exemples, on commencera par faire une comparaison entre le modèle "bâtiment" proposé ci-dessus et le calcul en "coque" pour avoir une estimation du gain en temps calcul et en place disque.

### 3 EXEMPLES D'APPLICATION

#### 3.1 Comparaison du modèle "dalle-murs-colonnes" avec le modèle "coque"

Le calcul portera sur une dalle carrée appuyée le long de ses bords sur quatre murs (Figure 27).

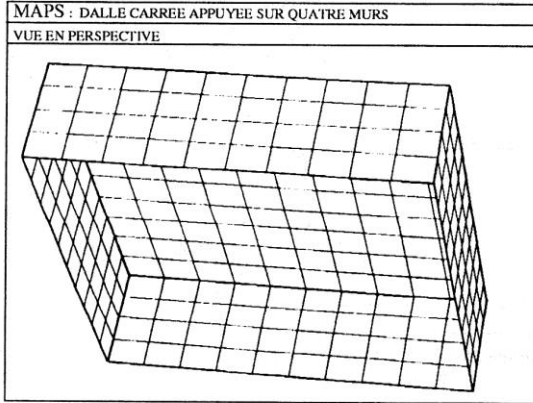


Figure 27 : Dalle carrée appuyée sur des murs.

En modélisant par éléments finis la dalle et les porteurs, les noeuds appartenant à la dalle et aux murs augmentent considérablement la largeur de bande de la matrice assemblée de la structure. Or, si la place disque nécessaire au stockage est proportionnelle à cette largeur de bande, le temps calcul est proportionnel à son carré. Si l'on utilise l'algorithme frontal, [12] pour la résolution du système d'équations, le modèle proposé ci-dessus aboutit à une largeur de front environ quatre fois plus petite que le calcul en coques. En effet, avec les éléments "coques", les noeuds appartenant à la fois à la dalle et aux murs ont six degrés de liberté. Ceux-ci ne peuvent être éliminés par substitution de Gauss qu'une fois assemblés les éléments dalles et murs auxquels ils sont connectés. Par contre, avec le modèle "bâtiment", il devient possible, en ces mêmes noeuds, d'éliminer les deux rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  (qui n'appartiennent qu'à la dalle) sans attendre l'assemblage des éléments "murs". Ainsi, au lieu des six variables, il ne restera qu'un seul degré de liberté (le déplacement  $w$ ) par noeud qui ne peut être éliminé au moment où les éléments "dalles" sont assemblés. Si, en plus, on tient compte du fait que le nombre total d'équations est réduit d'un facteur trois environ (le nombre de degrés de liberté par noeud est de cinq ou six pour les éléments "coques" et de trois ou un pour la combinaison "dalle-mur"), on s'explique alors la réduction considérable du temps de calcul. Pour la dalle carrée, la comparaison des temps de calcul sur un miniordinateur MICRO-VAX II est donnée par le tableau 1. Quant à la place disque nécessaire au stockage des matrices de rigidité élémentaires et de la matrice assemblée de la structure, on la réduit approximativement d'un facteur six à huit en utilisant le modèle "bâtiment".

#### 3.2 Dalle rectangulaire sur murs et colonnes

Cet exemple concerne une dalle rectangulaire reposant sur des murs et des colonnes (Figure 28).

Elle est soumise à une charge uniformément répartie.

		Modèle bâtiment	Modèle coque
Nombre total de noeuds		1 361	1 361
Nombre total d'équations		2 500	7 000
Nombre de degrés de liberté pour la largeur de "front" maximale		176	720
Place disque nécessaire au stockage des matrices (en Mbytes)		5 Mb	40 Mb
Temps de calcul en secondes	Matrice des éléments	140	876
	Assemblage et résolution	585	14 784
	Efforts dans les éléments	76	197
	TOTAL	792 (env. 13 min.)	15 857 (env. 4 h. 24 min.)

Tableau 1 : Comparaison des modèles "coques" et "bâtiment" pour la dalle carrée appuyée sur quatre murs.

Le calcul est fait de quatre manières :

1. Comme dalle avec des appuis ponctuels ( $w = 0$ ) au droit des colonnes et des appuis linéaires avec rotation bloquée ( $w = 0$  et  $\theta_y = 0$ ) le long des murs (cas 1).
2. Comme dalle avec des appuis ponctuels ( $w = 0$ ) au droit des colonnes et des appuis linéaires avec rotation libre ( $w = 0$ ) le long des murs (cas 2).
3. Selon le modèle proposé précédemment et qui tient compte de l'interaction dalle-porteurs (cas 3).
4. Avec des éléments coques + barres de l'espace pour avoir une solution de référence (cas 4).

Les résultats du calcul selon le modèle dalle + murs + colonnes (cas 3) sont représentés graphiquement :

- a) La répartition des moments fléchissants  $M_x$  sous forme de courbes de niveau (Figure 29) et de diagramme (Figure 30).
- b) Les trajectoires des faces principales (sections perpendiculaires aux moments principaux) pour avoir une idée de l'apparition des lignes de rupture (Figure 31).
- c) La déformation du mur dans son propre plan (Figure 32) ainsi que le diagramme des efforts normaux dans le mur pour mettre en évidence la réaction répartie agissant sur la dalle (Figure 33).

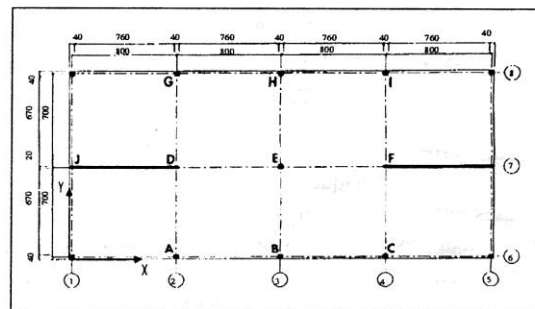


Figure 28 : Schéma de la dalle.

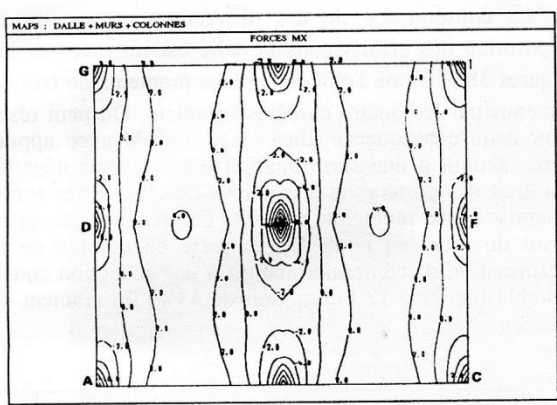


Figure 29 : Moments de flexion  $M_x$  dans la zone A-C-I-G de la dalle.

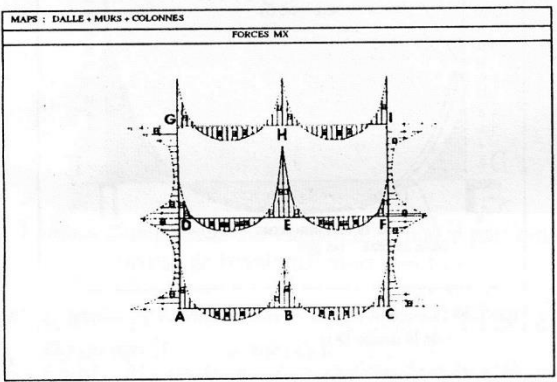


Figure 30 : Diagramme des moments  $M_x$  dans la zone A-C-I-G de la dalle.

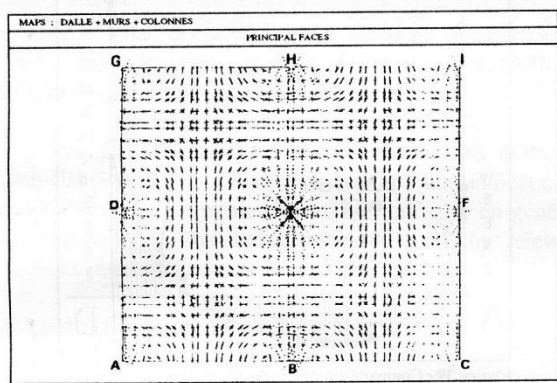


Figure 31 : Trajectoires des faces principales dans la zone A-C-I-G de la dalle.

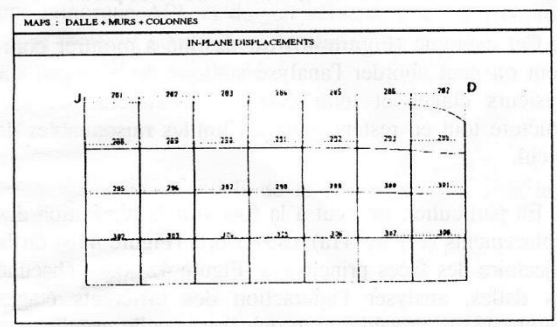


Figure 32 : Déformation du mur.

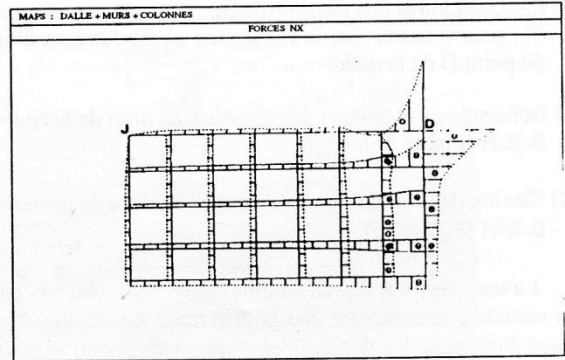


Figure 33 : Efforts normaux (verticaux) dans le mur.

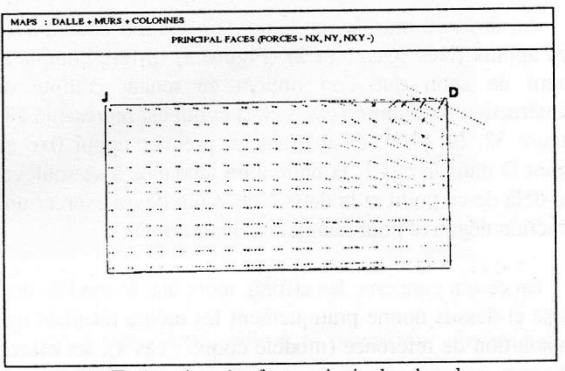


Figure 34 : Trajectoires des faces principales dans le mur.

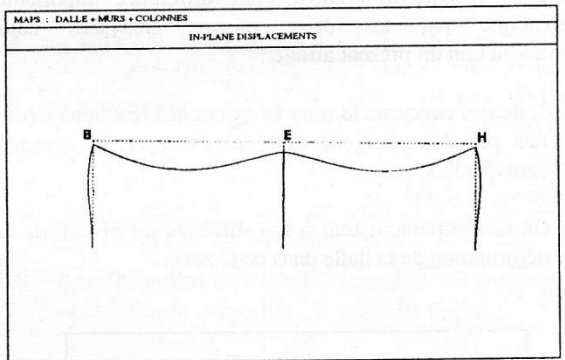


Figure 35 : Déformée de la dalle et des colonnes le long de la coupe B-E-H.

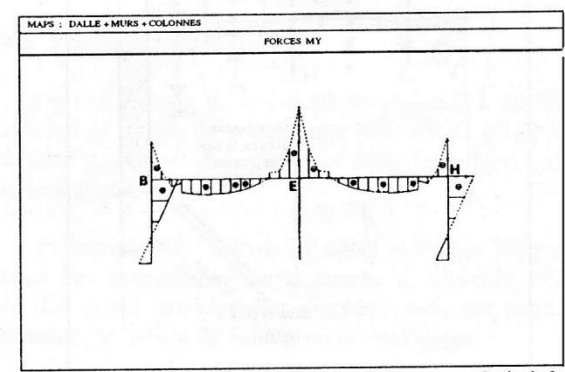


Figure 36 : Flexion dans la dalle et les colonnes au droit de la coupe B-E-H.



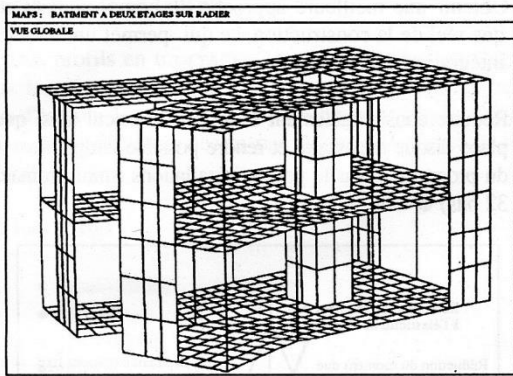


Figure 40 : a) Vue globale du bâtiment sans les pieux,  
b) Vue en élévation du bâtiment avec le radier et les pieux.

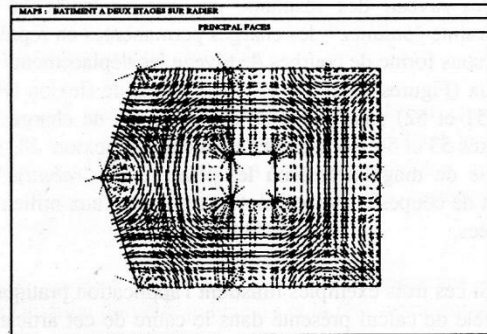
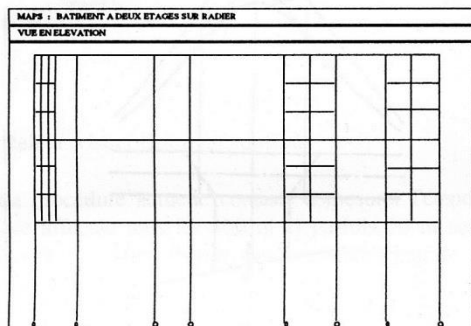


Figure 42 : Trajectoires des faces principales dans une partie de la dalle supérieure.

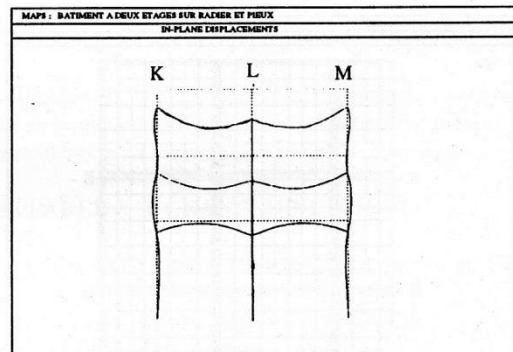


Figure 43 : Coupe A-B-C : déformation des dalles, des colonnes, du radier et des pieux .

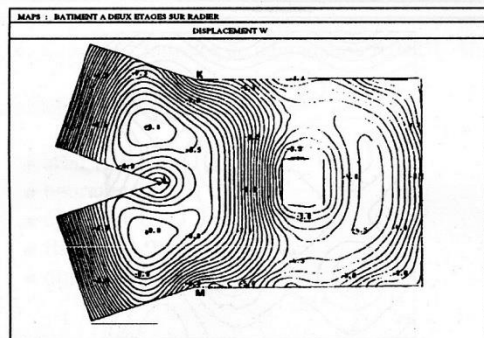


Figure 41a : Déplacements verticaux dans la dalle supérieure.

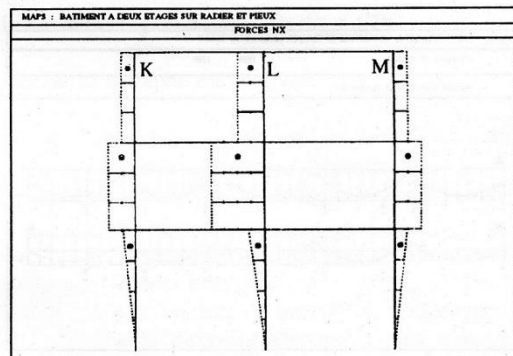


Figure 44 : Coupe A-B-C : efforts normaux dans les colonnes ("descente des charges").

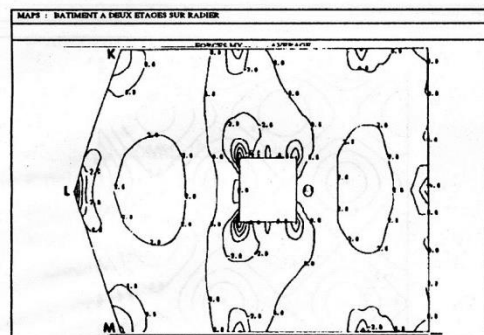


Figure 41b : Moment de flexion dans une partie de la dalle supérieure.

### 3.4 Dalle précontrainte

Ce dernier exemple concerne une dalle rectangulaire à champs réguliers s'appuyant sur des colonnes et soumise à deux cas de charge : le poids propre et la précontrainte. Vu la symétrie, seul le quart de la structure est calculé. Le schéma de câblage est représenté sur les figures 45 en plan et 46 en coupe. Le calcul de la tension le long du câble en tenant compte des pertes dues aux frottements et aux reculs des clavettes est résumé sur la figure 47.

Pour éliminer les pointes de moments négatifs (en tenant compte des dimensions réelles des piliers : Figure 48), les piliers sont modélisés sur toute leur section par un milieu élastique équivalent et non pas remplacés par des appuis ponctuels.

Au niveau des résultats, on voit comment la précontrainte "balance" les charges permanentes en représentant sous forme de courbes de niveau les déplacements verticaux (Figures 49 et 50) et les moments de flexion (Figures 51 et 52) sous l'effet de ces deux cas de charge. Les figures 53 et 54 montrent les moments de flexion  $M_y$  sous forme de diagrammes, où les efforts sont "rabattus" au droit de coupes correspondant aux piliers et aux milieux de travées.

Si ces trois exemples illustrent l'application pratique du modèle de calcul présenté dans le cadre de cet article, on peut dire, en conclusion, que le développement d'un tel modèle a été motivé par deux raisons principales :

1. Obtenir une meilleure approche du comportement statique réel de la construction, ce qui permet une meilleure intégration dans un système CAO.
2. Réduire considérablement le temps de calcul ainsi que la place disque nécessaire et rendre possible l'implémentation du programme sur les petites installations (mini ordinateur 32 bits) ⑤

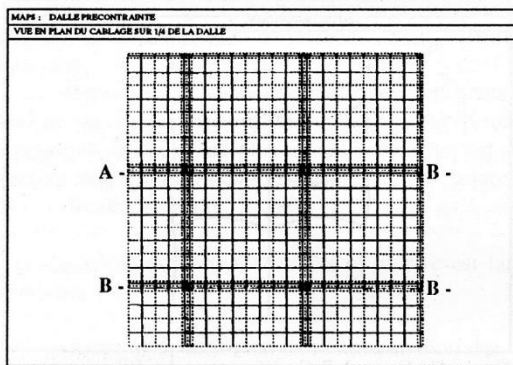


Figure 45 : Vue en plan du système de câblage pour un quart de la dalle (on remarquera le resserrement des câbles au-dessus des piliers).

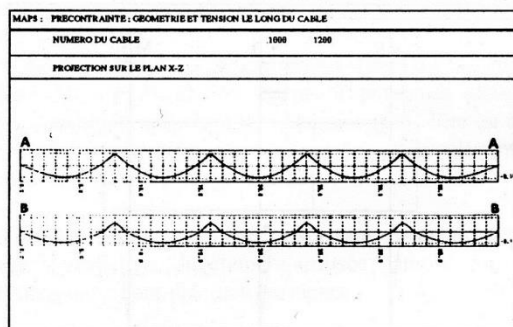


Figure 46 : Vue en coupe des câbles de précontrainte :  
1) A-A : sur piliers.  
2) B-B : sur travée.

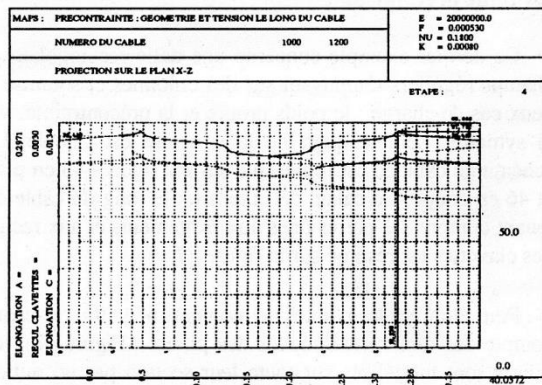


Figure 47 : Pertes dues aux frottements et aux reculs des clavettes pour quatre étapes de mise en tension.

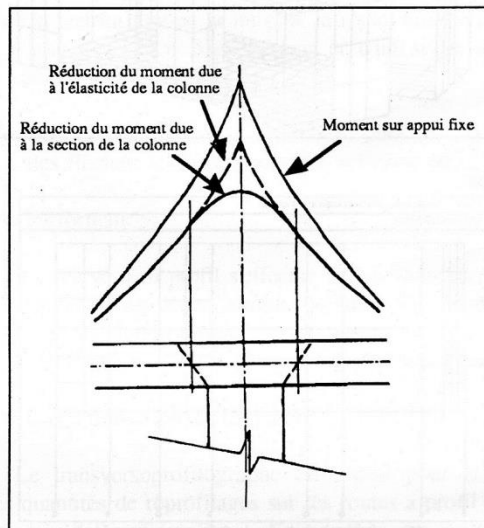


Figure 48 : Réduction des moments négatifs due à l'élasticité du pilier et aux dimensions de sa section.

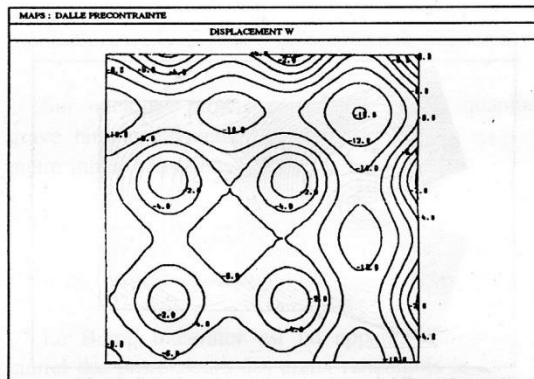


Figure 49 : Déplacements verticaux sous l'effet des charges permanentes.

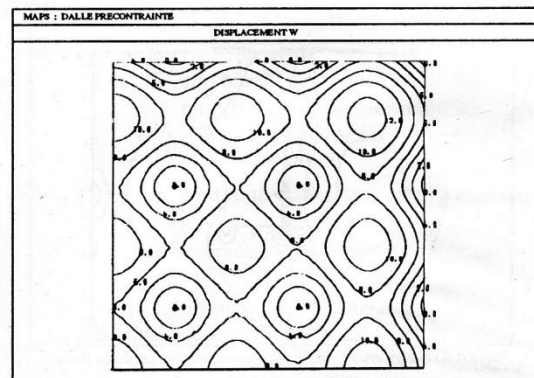


Figure 50 : Déplacements verticaux sous l'effet de la précontrainte.

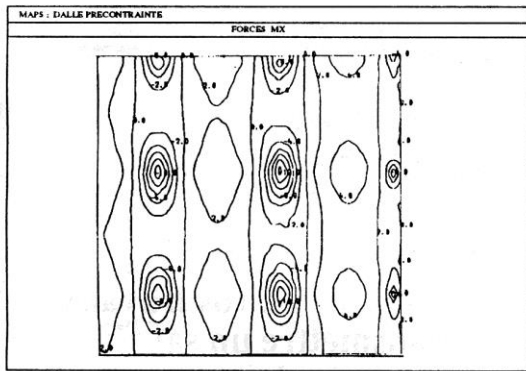


Figure 51 : Moments de flexion  $M_x$  dus aux charges permanentes.

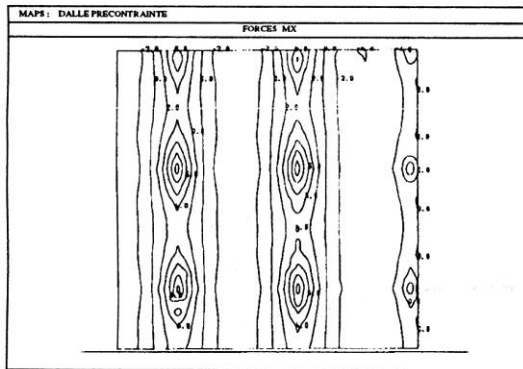


Figure 52 : Moments de flexion  $M_x$  dus à la précontrainte.

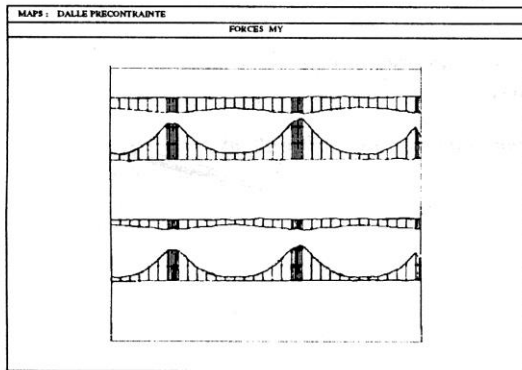


Figure 53 : Diagramme des moments de flexion  $M_y$  au droit des piliers et des milieux de travées sous l'effet du poids propre.

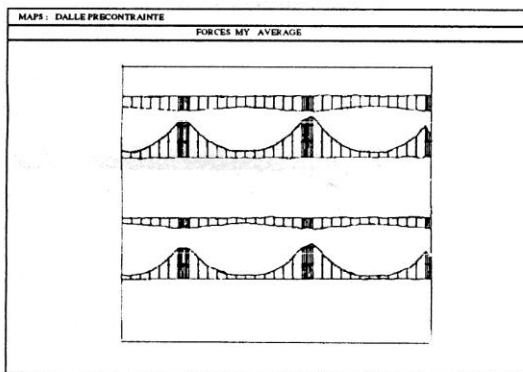


Figure 54 : Diagramme des moments de flexion  $M_y$  au droit des piliers et des milieux de travées sous l'effet de précontrainte.

#### 4 BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Bouberguig : Calcul statique des coques nervurées et précontraintes, Thèse N°473 (1983) présentée au Département de génie civil de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.
- [2] A. Bouberguig : Calcul des coques nervurées et précontraintes par éléments finis avec pré- et postprocesseur, Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics N°422, Série : Théorie et méthodes de calcul 262, Paris, février 1984.
- [3] J. Jirousek : Comment on evaluation of shear forces and reactions from transverse shear deformations by using isoparametric quadratic Mindlin plate elements, Technical notes, Computer & Structures Vol. 19, N°5/6, pp. 899-903, 1984, USA.
- [4] J. Jirousek, A. Bouberguig : A contribution to evaluation of shear forces and reactions of Mindlin plates by using isoparametric elements, Computer & Structures, Vol. 19, N°5/6, pp. 793-800, 1984, USA.
- [5] M. H. Derron et J. Jirousek : Eléments spatiaux de barres courbes, Publications I.S.B.S.E., 36-11, 65-87 1976.
- [6] O. C. Zienkiewicz : The finite element methode in engineering science, McGraw-Hill Book Company, New York, 1979.
- [7] E. Hinton et H. C. Huang : Shear forces and twisting moments in plates using Mindlin elements, Eng. Comp., Vol. 3, pp. 129-142, June 1986.
- [8] T. Kant et E. Hinton : Mindlin plate analysis by segmentation method, J. Engng. Mech. ASCE, Vol. 1, pp. 537-556, 1983.
- [9] P. A. Eperon : La CAO et l'ingénieur civil. Application à la construction des bâtiments, Revue "Chantiers", Vol. 1, pp. 29-41, Suisse, Janvier 1986.
- [10] P. A. Eperon : Contribution à l'analyse et au dimensionnement heuristique des structures élastiques, Thèse de doctorat présentée au Département de génie civil de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (1978).
- [11] R. J. Cope et L. A. Clark : Concrete Slabs : Analysis on Design, Elsevier Applied Science Publishers, New York, 1984.
- [12] B. M. Irons : A frontal solution for finite element analysis, Int. J. Num Meth. Engg. Vol. 2, pp. 5-32, 1970.
- [13] B. Smith, J. Wellington : Initial Graphics Exchange Specification (IGES), U.S. Departement of Commerce, National Bureau of Standards, avril 1986.
- [14] W. H. Dilger, A. Ghali : Shear Reinforcement for Concrete Slabs, ASCE, Vol. 107, N° ST12, pp. 2403-2420, Dec. 1981.