

CONTRIBUTION DES ARMATURES A LA RIGIDITE DE TORSION D'UNE SECTION EN BETON ARME

Par

Bernard FOURE

Ingénieur ECP, Directeur du Département "Structures" au CEBTP, Paris

Naceur Eddine HANNACHI

Docteur es Sciences, Maître de Conférences à l'Université de Tizi-Ouzou

Résumé

Les armatures longitudinales présentes dans une section en béton armé contribuent de façon non négligeable à la résistance vis-à-vis de la torsion.

Les différents auteurs ne prennent pas en compte l'aspect armatures dans l'évaluation de la rigidité de torsion. Ceci est dû au fait qu'il n'existe pas de modèle permettant d'insérer la contribution des armatures dans l'évaluation de la rigidité de torsion.

Le présent article propose une méthode rigoureuse permettant de calculer la contribution des armatures longitudinales, basée sur un phénomène analogue.

Mots clés : torsion - rigidité - béton armé.

1 INTRODUCTION

Les armatures longitudinales continues et adhérentes au béton contribuent directement à la résistance à l'effort normal et au moment fléchissant. Leur contribution se calcule facilement à partir des aires A_i de leur section traitées comme des éléments $d\Sigma$ de la section droite ne différant de ceux du béton que par leur module. Cependant, avant fissuration, la contribution des armatures est faible et souvent négligée.

Les termes dus aux armatures dans le calcul des contraintes et des déformations se transposent alors facilement en élasticité non-linéaire. Par exemple, aux termes dus au béton dans les rigidités, il faut ajouter les termes suivants dus aux armatures :

$$\text{dans } \overline{EA} : \sum_i E_{ai} \cdot A_i$$

$$\text{dans } \overline{EI} : \sum_i E_{ai} \cdot y_{ai}^2 \cdot A_i$$

Vis-à-vis de la torsion, l'influence des armatures, aussi bien longitudinales que transversales, est généralement négligée tant que le béton n'est pas fissuré. Cependant Karlsson [1] a trouvé, par un raisonnement qu'il conviendrait de vérifier, un accroissement notable de la rigidité de torsion dû aux armatures (par exemple, près de 15% d'accroissement par rapport au béton seul, pour une section carrée armée longitudinalement aux quatre angles, avec un pourcentage géométrique de 2%).

Après fissuration, les armatures transversales et longitudinales jouent un rôle fondamental lorsque les fissures sont inclinées (*mécanisme du treillis*). Dans le problème qui nous préoccupe, les fissures sont droites et seules les armatures longitudinales peuvent jouer un rôle, par effet de goujon.

Les essais montrent cependant que c'est le béton qui joue toujours le plus grand rôle.

Compte-tenu de la contribution essentiellement *discontinue* des armatures (aire discontinue et intervention seulement dans les sections de fissures) on ne peut pas reprendre le raisonnement précédent, dans l'hypothèse d'un milieu continu fictif de module G variable représentant le comportement moyen d'une zone de poutre fissurée, en y incluant des termes dus aux armatures. Il faut un raisonnement spécifique qui va être développé ci-dessous, de façon à donner une base logique à la recherche d'expressions semi-empiriques.

2 RAIDEUR DUE A L'EFFET DE GOUJON

2.1 Ordre de grandeur de la rotation et du glissement dans une section de fissure

La rotation concentrée dans une section de fissure peut être estimée, certainement par excès, par l'expression :

$$\delta\theta = \left(\frac{1}{GK} - \frac{1}{G_o K} \right) C \cdot s_m \quad (1)$$

En appelant r la distance à l'axe de rotation de l'armature qui en est la plus éloignée, le glissement maximal au niveau d'une armature sera :

$$g = r \cdot \delta\theta \quad (2)$$

A partir des valeurs expérimentales connues de s_m , G_o , K et GK (rigidité sécante) on peut calculer le glissement dans les différents essais réalisés. On se place dans la phase de développement maximal de la fissuration et sous une valeur du couple C égale au tiers du couple C_o qui provoquerait la fissuration inclinée due au cisaillement dans la poutre homogène (élasticité linéaire).

Pour différents essais relatifs à des sections pleines ou creuses, le tableau (1) présente les résultats de ce calcul. En moyenne, le glissement est d'environ 8 millièmes de mm, ce qui est très petit. La valeur maximale (près de 2 centièmes de mm) est obtenue pour le plus petit pourcentage d'armatures et une section creuse, la valeur minimale ($3.5 \cdot 10^{-3}$ mm) pour le plus grand pourcentage d'armatures et une section pleine. Ceci met bien en évidence l'influence de l'armature.

Des glissements aussi petits, de l'ordre d'un centième de mm, justifient bien l'hypothèse du *comportement linéaire vis-à-vis de l'effet de goujon*.

Repère	C_o (KNm)	$G_o K$ (KNm ²)	Phase	s_m (mm)	C (KNm)	$\overline{GK^{(*)}}$ (KNm ²)	$\delta\theta$ (10 ⁻⁶ rd)	r (mm)	g (10 ⁻³ mm)
KE 10	41.3	52700	C	64	13.8	18700	30	240	7.3
KE 11	27.6	39300	C	74	9.2	10800	46	240	11.0
KE 12	32.0	45200	B	76	10.7	18200	27	240	6.4
KE 13	25.6	35200	C	71	8.5	16800	19	240	4.5
KE 14	39.9	52600	C ₁	78	13.3	18900	35	240	8.4
KE 15	29.2	39700	B	104	9.7	21600	21	240	5.1
KE 16	19.9	26000	D	220	6.6	15200	40	208	8.3
KE 17	37.3	50800	C	103	12.4	19000	42	240	10.1
KE 18	26.6	34800	C	89	8.9	7800	79	240	18.9
KE 19	37.9	54500	C	63	12.6	27100	15	240	3.5
KE 20	31.2	39200	C	63	10.4	13200	33	240	7.9
KE 23	9.41	7300	C	99	3.14	3270	52	184	9.7
KE 24	4.74	2750	C	84	1.58	1440	44	181	7.9
KE 25	1.12	340	C	51	0.373	205	37	181	6.7

(*) rigidités sécantes

Tableau 1 : Glissement maximal au niveau de l'armature, dans une section de fissure.

2.2 Relation entre la force transversale et le glissement

Sous sa forme générale, le problème peut être posé

de la façon suivante : un plan de glissement sépare deux milieux élastiques semi-infinis qui sont traversés par une barre élastique perpendiculaire au plan précédent. Quelle est alors la relation transversale à la barre et le glissement relatif ?

Ce problème a été résolu pour l'application, en mécanique des sols, au comportement d'un pieu sous l'action d'une force transversale, ou au comportement d'une barre de clouage du sol. La solution en est rappelée par Schlosser [2].

2.2.1 Réaction normale sol-inclusion (selon Schlosser)

La présence d'inclusions horizontales dans un massif de frottant, à parement vertical et à surface horizontale, a pour effet de modifier la forme de la surface de rupture potentielle et de la rendre perpendiculaire à la direction des inclusions.

Lorsque ces dernières ont une certaine rigidité (rigidité résultant soit du fait qu'il faille les battre, soit du fait qu'elles soient entourées d'une épaisse couche de coulis, dans le cas de barres scellées au terrain), elles sont sollicitées en plus de la traction, par des efforts de flexion et de cisaillement, à la manière d'un pieu soumis à une force horizontale, et à un moment en tête. Ce problème de pieu sollicité en tête a été étudié et expérimenté par les laboratoires des Ponts et Chaussées à Paris.

Le calcul fait en élastoplasticité par la méthode du coefficient de réaction du sol, conduit à la résolution de l'équation :

$$EI \cdot \frac{d^4 y}{dz^4} + k_s \cdot y \cdot B = 0$$

k_s : Coefficient de réaction du sol.
 y : Déplacement latéral du pieu.
 B : Largeur du pieu.

La solution de cette équation introduit la notion de "longueur de transfert". Cette longueur est donnée par l'expression :

$$l_o = \sqrt[4]{\frac{4EI}{k_s \cdot B}}$$

Dans le cas d'un pieu fonctionnant comme un pieu infiniment long ($L \geq 3l_o$) et libre en tête, on obtient :

$$y_{\max} = y_o = \frac{2}{k_s \cdot B \cdot l_o} \cdot \left(T_o + \frac{M_o}{l_o} \right)$$

Remarque : Cette méthode n'est valable que lorsque les déplacements en tête ne dépassent pas quelques centimètres.

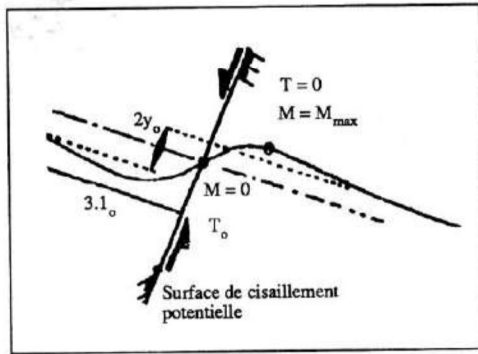


Figure 1 : Déformée schématique d'une barre sollicitée au cisaillement le long de la surface de rupture potentielle.

2.2.2 Relation effort transversal T équilibré par une armature - glissement relatif G des deux parties de béton séparées par la fissure

Notons :

- T : Effort transversal équilibré par une armature de diamètre ϕ traversant perpendiculairement un plan de fissure.
- g : Glissement relatif des deux parties de béton séparées par la fissure.

La transposition des résultats précédents à notre problème, permet d'écrire la relation :

$$T = \frac{E_{bo} \cdot \phi}{8} \sqrt{\pi \cdot \frac{E_a}{E_{bo}}} \cdot g \quad (3)$$

avec les notations suivantes :

- E_{bo} : Module de déformation longitudinale à l'origine du béton.
- E_a : Module de l'acier de la barre.
- ϕ : Diamètre de l'armature.

Pour vérifier la validité de cette formule, confrontons la à différents résultats d'essais.

2.2.3 Comparaison de la formule empirique $T = f(g)$ avec des résultats expérimentaux

Nous disposons, pour la littérature, de plusieurs résultats d'essais. Ceux-ci sont poussés jusqu'à rupture, donc bien au-delà du domaine linéaire.

a) Essais Hamadi - Regan [3]

Ce sont des essais de résistance à l'effort tranchant. Il s'agit de poutres où la charge est appliquée directement sur les armatures principales de flexion, par l'intermédiaire d'un bloc de béton désolidarisé du reste de la poutre. La rupture se produit par éclatement du béton d'enrobage des armatures.

La Figure 2 présente les résultats expérimentaux sous la forme de la force transversale T , rapportée à la force de rupture T_u , en fonction du glissement g . Les résultats concernent deux bétons (un normal, un léger) et trois diamètres d'armatures (on a exclu le diamètre $\phi 16$ avec le béton normal, car sa résistance est bien plus élevée que dans les autres essais, et les résultats divergent notablement de l'ensemble des autres essais).

	Béton	f_c MPa	Barres	$2T_u$ KN
•	Normal	30	2 $\phi 20$	6.00
II	"	20	2 $\phi 20$	5.60
0	Léger	20	2 $\phi 20$	5.00
*	"	21	2 $\phi 20$	4.75
□	"	21	2 $\phi 20$	4.65

Tableau 2

A partir de la résistance en compression du béton f_c , prise égale à 85% de la résistance mesurée sur cubes, on peut évaluer le module (en MPa) par :

$$E_{bo} = 11000 \cdot \sqrt[3]{f_c} \quad \text{pour le béton normal}$$

$$E_{bo} = 1650 \cdot \sqrt[3]{\rho_s^3 \cdot f_c} \quad \text{pour le béton léger, en admettant pour sa densité sèche } \rho_s = 1.55.$$

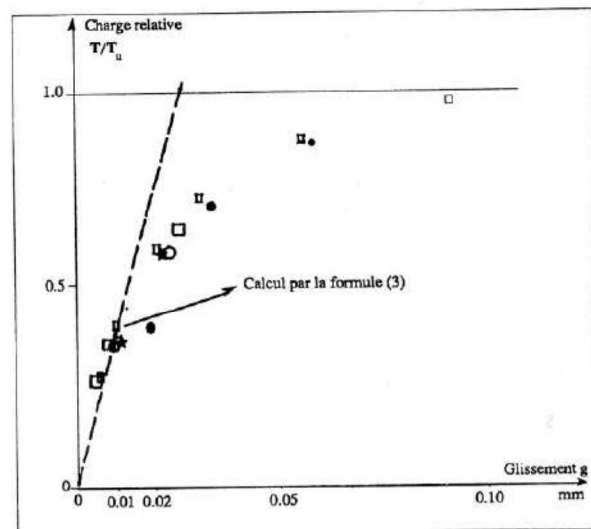


Figure 2

A partir du module E_{bo} moyen, on peut alors tracer la droite représentative de la formule (3). On constate (Figure 2) qu'elle représente convenablement les résultats expérimentaux moyens tant que le glissement reste inférieur à 0,01 mm.

b) Essais de Paulay et Park [4] et [5]

Ce sont des essais de résistance au cisaillement des

joint de reprise de bétonnage.

Pour étudier l'effet de goujon, cette surface est lissée et graissée. Des courbes force-glissement sont présentées pour divers diamètres de barre (Figure 3).

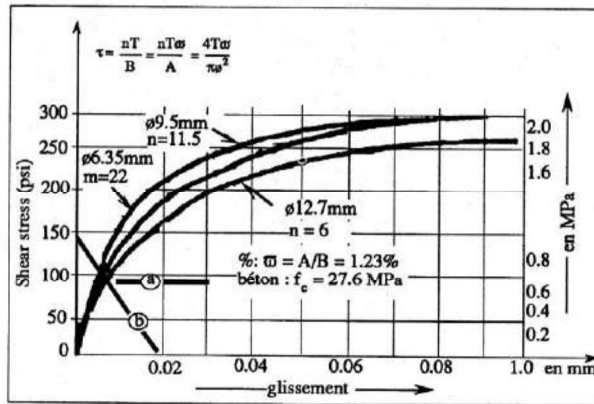


Figure 3

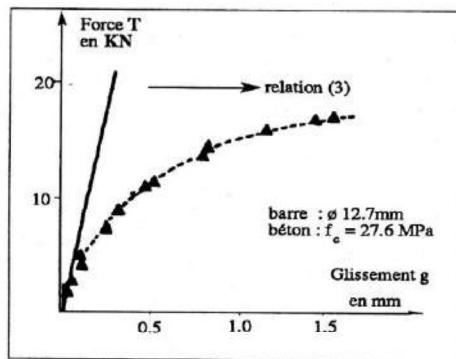


Figure 4

Il est difficile d'évaluer leur pente à l'origine ; par contre on peut comparer la pente de sécantes reliant l'origine à des points plus précis des courbes :

- Pour un cisaillement moyen $\tau = 0.6$ MPa.
- Pour les intersections avec la droite passant par les points ($g = 0.5$ mm ; $\tau = 0$) et ($g = 0$; $\tau = 1$ MPa).

On obtient alors les valeurs du tableau suivant :

$\varnothing$ (mm)	6.35	9.5	12.7
(a) $\frac{T}{\varnothing_g}$ (MPa)	4120	4290	4130
(b) $\frac{T}{\varnothing_g}$ (MPa)	3200	3460	3460

Ces valeurs permettent de vérifier la proportionnalité de T à $\varnothing$ et à g.

Pour le diamètre 12.7 mm, on dispose de résultats un peu plus précis dans le domaine des faibles glissements, reportés à la figure 4, sur laquelle on a porté aussi la droite représentant la formule (3), le module étant calculé à partir de la résistance par :

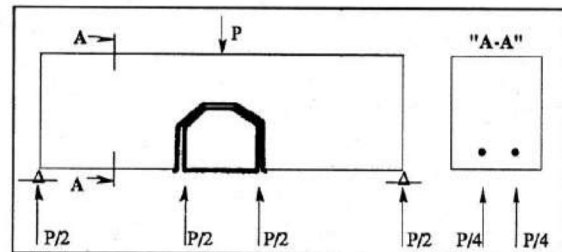
$$E_{bo} = 11000 \cdot \sqrt[3]{f_c} \quad (\text{en MPa})$$

On constate encore que cette formule donne une évaluation correcte de la pente à l'origine de la courbe force-glissement.

c) Essais H. P. J Taylor [6]

L'essai proposé par Taylor met bien en évidence l'effet de goujon des armatures. Cet essai est poussé jusqu'à rupture donc bien au-delà du domaine linéaire.

La charge totale P est appliquée sur la partie centrale du corps d'épreuve ; donc la fraction reprise pour chaque barre est P/4 comme indiqué ci-dessous :



La figure 5 présente les résultats expérimentaux sous la forme de la force transversale T = P/4 en fonction du glissement g.

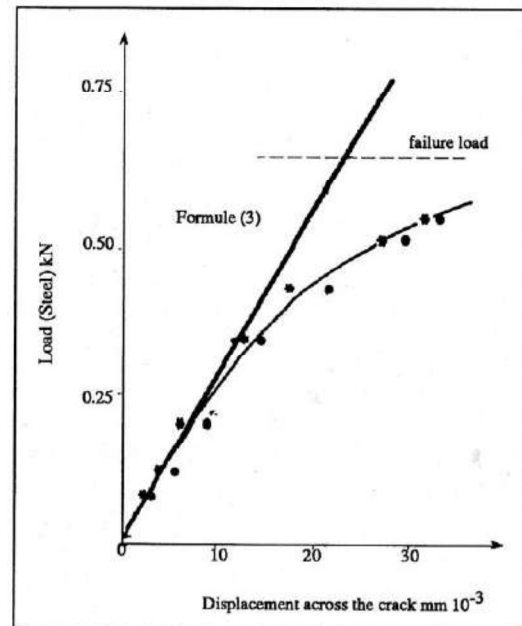


Figure 5 : Relation force-glissement expérimentale d'après H.P.J Taylor.

Ces résultats concernent le micro-béton ayant les caractéristiques suivantes :

Agrégats : 2.4 - 1.2 mm	58%
1.2 - 0.6 mm	20%
0.6 - 0.3 mm	15%
0.3 - 0.15 mm	7%

$$\frac{E}{C} = 0.4 \text{ et } \frac{A_{grt}}{C} = 4.5$$

A partir de la résistance en compression f_c , on évalue le module E (en kg/cm²) par la relation suivante :

$$E = 50\,000 \cdot (\sqrt[3]{f_c} - 1.5 + \log D)$$

D : diamètre du plus gros agrégat employé (en mm)
 f_c : Résistance en compression (en kg/cm²)
 Pour D = 2.4 mm et $f_c = 241$ kg/cm², on obtient :

$$E_{bo} = 28\,870 \text{ MPa}$$

Le tracé de la droite $T = \xi \cdot g$ (formule 3) donne encore une très bonne approche de la courbe expérimentale. Cela vient donc confirmer plus sérieusement la validité de l'analogie proposée, traduite par la formule (3), qui permet de connaître, pour un glissement donné, la valeur de la force transversale correspondante.

d) Essais de Soroushian, Obaseki, Rojas et Sim [7]

Ces essais étudient l'effet de goujon d'armatures au niveau de liaisons poutre-poteau dans une structure, en présence d'une fissure dans la zone de contact poutre-poteau.

Le dispositif expérimental et le spécimen d'essai sont rappelés respectivement aux Figures 6 et 7.

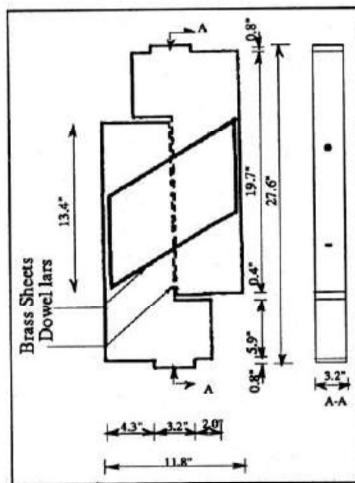


Figure 6 : Dowel test specimen.

Quatre essais ont été réalisés ; les caractéristiques des matériaux employés sont les suivantes :

Repère	F_c MPa	E_{bo} MPa	E_a MPa	ϕ cm
1	44.16	38400	$2.1 \cdot 10^5$	1.27
2	44.16	38400	$2.1 \cdot 10^5$	1.90
3	44.16	38400	$2.1 \cdot 10^5$	2.54
4	31.33	34280	$2.1 \cdot 10^5$	0.99

Tableau 4

Des courbes force-glissement sont présentées pour divers paramètres de barre (Figures 8).

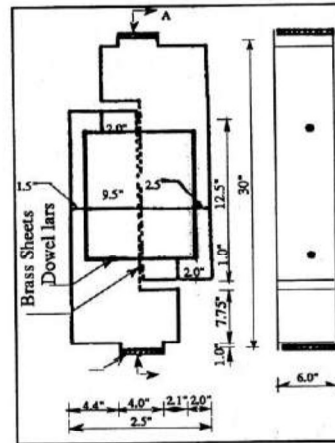


Figure 7 : Test specimen : (a) dowel bars, (b) Section A-A.

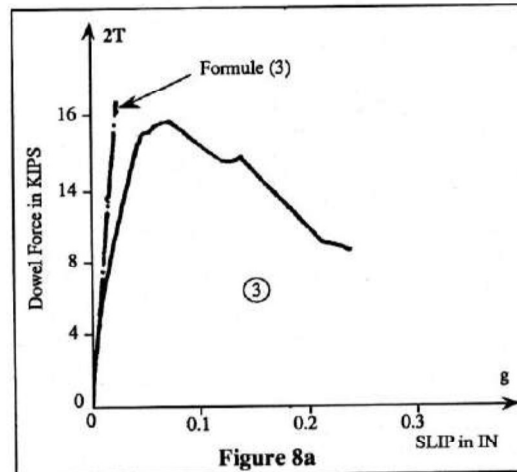


Figure 8a

Sur celles-ci, nous avons aussi reporté la droite représentant la relation (3).

Dans le domaine des faibles glissements, on constate que la correspondance est encore très bonne.

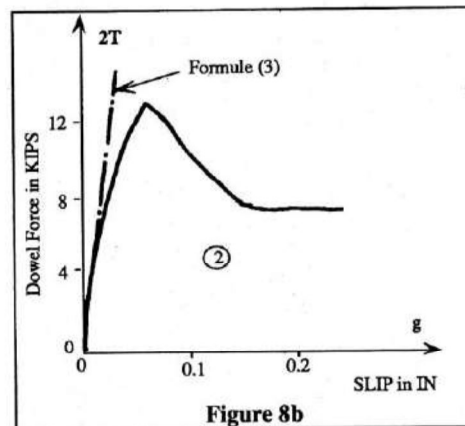
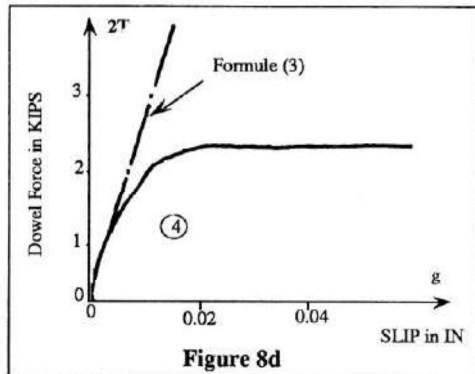
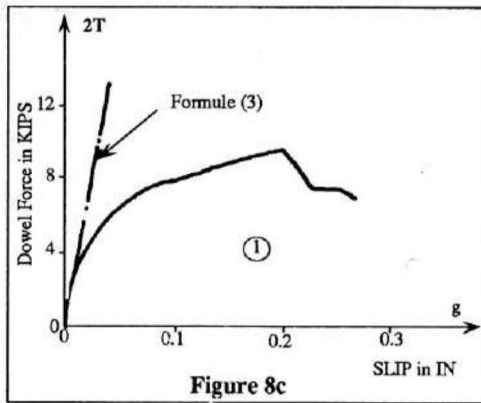


Figure 8b



2.3 Calcul de la raideur

Dans une section fissurée, la rotation "concentrée" $\delta\theta_1$ se fait autour de l'axe longitudinal z passant par le centre de torsion.

Le glissement au niveau de chaque armature, dont la distance au centre de torsion est r_i , est donné par :

$$g_i = r_i \cdot \delta\theta_1$$

La force transversale équilibrée par chaque armature est, d'après la formule (3) :

$$T_i = \frac{E_{bo} \cdot \phi_i}{8} \sqrt[4]{\pi \cdot \frac{E_a}{E_{bo}}} \cdot g_i$$

elle est perpendiculaire à la droite passant par le centre de torsion et l'armature considérée. La part C_a du couple de torsion équilibrée par les armatures est donc :

$$C_a = \sum_{i=1}^n T_i \cdot r_i = R_a \cdot \delta\theta_1 \quad (4)$$

ou :

$$C_a = \frac{E_{bo}}{8} \cdot \sqrt[4]{\pi \cdot \frac{E_a}{E_{bo}}} \cdot \delta\theta_1 \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot r_i^2$$

D'après (4), la raideur est donc :

(*) Ce problème a été résolu pour les sections à profil mince ouvert (8). Pour les sections creuses, après fissuration de flexion, le déplacement du centre de torsion par rapport à sa position initiale est très faible.

$$R_a = \frac{E_{bo}}{8} \cdot \sqrt[4]{\pi \cdot \frac{E_a}{E_{bo}}} \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot r_i^2 \quad (5)$$

Dans l'approche considérée, on a comme inconnue la position du centre de torsion (*) autour duquel se fait la rotation (nécessaire pour évaluer r_i).

3 CONCLUSION

L'analogie avec la théorie de Schlosser permet de proposer une relation entre la force transversale équilibrée par une armature longitudinale et le glissement correspondant.

La confrontation de cette relation avec différents résultats expérimentaux, montre que la concordance est très bonne ①

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. Karlsson : "Torsionnal stiffness of reinforced concrete structure in torsion". Journal of the Structural Division ASCE, Juin 1981.
- [2] F. Schlosser : "Analogies et différences dans le comportement et le calcul des ouvrages de soutènement en terre armée et par clouages au sol". Annales de l'ITBTP, Octobre 1983. Journées d'Etude sur les "renforcements et améliorations des sols".
- [3] Y.D Hamadi and P.E Regan : "Behaviour in Shear of beams with flexural cracks". Magazine of concrete Research, Juin 1980.
- [4] T. Paulay and R. Park : "Horizontal construction joints in cast in place reinforced concrete". American Concrete Institute, Special Publication SP 42 - 1974.
- [5] T. Paulay and R. Park : "Reinforced Concrete Structures". John Wiley and Sons, New York 1975 CHP 7.
- [6] H.P.J Taylor : "Investigation of the dowel shear forces carried by the tensile steel in reinforced concrete beams". Cement and Concrete Association 1969. Publication 42-431.
- [7] Soroushian, Obaseki, Rojas and Sim : "Analysis of dowel bars acting against concrete core". ACI Journal July/August 1986. Paper n° 83-59 PP 642-649.
- [8] N.E Hannachi : "Comportement en torsion mixte des poutres en béton armé à profil ouvert dans le domaine linéaire". Annales de l'ITBTP n°505, Juillet/Août 1992.