EVALUATION DES IMPEDANCES DYNAMIQUES DE FONDATIONS FILANTES PAR LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES
Première Partie : Formulation

Par
Mohamed HADID
Postgraduant, Ecole Nationale Polytechnique, Alger
Mounir Khaled BERRAH
Maître de Conférences, Ecole Nationale Polytechnique, Alger

Résumé

Les résultats d'une investigation numérique de la réponse dynamique de fondations filantes rigides, superficielles ou enterrées dans un sol visco-élastique, à des excitations harmoniques de translation et de balancement sont présentés en détail dans cet article. La méthode des équations intégrales aux frontières (MEIF) est utilisée conjointement avec une procédure analytique contournant des intégrations numériques de fonctions de Green singulières.

Mots clés : fondation filante • impédance dynamique • intéraction sol - fondation • méthode des équations intégrales aux frontières

1 INTRODUCTION

Le premier traitement numérique de la formulation intégrale aux frontières d'un problème d'élastodynamique a été donné par Cruse et Rizzo [4] et Cruse [5] en 1968. Cependant, Dominguez [6] a été le premier à étudier la réponse dynamique des fondations rigides superficielles et enterrées par la MEIF dans le domaine fréquenciel. Spyrakos et Beskos [8] [9] ont utilisé la MEIF dans le domaine temporel pour l'analyse dynamique bidimensionnelle des fondations rigides flexibles. Abascal et Dominguez [1] ont utilisé la MEIF pour étudier l'effet du sol sous-jacent et celui d'un substratum non rigide sur les fonctions d'impédance de fondations filantes.

Dans cet article, après une brève description des fonctions d'impédance, nous présentons le développement d'une formulation matricielle des équations intégrales pour le calcul de la réponse dynamique des fondations filantes rigides superficielles et enterrées. La transcription informatique de cette formulation est effectuée par l'élaboration d'un code de calcul. Ce code permet de calculer les mouvements rigides de translation et de rotation de fondations filantes (superficielles ou enterrées) reposant sur un demi-espace visco-élastique et soumises à des sollicitations harmoniques.

2 FONCTIONS D'IMPEDANCE : DEFINITION ET INTERPRETATION PHYSIQUE

Une étape importante dans les calculs actuels de fondations consiste à déterminer les fonctions d'impédance d'une fondation rigide et non pesante. Lorsque ces fonctions d'impédance sont connues, il est possible de calculer la réponse de la fondation réelle grâce à la méthode des "sous-structures" permettant de décomposer un problème donné en plusieurs sous-problèmes.

S'agissant de fondations filantes, les fonctions d'impédance correspondant aux modes de translation horizontale, de translation verticale et de balancement sont définies par la relation matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_h \\ F_v \\ M_\phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{hh} & 0 & K_{h\phi} \\ 0 & K_{vv} & 0 \\ K_{\phi h} & 0 & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_h \\ u_v \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Avec :

u_v : déplacement vertical,

u_h : déplacement horizontal,

ϕ : rotation autour d'un axe horizontal passant par o,

F_v : force verticale,

F_h : force horizontale,

M_ϕ: moment total autour d'un axe horizontal.

K_{hh}, K_{vv}, $K_{\phi\phi}$, $K_{h\phi}$ et $K_{\phi h}$ sont complexes et dépendent de la fréquence.

La partie réelle de ces composantes représente la rigidité et l'inertie du sol tandis que la partie imaginaire représente l'amortissement radiatif et éventuellement l'amortissement matériel du sol. La matrice d'impédance complexe induit un déphasage entre la sollicitation et la réponse. Les termes non-diagonaux $K_{h\phi}$ et $K_{\phi h}$ apparaissent parce que les modes de translation horizontale et de balancement sont toujours couplés, i.e qu'une force horizontale donne lieu non seulement à un déplacement horizontal, mais aussi à une rotation autour de l'axe horizontal perpendiculaire. Souvent négligeables pour les fondations superficielles, ces termes ($K_{h\phi}$ et $K_{\phi h}$) peuvent être très importants lorsqu'il s'agit de fondations enterrées.

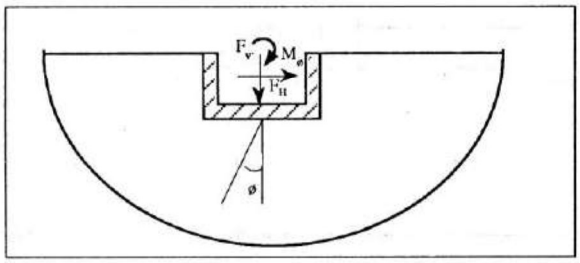


Figure 1 : Géométrie et notation d'une fondation enterrée.

Ces résultats sont exploités pour le traitement du même problème étendu au cas d'un milieu semi-infini, visco-élastique, en substituant les coefficients de Lamé initialement réels par leurs homologues complexes.

$$G^* = G(1 + 2\beta_i), \quad \lambda^* = \lambda(1 + 2\beta_i) \quad (2)$$

où β est le coefficient d'amortissement.

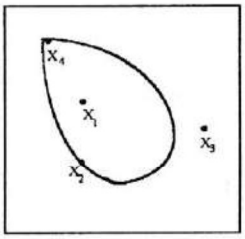
3 FORMULATION INTEGRALE

La formulation intégrale dans le domaine des fréquences des équations de l'élastodynamique se présente comme suit :

$$c_{ij}(y)\,u_j(y) + \int_\Gamma T_{ij}^{(n)\omega}(x,y)\,u_j(x)\,ds(x) = \int_\Gamma U_{ij}^{\omega}(x,y)\,t_j^{(n)}(x)\,ds(x) \quad (3)$$

Avec :

$$c(y) = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } y = x_1 \\ \delta_{ij}/2 & \text{si } y = x_2 \\ 0 & \text{si } y = x_3 \end{cases} \qquad \delta_{ij} = \text{symbole de Kronecker}$$



x_1 : point intérieur

x_2 : point frontière régulier

x_3 : point extérieur

x_4 : point frontière anguleux

Γ représnte la frontière du domaine et $U_{ij}^{\omega}(x, y)$, $T_{ij}^{(n)\omega}(x, y)$ sont les fonctions de Green du milieu infini en termes de déplacement et de contraintes.

$$U_{ij}^{\omega}(x,y) = \frac{1}{2\pi\mu}\left\{\left[\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 K_2\left(\frac{sr}{c_1}\right) - K_2\left(\frac{sr}{c_2}\right)\right] r_{,i}\, r_{,j} - \left[\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \left(\frac{c_1}{sr}\right) K_1\left(\frac{sr}{c_1}\right) - \frac{c_2}{sr} K_1\left(\frac{sr}{c_2}\right) - K_o \frac{sr}{c_2}\,\delta_{ij}\right]\right\} \quad (4)$$

$$T_{ij}^{(n)w}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{s}{c_1}\left[\left(2\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 - 1\right) r_{,i}\, n_{,j} - 2\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 r_{,i}\, r_{,j}\, r_{,n}\right] K_1\left(\frac{sr}{c_1}\right) + \frac{s}{c_2}\left[2 r_{,i}\, r_{,j}\, r_{,n} - \delta_{ij}\, r_{,n} - r_{,j}\, n_{,i}\right] K_1\left(\frac{sr}{c_2}\right) - \frac{2}{r}\left[K_2\left(\frac{sr}{c_2}\right) - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 K_2\left(\frac{sr}{c_1}\right)\right] \left[r_{,j}\, n_{,i} + r_{,i}\, n_{,j} + \delta_{ij}\, r_{,n} - 4\, r_{,i}\, r_{,j}\, r_{,n}\right]\right\} \quad (5)$$

Où c_1 et c_2 sont respectivement les vitesses de propagation d'ondes de dilatation et de cisaillement, μ est le module de cisaillement du milieu, $s = i\omega$ est un paramètre complexe, $r = |x-y|$, enfin $K_o(z)$, $K_1(z)$ et $K_2(z)$ sont les fonctions de Bessel de seconde espèce d'ordre zéro, un et deux respectivement.

Le calcul des expressions (4) et (5) revient donc à calculer les fonctions de Bessel modifiées $K_o(z)$, $K_1(z)$ et $K_2(z)$. Ces fonctions présentent des singularités et par conséquent leurs intégrations présentent certains problèmes quand $r \Rightarrow 0$. Dans ce cadre, après quelques manipulations mathématiques en utilisant les propriétés des fonctions de Bessel modifiées [2], nous avons pu intégrer avec une procédure analytique les fonctions de Green singulières, par une intégration analytique de la fonction de Bessel modifiée $K_o(z)$.

Procédons à présent à la discrétisation du contour en éléments constants. L'équation intégrale (3) se met alors sous la forme discrétisée suivante :

$$c_{ij}(y)u_j(y) + \sum_{e=1}^{n} u_j^e \int_{\Gamma_e} T_{ij}^{(n)\omega}(x, y)ds_e(x) = \sum_{e=1}^{n} t_j^e \int_{\Gamma_e} U_{ij}^{\omega}(x, y)\, ds_e(x) \qquad (6)$$

où u_i^e et t_i^e sont les déplacements et les tensions aux nœuds au sein de l'élément e.

Les expressions analytiques des intégrales aux frontières apparaissant dans l'équation (6) présentant des singularités sont présentées dans [7].

Sous forme matricielle, l'équation (6) devient :

$$c\, u_i + \sum_{j=1}^{n} H_{ij}\, u_j = \sum_{j=1}^{n} G_{ij}\, t_j \qquad (7)$$

ou sous une forme condensée :

$$\hat{H}\, u = G\, t \qquad (8a)$$

$$\hat{H} = H + \frac{1}{2} I \qquad (8b)$$

où I est la matrice unité.

L'équation (8) sera utilisée pour la détermination de la matrice d'impédance dynamique. Les éléments de frontières sont divisés en deux parties. La première partie, identifée par l'indice c, désigne les éléments de contact sol-fondation ; la deuxième partie, identifiée par l'indice l, désigne les éléments de la surface libre.

En vertu de cette partition, l'équation (8.a) se réécrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} H^{cc} & H^{cl} \\ H^{lc} & H^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^c \\ u^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{cc} & G^{cl} \\ G^{lc} & G^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^c \\ t^l \end{Bmatrix} \qquad (9)$$

Comme le vecteur contrainte t^l est nul (surface libre), il vient :

$$\begin{bmatrix} H^{cc} & H^{cl} \\ H^{lc} & H^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^c \\ u^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{cc} \\ G^{lc} \end{bmatrix} \{ t^c \} \qquad (10)$$

Il est à noter que dans cet article, nous nous sommes basés sur une formulation en sous-structures pour l'évaluation des matrices d'impédance de fondations filantes rigides pour les deux types de contact sol-fondation : relâché ou parfait. Le type de contact sol-fondation relâché entraîne le découplage entre les degrés de libertés de la fondation et partant une réduction considérable de l'effort de calcul sans altération de la précision.

a) Cas de conditions aux limites relâchées

Dans ce cas, nous supposons que sur la surface, la charge verticale ne produit qu'un déplacement vertical et une charge horizontale n'engendre qu'un déplacement horizontal. Cela se traduit mathématiquement par $H_{12} = H_{21} = G_{12} = G_{21} = 0$.

Aussi, si tous les éléments de frontière se situent dans le même plan horizontal, on peut vérifier que tous les éléments de la matrice H_{ij} deviennent nuls.

d'où :

$$H = \frac{1}{2} I \qquad (11)$$

et :

$$\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u^c \\ u^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{cc} \\ G^{lc} \end{bmatrix} \{ t^c \} \qquad (12)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} u^c = G^{cc}\, t^c \\ \frac{1}{2} u^l = G^{lc}\, t^c \end{cases} \qquad (13)$$

$$t^c = \frac{1}{2} \left(G^{cc}\right)^{-1} u^c \qquad (14)$$

Déterminons à présent la relation force-déplacement au sein de l'interface sol-fondation. La relation cinématique, entre les degrés de libertés rigides de translation et de rotation et les déplacements des éléments de frontières, est donnée par les contraintes géométriques suivantes (Figure 2).

$$u_{1i} = u_1 \qquad (15a)$$

$$u_{2i} = u_2 + \varnothing\, r_{1i} \qquad (15b)$$

qui s'écrivent en notation matricielle :

$$u^c = T\, u_o \qquad (16)$$

Avec :

u_o : déplacement du centre de gravité de la fondation (deux translations et une rotation),

T : matrice de transformation.

Les forces correspondantes (Figure 2) appliquées dans les directions de u et de ø, peuvent être déterminées par intégration des contraintes de contact sur les éléments de frontière.

$$F_H = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} t_1^c \, dA_i \qquad (17a)$$

$$F_v = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} t_2^c \, dA_i \qquad (17b)$$

$$M_\phi = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} t_2^c \, r_{1i} \, dA_i \qquad (17c)$$

En notation matricielle, l'équation (17) s'écrit :

$$F = T^t A \, t^c \qquad (18)$$

où A est une matrice diagonale désignant "l'aire" de chaque élément de frontière de la fondation, d'où :

$$F = \frac{1}{2} T^t A \left(G^{cc}\right)^{-1} T u_o \qquad (19)$$

La matrice d'impédance K est définie comme étant

$$F = K u_o \qquad (20)$$

Ce qui prouve après identification avec l'équation (19) que la matrice d'impédance s'écrit comme suit :

$$K = \frac{1}{2} T^t A \left(G^{cc}\right)^{-1} T \qquad (21)$$

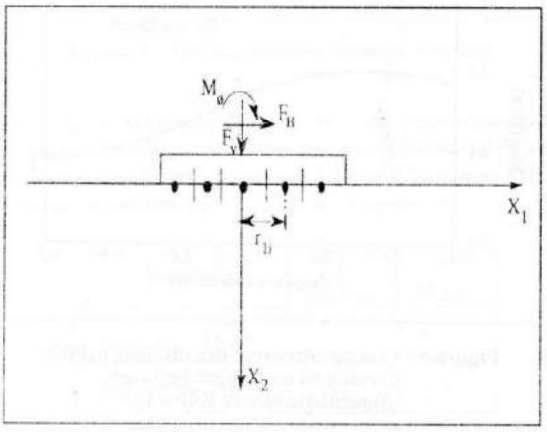


Figure 2

b) Cas des conditions aux limites parfaites

Dans ce cas, les conditions aux limites sont parfaites, i.e que les contraintes et les déplacements sur la surface sont supposés couplés. Il en découle qu'une discrétisation par élément de frontière de la surface libre est obligatoire.

L'équation (9) peut se réécrire comme suit :

$$H^{cc} u^c + H^{cl} u^l = G^{cc} t^c \qquad (22a)$$
$$H^{lc} u^c + H^{ll} u^l = G^{lc} t^c \qquad (22b)$$

à partir de l'équation (22b), on a :

$$u^l = (H^{ll})^{-1} G^{lc} t^c - (H^{ll})^{-1} H^{lc} u^c \qquad (23)$$

En substituant (23) dans (22 a), nous pouvons déterminer le vecteur contrainte à l'interface sol-fondation du vecteur déplacement.

$$t^c = (G^{cc}-H^{cl} (H^{ll})^{-1} G^{lc})^{-1} (H^{cc}-H^{cl} (H^{ll})^{-1} H^{lc}) u^c \qquad (24)$$

A partir des équations (16), (18) et (20) nous pouvons montrer que :

$$P = T^t A (G^{cc}-H^{cl} (H^{ll})^{-1} G^{lc})^{-1} (H^{cc}-H^{cl} (H^{ll})^{-1} H^{lc}) T u_o \qquad (25)$$

D'où la matrice d'impédance

$$K = T^t A (G^{cc}-H^{cl} (H^{ll})^{-1} G^{lc})^{-1} (H^{cc}-H^{cl} (H^{ll})^{-1} H^{lc}) T \qquad (26)$$

4 APPLICATIONS

Pour mettre en exergue la précision de la présente étude, les fonctions d'impédances de fondations filantes superficielles et enterrées sont analysées. En premier lieu, nous considérons la fondation superficielle reposant sur un sol semi-infini. Nous adoptons des conditions aux limites relâchées permettant le découplage des mouvements. L'interface sol-fondation est discrétisée en huit éléments de longueur égale (Figure 3). La figure 4 présente les mouvements horizontaux, verticaux et de balancement, du centre de la fondation rigide [variation de l'amplitude adimensionnelle

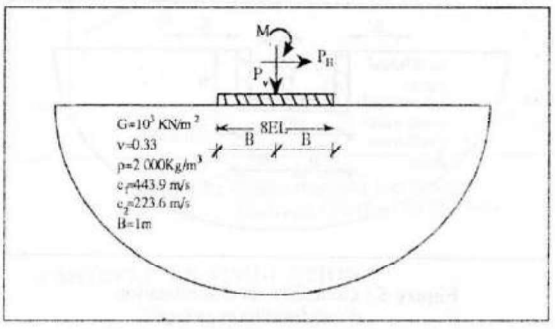
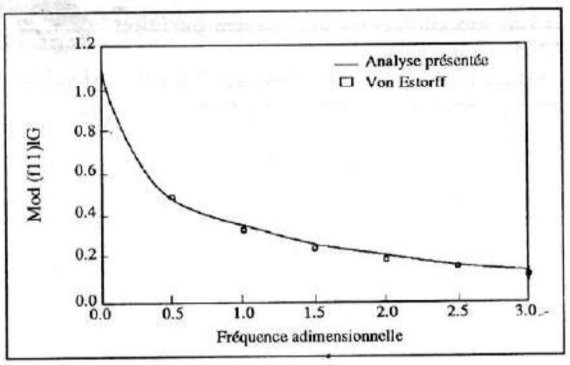
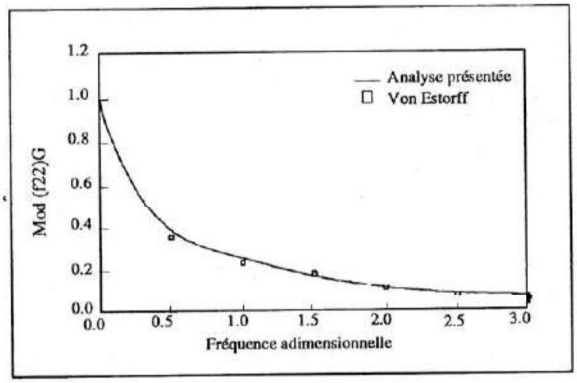


Figure 3 : Discrétisation et géométrie d'une fondation superficielle.





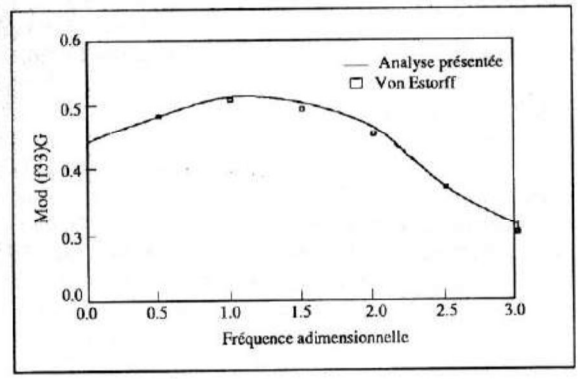


Figure 4 : Comparaison avec des résultats publiés. Conditions aux limites relâchées (fondation superficielle).

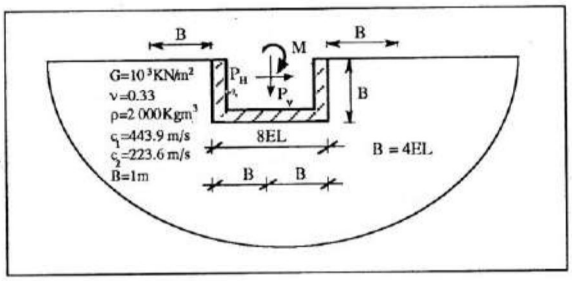
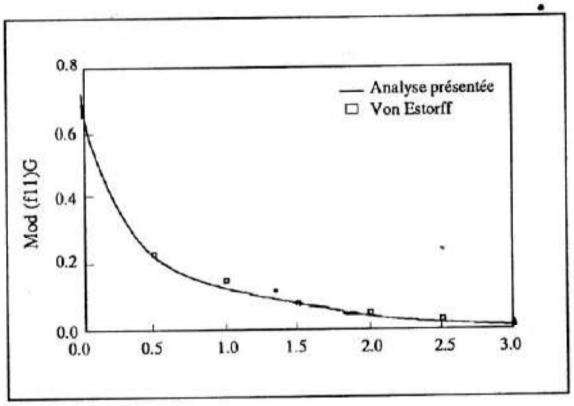
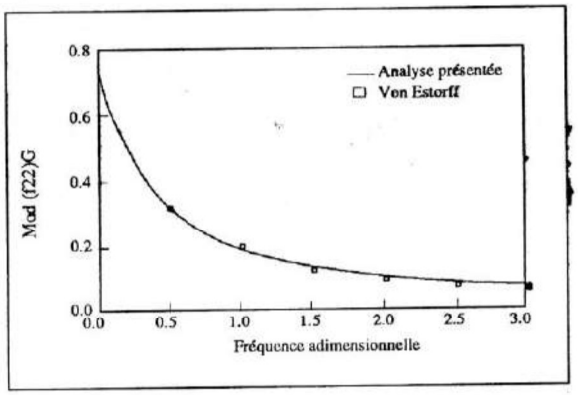


Figure 5 : Géométrie et discrétisation d'une fondation enterrée.

module (f_{ii})G) des fonctions d'impédances inverses (f_{ii})] sujette à des sollicitations harmoniques de différents types (horizontal, vertical et de balancement) sur une plage de fréquences adimensionnelles a_o allant de 0 à 3. En deuxième lieu, une fondation enterrée est considérée. Un contact parfait entre le sol et la fondation est supposé. Dans ce cas, la discrétisation de la surface libre dans le proche voisinage de la fondation est nécessaire (Figure 5).





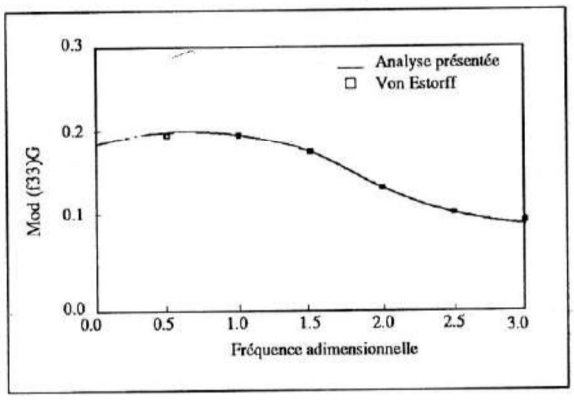


Figure 6 : Comparaison avec des résultats publiés. Conditions aux limites parfaites (fondation enterrée E/B = 1).

Les amplitudes des déplacements horizontal et vertical et du balancement de la fondation enterrée (E/B=1) en fonction de la fréquence adimensionnelle a_o sont présentées dans la figure 6.

La fréquence adimensionnelle est définie par :

$$a_o = \frac{\omega B}{c_s}$$

où B est la demi-largeur de la fondation filante et c_s la vitesse de l'onde de cisaillement.

On note que le maillage est choisi en correspondance avec la fréquence d'excitation considérée. Nous avons pris le soin de limiter à $\lambda_s/8$ la taille des éléments de frontières, λ_s étant la longueur d'onde de cisaillement.

Les fonctions d'impédances inverses obtenues par la présente formulation sont comparées avec celles obtenues par Antes et Von Estorff [3]. Les deux séries de résultats sont en parfait accord.

5 CONCLUSION

Tout au long de cet article, nous nous sommes intéressés à la modélisation numérique des problèmes dynamiques mettant en jeu les phénomènes d'interaction sol-fondation. Pour ce faire, nous avons opté pour la méthode des équations intégrales aux frontières, qui constitue un outil de calcul précis et efficace. En effet, elle permet, d'une part de modéliser rigoureusement les domaines infinis, et d'autre part de modéliser rigoureusement, au sein du solide, le milieu continu, ce qui lui vaut d'être beaucoup plus précise que la méthode des éléments finis surtout en ce qui concerne les contraintes qui sont sujettes aux erreurs.

Dans cet article, nous avons présenté une formulation intégromatricielle pour le calcul de la réponse dynamique des fondations filantes rigides superficielles et enterrées.

Dans une deuxième partie, nous fournirons quelques résultats sur l'influence de la discrétisation du champ libre de part et d'autre de la fondation, l'influence des propriétés mécaniques du sol telles que le coefficient de Poisson et l'amortissement, l'effet de l'enterrement et le type de contact sol-fondation ❸

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Abascal et J. Dominguez : "*Dynamic Behavior of strip footings on non-homogeneous viscoelastic Soils*". Proc. of international symposium on dynamic soil-structure interaction, Minneapolis, pp. 25-35, 1984.

[2] M. Abromowitz et I.A Stegun : "*Handbook of mathematical functions*". Dover publications, Inc, New York, 1970.

[3] H. Antes et O. Von Estorff : "*Dynamic response analysis of rigide foundations and of elastic structures by boundary element procedures*". Soil dynamics and earthquake engineering, Vol. 8, 2, pp. 68-74, 1989.

[4] T.A Cruse et F.L Rizzo : "*A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem I*". Journal of mathematical analysis and applications, Vol. 22, pp 244-259, 1968.

[5] T.A Cruse : "*A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem II*". Journal of mathematical analysis and applications, Vol 22, pp. 341-355, 1968.

[6] J. Dominguez : "*Dynamic stiffness of rectangular foundations*". Report N°.R 78.20, Dept. of Civil Eng. MIT, Cambrige, USA, 1978.

[7] M. Hadid et M.K Berrah : "*Boundary element method applied to elastodynamic problems : Application to soil-foundation interaction*". Algerian journal of technology, Ecole Nationale Polytechnique, Série A, Vol. 11, N° 1 (à paraître), 1995.

[8] C.C Spyrakos et D.E Beskos : "*Dynamic response of rigide strip foundation by time domain boundary element method*". International journal for numerical methods in engineering, Vol. 23, pp.1547-1565, 1986.

[9] C.C Spyrakos et D.E Beskos : "*Dynamic response of flexible strip foundation by boundary and finite element*". Soil dynamics and earthquake engineering, Vol. 5, pp.84-96, 1986.