UNE NOUVELLE APPROCHE PAR LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES POUR LA RESOLUTION D'UN PROBLEME DE CONTACT AVEC FROTTEMENT

Par
Abdelkader NOUNE
Laboratoire Mécanique Matériaux, Université Claude Bernard, Lyon I
Rose Marie COURTADE
Laboratoire Mécanique Matériaux, Université Claude Bernard, Lyon I

Résumé

Un algorithme d'élément de frontière résolvant les problèmes de contact bidimensionnels avec frottement est présenté. La procédure de résolution utilise les fonctions de forme de l'élément afin de distribuer la géométrie, les tractions et les déplacements sur chaque élément de contact. Les conditions de contact sont appliquées sur chaque nœud de la zone concernée. Les équations, celles qui décrivent la mise en équation d'un problème traité par la méthode des équations intégrales concernant des corps en contact, sont couplées par l'utilisation des conditions aux limites de type contact au niveau de l'interface, sans qu'aucune variable supplémentaire ne soit introduite dans la matrice solution.

L'algorithme est appliqué à deux exemples de contact bidimensionnels avec frottement, et les résultats obtenus sont en accord avec les solutions analytiques et avec les solutions données par l'approche éléments finis.

Mots clés : méthode des équations intégrales • contact • frottement • programmation non linéaire • méthode des éléments finis.

1 INTRODUCTION

Le contact entre deux ou plusieurs corps est souvent évoqué dans les applications de l'ingénierie. Par conséquent, de nombreuses approches de ces problèmes ont été proposées depuis la publication célèbre donnant la première solution analytique de Hertz dans les années 1880 [1].

L'application des solutions analytiques disponibles est toutefois limitée aux modèles idéalisés du fait de la nature irréversible et non linéaire de la plupart des problèmes de contact avec frottement.

Désormais, le développement d'algorithmes numériques efficaces capables de déterminer des régions de contact évolutives, ainsi que des efforts de frottement aux niveaux des interfaces, est devenu un impératif.

De nombreuses approches de la résolution numérique des problèmes de contact via les méthodes aux éléments finis et les méthodes aux équations intégrales de frontière, ont été présentées par de nombreux auteurs. Les principales techniques utilisées sont :

- la fonction pénalité ;
- la matrice de flexibilité ;
- la méthode du multiplicateur de Lagrange.

Les deux premières méthodes requièrent des contacts nœud sur nœud à l'intérieur de l'interface, rendant ainsi impératif le fait que le couple d'éléments de même longueur soit prédéfini le long de la surface de contact dans l'état non déformé. La technique du multiplicateur de Lagrange annule les conditions requises pour le contact nœud à nœud en introduisant des lignes et des colonnes supplémentaires dans la matrice de rigidité ; ceci permet de respecter les contraintes de contact mais augmente alors la taille du système d'équations et introduit également des termes nuls sur la diagonale de la matrice de rigidité, ce qui exige un traitement particulier lors de la résolution.

L'efficacité de la méthode des éléments finis est limitée par l'incapacité des équations d'une formula-

tion en déplacements à satisfaire simultanément les conditions de compatibilité et d'équilibre au niveau de l'interface de contact. L'avantage le plus important de la méthode des équations intégrales sur la méthode des éléments finis est que ce sont seulement les courbes de frontières des domaines qui ont besoin d'être modélisées, ce qui réduit effectivement la taille du problème et produit des résultats plus précis, puisque les approximations concernent seulement la frontière ; de plus, notamment en ce qui concerne le problème de contact, les contraintes de contact peuvent être exactement imposées le long de l'interface sans introduction de variables supplémentaires, puisque l'ensemble des équations est écrit en termes de tractions et de déplacements.

Les premières applications de la méthode des équations intégrales à des problèmes bidimensionnels de contact, avec ou sans frottement, ont été réalisées par Anderson et al [2] il y a une quinzaine d'années. Plus récemment, des développements incluant des contacts thermo-élastiques pour des problèmes bidimensionnels et axisymétriques, ont été proposés par Karami [3], Becker et Plant. L'approche adoptée par ces auteurs analyse le couplage de l'ensemble des équations de matrice, via des conditions de contact appropriées au niveau de l'interface commune des corps en contact, satisfaisant ainsi les conditions de compatibilité et d'équilibre pour les couples de nœuds se trouvant sur chaque couple d'éléments adjacents et qui doivent être de longueur non déformée égale.

Une approche différente par la méthode de pénalité a été utilisée par Yamazaki et Mori (1989) [4] et requiert la spécification supplémentaire d'un paramètre de pénalité comme dans l'approche éléments finis.

Les conditions de frottement sont imposées en utilisant la loi de Coulomb et une procédure itérative automatique qui est utilisée dans l'identification des divers états de contact à savoir :

- frottement ;
- glissement ;
- décollement.

Les divers exemples présentés montrent l'applicabilité de l'algorithme aux problèmes de contact.

2 TRAITEMENT ANALYTIQUE DU CONTACT

En 1933, A. Signorini pose le problème général de l'équilibre d'un corps linéairement élastique en contact sans frottement avec une fondation rigide et en 1964, G. Fichera [5] en présente une analyse rigoureuse et introduit pour la première fois la formulation variationnelle d'un tel problème. Il se produit alors une généralisation de la théorie des inéquations variationnelles ; en particulier G. Duvaut et L.L Lions qui en 1971 ont été les premiers à traiter les problèmes de Signorini avec frottement.

2.1 Base théorique

Un solide élastique occupant un domaine Ω de R3 [de repère usuel (o, x_1, x_2, x_3)] est considéré. La frontière du domaine Ω est divisée en trois parties distinctes : sur Γ_u les déplacements sont connus ; sur Γ_σ les efforts exercés sont connus et Γ_c est la partie de la frontière susceptible d'entrer en contact avec la fondation rigide. On va noter la frontière de Ω : $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma \cup \Gamma_c$

Sous l'hypothèse de petites déformations, le tenseur de déformation s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (1)$$

On suppose le solide élastique ; il vérifie donc la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = K_{ijkl}\ \varepsilon_{kl} \qquad (2)$$

Les équations d'équilibre se traduisent par l'écriture condensée suivante :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \qquad (3)$$

où f_i sont les efforts volumiques.

Les conditions aux limites cinématiques et statiques prescrites ont la forme :

$$u = \overline{u} \,/\, \Gamma_u \qquad \sigma_{ij}\, n_j = \overline{F}_i \,/\, \Gamma_\sigma \qquad (4)$$

● **Zone de contact**

Une configuration de contact avec frottement est envisagée. La zone Γ_c est une frontière susceptible d'être en contact. Lorsqu'en un nœud, un contact est établi, sur la partie Γ_c le solide est soumis à une contrainte inconnue due à l'obstacle qui est le massif rigide. Soit d(x) l'écart normal entre la position d'origine d'un point et la fondation rigide. La surface de contact n'est pas connue a priori, mais les conditions de contact unilatéral peuvent être écrites. Pour cela, le déplacement u(x) et les contraintes exercées $\sigma(x)$, sont décomposés en leurs composantes normales et tangentielles.

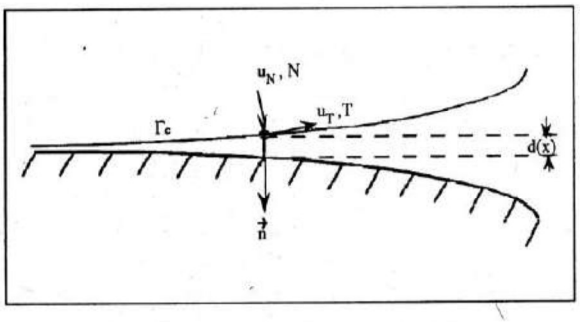


Figure 1 : Contact entre un corps élastique et une fondation rigide.

$$
\begin{aligned}
u_N &= u_i n_i \\
u_T &= u - u_N n \\
\sigma_N &= \sigma_{ij}\, n_j\, n_i \\
\sigma_T &= \sigma_{Ti} = \sigma_{ij}\, n_j - \sigma_N\, n_i
\end{aligned} \qquad (5)
$$

Les nœuds appartenant à la zone de contact doivent satisfaire les lois régissant le contact unilatéral avec frottement qui s'énoncent ci-dessous.

a/ Condition de non pénétration du solide sur le massif rigide

$$(u_N - d(x)) \leq 0 \qquad (6)$$

Cette condition traduit l'existence soit d'un bord libre, soit d'un bord en contact avec le massif rigide.

b/ Condition de contact unilatéral

$$\sigma_N \leq 0 \qquad (7)$$

Cette condition traduit l'état de compression de la zone en contact. Par hypothèse, le glissement se fait sans frottement ($\sigma_T = 0$, glissement parfait, donc $\sigma = \sigma_N\, n$).

c/ Condition de contact ou de bord libre

En présence d'une compression ($\sigma_N < 0$), il y a contact ($u_N - d(x)) = 0$; dans le cas où le solide n'est pas en contact ($u_N - d(x)) < 0$, les contraintes de compression sont nulles ($\sigma_N = 0$).

Les conditions précédentes se résument en une seule expression sur Γ_C.

$$\sigma_N(u_N - d(x)) = 0 \qquad (9)$$

● Loi de frottement

La loi de frottement retenue est la loi de Coulomb. Elle formule un seuil de frottement à partir du rapport des composantes des densités de forces de contact :

$$
\begin{aligned}
&|\sigma_T| \leq \lambda\, |\sigma_N| \quad \text{sur } \Gamma_c \\
&|\sigma_T| < \lambda\, |\sigma_N| \longrightarrow u_T = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \\
&|\sigma_T| = \lambda\, |\sigma_N| \longrightarrow \exists \beta \geq 0 \,/\, u_T = -\beta\, \sigma_T \quad \text{sur } \Gamma_c
\end{aligned} \qquad (8)
$$

Le problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb consiste à trouver un champ de déplacement "U" et un champ de contrainte "σ" vérifiant les équations d'équilibre sur le domaine Ω, les conditions aux limites cinématiques et statiques sur Γ_u et Γ_σ respectivement ainsi que les conditions de contact unilatéral avec frottement énumérées précédemment. Toutes ces conditions sont résumées ci-après :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{sur } \Omega \\
\sigma_{ij} = K_{ijkl}\, \varepsilon_{kl} \quad \text{sur } \Omega \\
u_i = \overline{u}_i \quad \text{sur } \Gamma_u \\
\sigma_{ij} n_j = F_i \quad \text{sur } \Gamma_\sigma \\
\left(u_N - d(x)\right) \leq 0 \text{ et } \sigma_N \leq 0 \rightarrow \sigma_N \left(u_N - d(x)\right) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \\
|\sigma_T| \leq \lambda\, |\sigma_N| \quad \text{sur } \Gamma_c \\
|\sigma_T| < \lambda\, |\sigma_N| \rightarrow u_T = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \\
|\sigma_T| = \lambda\, |\sigma_N| \rightarrow \exists \beta \geq 0 \,/\, u_T = -\beta\, \sigma_T \quad \text{sur } \Gamma_c
\end{array}
\right. \qquad (10)
$$

3 TRAITEMENT NUMÉRIQUE DU CONTACT

Dans cette étude, la méthode des équations intégrales (MEI) est appliquée aux problèmes de contact unilatéral avec frottement. Les développements suivants considèrent des contacts élasto-statiques pour des problèmes bidimensionnels. Cette approche par la (MEI) a pour principal objectif de valider l'algorithme de contact avec frottement.

3.1 Approche numérique

Les détails du fondement de la méthode des équations intégrales, traitent lès problèmes bidimensionnels élastostatiques utilisant des éléments de frontière quadratiques qui sont bien étudiés dans la littérature C.A Brebbia [7] et [8]. Par conséquent, seulement un résumé de la méthode sera exposé.

Une série d'équations algébriques linéaires est obtenue, traduisant l'équilibre des deux corps en contact après avoir fait une intégration numérique sur le contour de l'élément sur lequel il vient :

$$[A]\{u\} = [B]\{\sigma\} \qquad (11)$$

[A] et [B] sont des matrices carrées (2Nx2N). {u} et {σ} sont des vecteurs colonnes (2xN). Une fois le système d'équations résolu, les déplacements et le vecteur contrainte sont obtenus en n'importe quel point de la frontière Γ.

Lorsque les conditions aux limites cinématiques, statiques et de contact sont prescrites, le système d'équations précédent est réarrangé pour rassembler les inconnues dans un même vecteur (les inconnues peuvent être de type déplacement ou de type contrainte). Cette opération est nécessaire pour permettre la résolution du système d'équations par une méthode classique du type élimination de Gauss.

$$[C]\{x\} = [d] \qquad (12)$$

Les inconnues du problèmes sont réunies dans le vecteur {x}.

3.2 Gestion du contact et de son évolution

Lorsqu'il y a contact, celui-ci génère une partie de la frontière du domaine Ω pour laquelle ni les déplacements ni les efforts appliqués ne sont connus. La discrétisation par la MEI est alors incapable de résoudre directement les équations. En effet, le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations. Il faut avoir recours à un traitement itératif dont la convergence est conditionnée par un algorithme basé sur les conditions de contact avec frottement.

Ce traitement itératif nécessite une hypothèse de départ concernant l'état des zones de contact : adhérence, glissement où décollement. A partir de cette hypothèse est effectué un calcul qui permet de connaître la répartition des contraintes et des déplacements sur l'interface.

Supposons maintenant que nous avons résolu le système linéaire approchant l'équation intégrale de frontière, en nous donnant a priori des conditions aux limites sur les éléments constituant Γ_c. Cette résolution nous donne les valeurs des efforts surfaciques appliqués sur ces éléments. Pour chacun de ces éléments, nous allons effectuer une série de tests pour vérifier que les conditions de non pénétrabilité, les conditions du contact unilatéral ainsi que les conditions du bord libre sont bien respectées.

3.3 Algorithmie

Soit un découpage de la frontière Γ du domaine Ω en "M" éléments quadratiques (3 nœuds sur l'élément) et a_n^1, a_n^2 et a_n^3 les nœuds extrémités et nœud milieu de l'élément, "n" variant de 1 à "M".

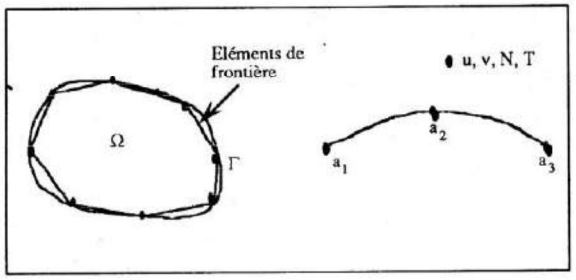


Figure 2 : Discrétisation de la frontière en éléments quadratiques.

"n" désignant l'élément de Γ_c considéré. Une série de tests constitue l'algorithme de contact avec frottement qui se décompose comme suit :

- si $\left(\sigma_N^n\right)_i > 0$ à l'itération "i+1" il faut imposer que $\left(\sigma_N^n\right)_i = 0$.

  Nous avons remarqué numériquement que, pour assurer la convergence, il fallait atténuer la pénalisation sur $(\sigma_N^n)_i = 0$ en donnant cette fois une valeur non nulle mais inférieure à $(\sigma_N^n)_i > 0$. Ainsi la valeur nulle est atteinte progressivement au cours des calculs.

- si $\left(\left|\sigma_T^n\right| < \lambda \left|\sigma_N^n\right|\right)_i$ alors les conditions de contact avec adhérence parfaite seront imposées. Donc, à l'itération "i+1" et sur l'élément "n" considéré, il faut prescrire la valeur $\left(u_T^n\right)_{i+1} = 0$ et $\left(u_N^n\right)_{i+1} = 0$.

- si $\left(\left|\sigma_T^n\right| = \lambda \left|\sigma_N^n\right|\right)_i$ et si en plus $\left(\left|\sigma_N^n\right|\right)_i \neq 0$, alors les conditions de contact avec glissement seront imposées. Et à l'itération "i+1" et sur l'élément "n" considéré, il faut prescrire la valeur $\left(u_T^n\right)_{i+1} = \left(u_T^n\right)_i$ et $\left(u_N^n\right)_{i+1} = \left(d^n\right)_i$.

- si $\left(\left|\sigma_T^n\right| = \lambda \left|\sigma_N^n\right|\right)_i$ et si en plus $\left(\left|\sigma_N^n\right|\right)_i = 0$, alors les conditions de contact avec décollement seront imposées. Et à l'itération "i+1" et sur l'élément "n" considéré, il faut prescrire la valeur $\left(\left|\sigma_T^n\right|\right)_{i+1} = 0$ et $\left(\left|\sigma_N^n\right|\right)_{i+1} = 0$.

Physiquement la valeur absolue de la contrainte tangentielle ne peut pas dépasser un seuil valant un coefficient de frottement que multiplie la valeur absolue de la contrainte normale. Malheureusement, ce constat physique peut être violé numériquement ; pour cela deux cas sont à prévoir :

a- si $\left(\left|\sigma_T^n\right|\right)_i > \lambda \left(\left|\sigma_N^n\right|\right)_i$ et si en outre $\left(\sigma_T^n\right)_i > 0$ alors

$$\left(\sigma_T^n\right)_{i+1} = \lambda \left(\sigma_N^n\right)_i \text{ et } \left(\sigma_N^n\right)_{i+1}^i = \left(\sigma_N^n\right)_i .$$

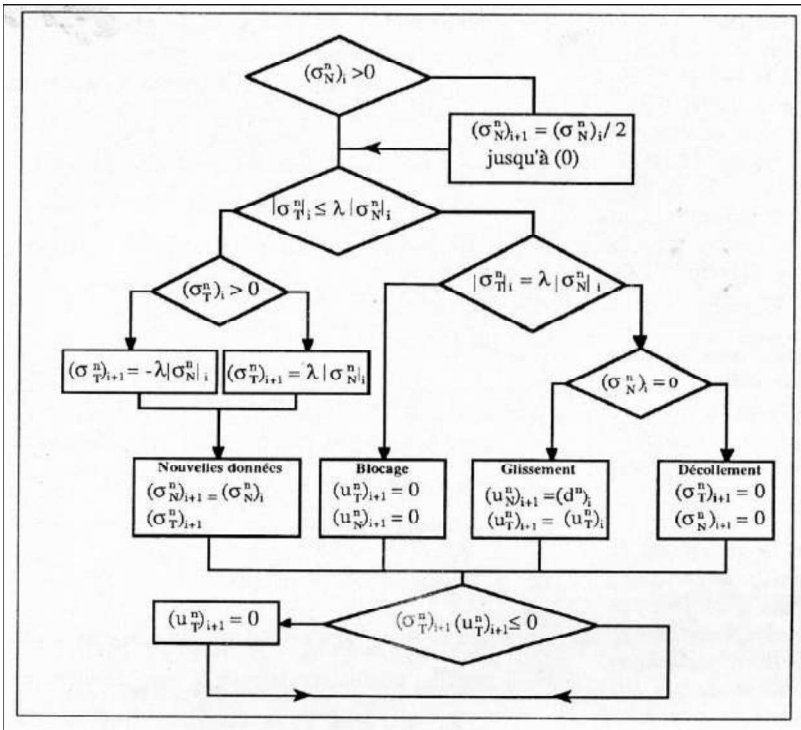
b- si $\left(\left|\sigma_T^n\right|\right)_i > \lambda \left(\left|\sigma_N^n\right|\right)_i$ et si en outre $\left(\sigma_T^n\right)_i < 0$ alors

$$\left(\sigma_T^n\right)_{i+1} = -\lambda \left(\sigma_N^n\right)_i \text{ et } \left(\sigma_N^n\right)_{i+1}^i = \left(\sigma_N^n\right)_i .$$

On doit toujours vérifier qu'on a bien dans tous les cas : $\left(\sigma_T^n\right)_{i+1} \left(u_T^n\right)_{i+1} \leq 0$ sinon il faut imposer :

$$\left(u_T^n\right)_{i+1} = 0 .$$

A chaque itération, les données sur les éléments constituant Γ_c peuvent changer. Il faut donc à chaque fois réorganiser le système d'équations à résoudre. L'organigramme est présenté ci-après.



4 EXEMPLES D'APPLICATION

4.1 Contact entre un cylindre élastique et une fondation rigide (Problème de Hertz)

Le problème du contact entre un cylindre élastique et une fondation rigide est schématisé sur la figure 3.

Le cylindre est constitué d'un matériau isotrope, élastique et linéaire. Le problème est traité en déformation plane. En ce qui concerne la discrétisation par éléments finis, les régions de contact sont maillées par des éléments isoparamétriques à 8 nœuds. Par contre, pour les régions n'appartenant pas aux zones de contact, le maillage est fait avec des éléments à 4 nœuds. Dans notre étude, donc en utilisant la méthode des équations intégrales, nous avons utilisé 16 éléments de frontière quadratiques sur la zone de contact.

La solution analytique, celle du contact entre un corps élastique et une fondation rigide, est donnée par Hertz, et s'écrit comme suit :

$$b(x) = 2\sqrt{\frac{1-u^2}{EP}\,PR} \qquad (13)$$

$$P(x) = \frac{2P}{b}\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}$$

Avec :

R : rayon du cylindre considéré.
P : charge appliquée sur le cylindre.
b : largeur de la surface de contact.
E, ν : module de Young et coefficient de Poisson du matériau constituant le cylindre.
$a_{max} = R$

La figure 4, représente un graphe comparatif entre la solution analytique Hertz, une solution donnée par la méthode des éléments finis et notre étude par la méthode des équations intégrales. Cette approche par la MEI vient valider l'algorithme développé.

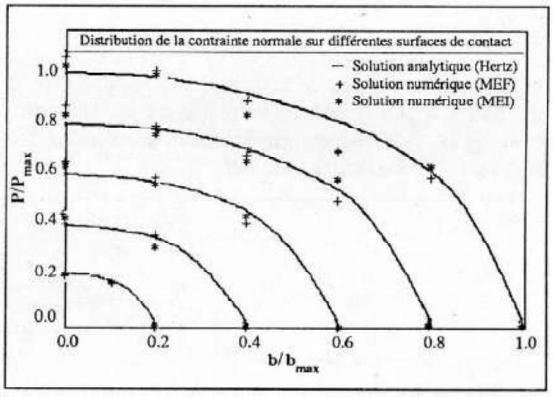


Figure 4 : Courbes comparatives. Distribution de la contrainte normale sur la surface de contact.

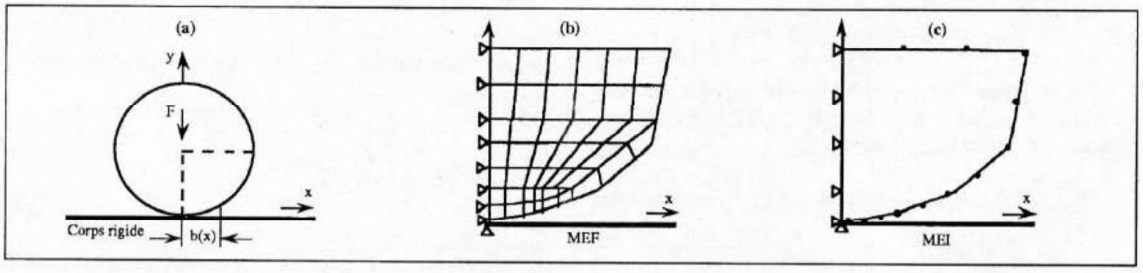


Figure 3 : Analyse du problème de Hertz.
(a) Description du problème ;
(b) Discrétisation par éléments finis (la densification du maillage n'est pas représentée) ;
(c) Discrétisation par la méthode des équations intégrales.

Coordonnées (mm)	Numéro du nœud	Nœud de blocage (Bc)	Nœud de glissement (G1)	Nœud de décollement (Dc)	U_N	U_T E-3	σ_N	σ_T
0.0000	1	Bc	/	/	0.0	0.0	7.4300	0.000
2.8571	2	Bc	/	/	0.0	0.0	7.1760	0.5700
5.7143	3	Bc	/	/	0.0	0.0	7.2400	1.1500
8.5714	4	Bc	/	/	0.0	0.0	7.1870	1.6300
11.429	5	Bc	/	/	0.0	0.0	7.1158	2.3800
14.286	6	Bc	/	/	0.0	0.0	7.0570	3.2100
17.143	7	Bc	/	/	0.0	0.0	6.7650	5.4712
20.000	8	/	G1	/	0.0	-0.659	5.7320	5.7301
22.857	9	/	G1	/	0.0	-1.188	4.8180	4.8208
25.714	10	/	G1	/	0.0	-3.429	4.5970	4.6104
28.571	11	/	G1	/	0.0	-5.224	3.7344	3.7400
31.429	12	/	G1	/	0.0	-7.243	4.0530	4.0490
34.286	13	/	/	Dc	0.0	-9.500	0.000	0.000
37.143	14	/	/	Dc	0.0	12.32	0.000	0.000
40.000	15	/	/	Dc	0.0	-14.92	0.000	0.000

Tableau 1 : Valeurs numériques pour le cas ($\lambda = 1.0$, $F_1 = 10$ et $F_2 = 5$ daN/mm).

Nous donnons dans le tableau 1 le détail des valeurs obtenues pour les contraintes et les déplacements sur le segment (OB), pour un coefficient de frottement ($\lambda = 1.0$). Ces valeurs sont à comparer à celle obtenues par M. Raous et al [10] qui ont utilisé dans leur discrétisation par éléments finis 320 éléments linéaires dont 32 de contact.

Pour des commodités d'interprétation, nous avons exprimé les valeurs de σ_N et σ_T/λ pour chaque segment. De cette façon, lorsque les deux courbes $\sigma_N(x)$ et $\sigma_T(x)/\lambda$ se rejoignent, nous savons qu'il y aura glissement ; si la courbe $\sigma_T(x)/\lambda$ est au-dessous de celle de $\sigma_T(x)$, nous aurons un contact parfaitement adhérent (blocage) ; enfin quand les deux courbes coïncident avec l'axe des abscisses, nous aurons un décollement.

4.2 Contact entre un barreau élastique et une fondation rigide

Nous allons appliquer la méthode des équations intégrales pour résoudre l'un des problèmes de contact avec frottement : le contact entre un barreau et une fondation rigide. L'algorithme développé est implanté dans un programme écrit en Fortran.

L'exemple choisi pour tester l'algorithme est issu de la bibliographie. Il a également été traité par différents laboratoires du groupe "validation des codes de calculs" dans le cadre des activités du GRECO "grandes déformations et endommagement" ; il s'agit de la compression d'un barreau sur une fondation rigide. Reprenons le problème tel qu'il est posé par M. Raous et al [10]. La géométrie et les conditions aux limites propres à cet exemple sont schématisées par la figure 5.

* Les constantes du problème sont les suivantes :

h = 40 mm E = 130000 N/mm^2 ν = 0.2

* Le maillage est réalisé avec des éléments quadratiques :
- 7 éléments sur (AB) donc, 15 nœuds de contact,
- 3 éléments sur (DC),
- 2 éléments sur (BC et AD).

* Chargement

F_1 = (5, 10, 15, 20) daN/mm F_2 = 5 daN/mm

Compte tenu de la symétrie du barreau et de l'état de charge, il est justifié de prévoir une symétrie de la répartition des forces et des déplacements le long de (AB). Cette symétrie nous autorise à reproduire les résultats obtenus uniquement sur la moitié (OB) de la zone de contact. Nos résultats montrent l'évolution des différentes zones [adhérence (blocage), glissement, décollement].

Nous présentons trois graphes comparant les résultats obtenus avec ceux établi par B. Deshoullieres (1990) [9], par M. Raous et al (1988) [10], ainsi que

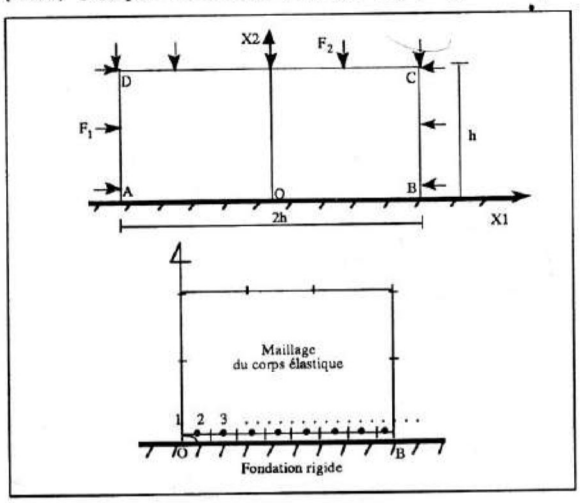


Figure 5 : Cas de chargement et maillage.

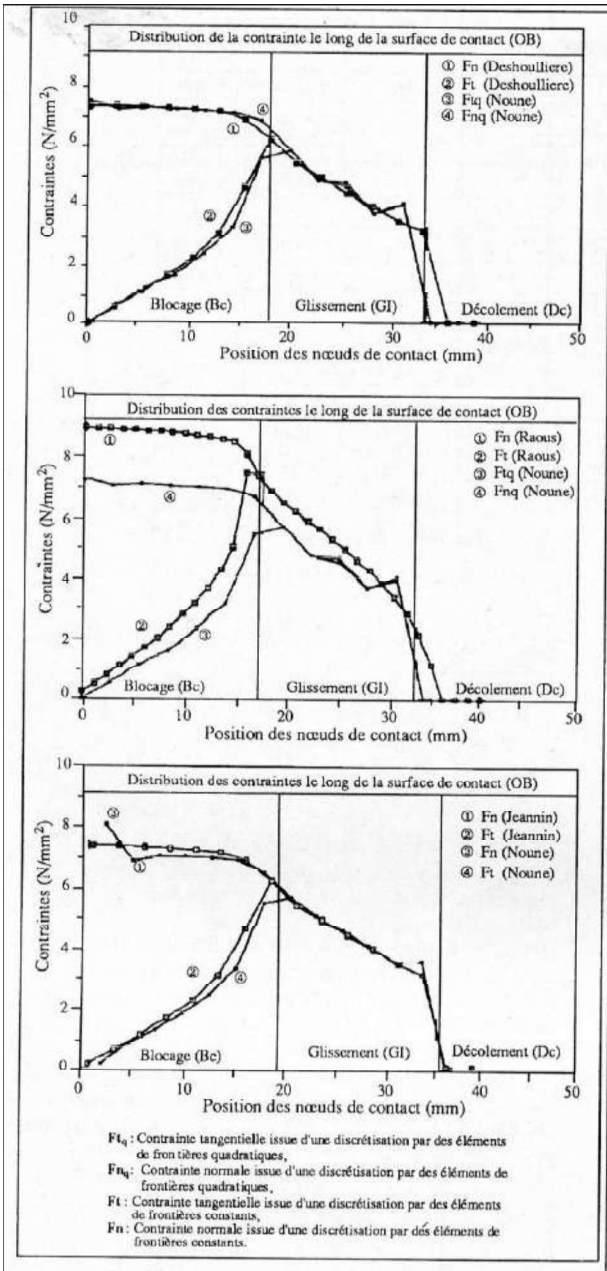


Figure 6 : Graphes comparatifs : distribution des contraintes normale et tangentielle sur la surface de contact.

ceux proposés par L. Jeannin (1985) [11]. La distribution des contraintes est représentée sur la figure 6.

Pour un coefficient de frottement $\lambda = 1$ (qui est une valeur académique), l'évolution de la distribution des contraintes est représentée sur la figure 7.

Sur la figure 7, nous constatons qu'au début du chargement, la zone de glissement est petite et localisée sur le bord extérieur de (OB). Avec l'augmentation de la charge, la zone de glissement s'accroît et nous observons un décollement de l'extrémité. La figure 7

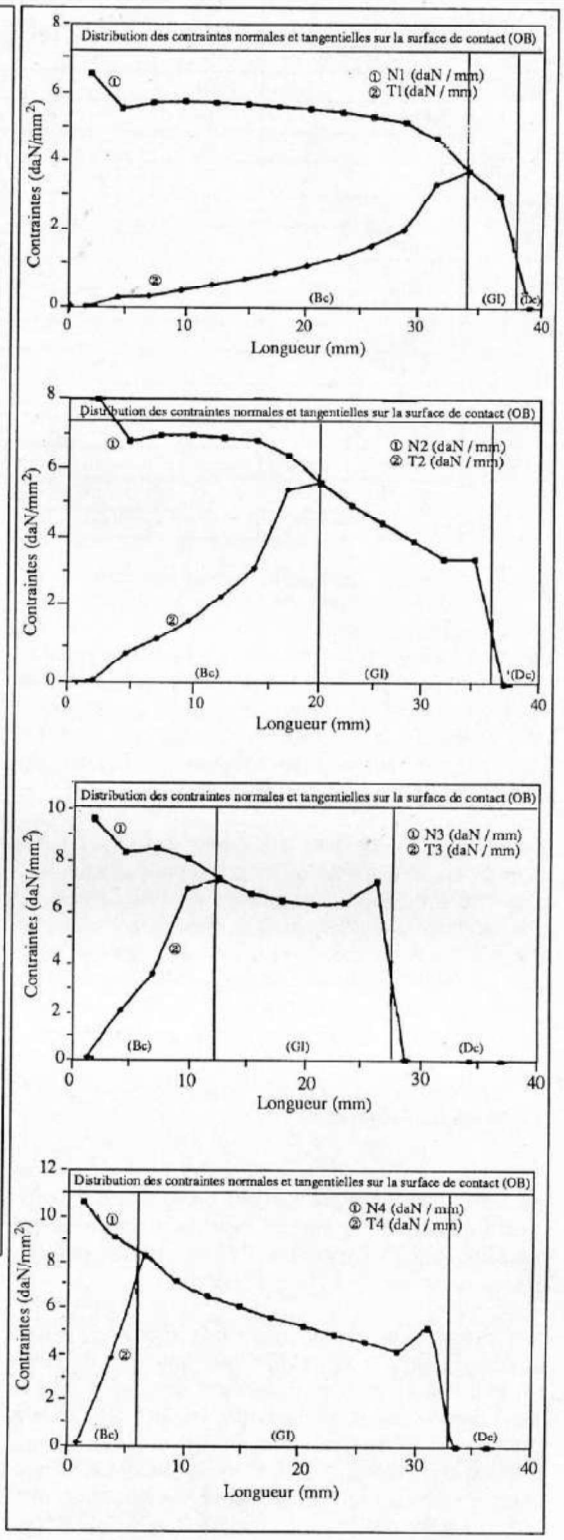


Figure 7 : Evolution de la distribution des contraintes normales et tangentielles sur la surface de contact (OB), pour $\lambda=1$, $F_2=5$daN/mm et $F_1= 5, 10, 15, 20$ daN/mm respectivement.

représente l'accroissement correspondant des déplacements tangentiels.

Pour un coefficient de frottement toujours égal à 1, l'évolution de la distribution du déplacement tangentiel (glissement) est représentée sur la figure 8.

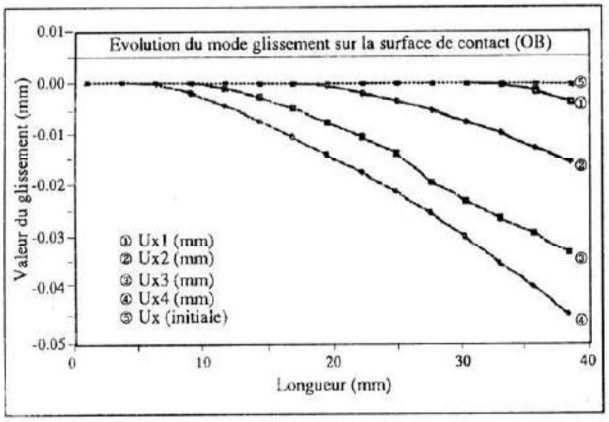


Figure 8 : Evolution de la distribution des déplacement tangentiels sur la surface de contact (OB), pour $\lambda = 1$, $F_2 = 5$ daN/mm et $F_1 = (5, 10, 15, 20$ daN/mm).

5 CONCLUSION

La méthode des équations intégrales est présentée pour la prédiction de l'état des surfaces de contact entre un corps élastique et une fondation rigide. Le problème de contact est résolu en utilisant la loi de frottement de Coulomb. Nous avons fait l'étude de deux exemples pour illustrer l'applicabilité de la méthode des équations intégrales ainsi que la validité de l'algorithme développé. Le contour est discrétisé par des éléments de frontière quadratiques. Nos résultats sont ensuite comparés avec d'autres solutions, obtenues par l'utilisation de la méthode des éléments finis classique Goforth (1987) et avec une solution analytique Hertz. La bonne similitude des résultats confirme d'ores et déjà la validité de l'algorithme développé ; il faut juste noter que celui-ci doit être généralisé au traitement du contact entre deux corps élastiques. Précisons seulement que l'architecture de l'algorithme reste, globalement, inchangée.

Il faut noter que l'approche adoptée n'est efficace que s'il s'agit d'un problème élastique et linéaire, ce qui n'est pas notre cas. La présence d'une zone de contact, où la loi de comportement est non linéaire, semble ne pas trop affecter la solution. La discrétisaton en éléments de frontière limite d'une façon certaine le degré de complexité du problème ; cependant, nous ne pouvons pas inclure des phénomènes de plasticité ni des grands déplacements. Aussi, vu que l'algorithme développé manie deux variables (U,σ), celles-ci doivent être les inconnues de base du problème. Toutes ces considérations nous mènent à l'approche éléments finis, non pas des éléments finis classiques (à un seul champ), mais des éléments finis à deux champs donc, mixtes.

Nous envisageons par conséquent l'adaptation de l'algorithme à l'approche éléments finis mixtes, et le développement d'un élément de frottement afin de spécialiser la discrétisation de la zone de contact ❶

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Hertz : "*On the on elastic solids*". J. Math. 92, 156-171 (1881), (in German). Miscellaneous papers (in English), Macmillan, London, 1896.

[2] T. Anderson, B. Frediksson & B.G Allan-Persson : "*The boundary element method applied to two dimentional contact problems*". In C.A Brebbia (ed), new developments in boundary element methods, CLM publications, Southampton 1980.

[3] G. Karami : "*A boudary element method for 2D contact problems*". PhD thesis, Mechanical Engineering Departement, Imperial College of Science and Technology, Univesity of London, 1987.

[4] K. Yamazaki & M. Mori : "*Finite element incremental contact analysis with various frictional conditions*". Int. J. numer. methods eng., 14, 337-357, 1979.

[5] G. Fichera : "*Problemi elastostatici con vincoli unilaterali : il problema di Signorini con ambigue condizioni al condorno*". Mem. Accad. Naz. Lincei VIII, 91-140, 1964.

[6] G. Duvaut & J.L Lions : "*Inqualities in mechanics and physics*". Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[7] C.A Brebbia : "*The boundary element method for engineers*". Pentech Press, London, 1978.

[8] C.A Brebbia : "*New developments in boundary elements methods*". Southampton University, CML publications, 1980.

[9] B. Deshoullieres & D. Fortune : "*A boundary integral aquation approch to friction contact problems of classical elastostatics proceedings of the first*". European boundary meeting, Brussels 8-10 May 1988, Strctural dynamics research corporation, Paris, 1988.

[10] M. Raous, P. Charbrand & F. Lebon : "*Numerical methods for frictional contact problems and applications*". Journal of theoretical and applied mechanics. Special issue, n°1 to vol.7, pp 111-128, 1988.

[11] L. Jeannin : "*Etude mathématique et numérique d'un problème de contact unilatéral avec frottement en élasticité et &lastoplasticité*". Thèse présentée à l'Ecole Centrale de Lyon pour l'obtention du diplôme de Docteur-Ingénieur, 1985.