

ANALYSE NON LINÉAIRE DES STRUCTURES PLANES EN BÉTON ARMÉ

S. LOURDJANE,
Institut de Génie Civil,
Université de Tizi-Ouzou
A. CHARIF
Institut d'hydraulique,
Université de Batna,

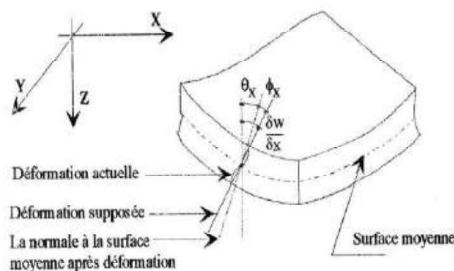
RÉSUMÉ

On décrit une méthode de calcul par éléments finis des dalles en béton armé jusqu'à la ruine, et en particulier dans la phase non linéaire. On examine l'influence de la fissuration, de la plastification du béton ainsi que celle des barres d'armature. On tient compte de la variation des propriétés du matériau à travers l'épaisseur de la plaque en divisant celle-ci en couches de propriétés différentes. On présente une confrontation des résultats numériques avec les données expérimentales, ainsi qu'une expérimentation numérique sur une dalle simplement appuyée le long des quatre bords soumise à des charges concentrées.

MOTS CLÉS

Béton armé • non-linéaire • plaques • dalles • éléments finis • modèles • fissures

Figure 1 :
Déformation de la section transversale de la plaque Mindlin



1. Introduction

La représentation fine du comportement des structures en béton armé ne peut être abordée avec quelques chances de succès que grâce au très grand développement des méthodes numériques. La méthode des éléments finis est certainement celle qui est la mieux adaptée à la discrétisation d'un ensemble de matériaux à comportement très différent. Cette méthode consiste à intégrer en variables locales ou globales un modèle rhéologique du composite «béton armé» prenant en compte certaines de ses particularités comme la fissuration ou le comportement non linéaire de l'acier et du béton sous charges complexes.

Ces dernières années, l'analyse non linéaire des structures en béton armé a pris un grand essor avec le développement des méthodes numériques. En outre elle nous renseigne sur le comportement des structures jusqu'à leurs ruines. Ce type d'analyse est particulièrement important pour certaines structures; telles que: centrales nucléaires, ouvrages d'art, etc.

Des études expérimentales sur ces types de structures sont impossibles à réaliser. De plus les approches empiriques, seules, ne sont pas suffisantes pour une évaluation adéquate de leur sécurité. Une analyse non linéaire par éléments finis s'impose, donc, comme seul moyen permettant d'avoir une solution optimale à l'équation «économie - sécurité» posée par ces structures.

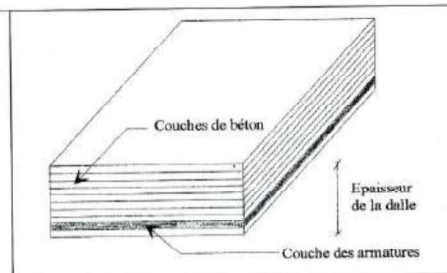


Figure 2 : Élément de dalle flexionnelle multicouches

2. Formulation des éléments finis multicouches

Les éléments finis basés sur la théorie de Mindlin [1] pour les plaques sont simples à formuler. Ils possèdent, en plus, l'avantage d'être capables de modéliser le cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque (figure 1). Le déplacement latéral (w) et les rotations des lignes de cisaillement normales au plan moyen (θ_x, θ_y) sont traités comme variables indépendantes. En se référant à la figure 1, on obtient les formules suivantes :

$$\phi_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \quad \text{et} \quad \phi_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \quad (1)$$

Où ϕ_x et ϕ_y sont respectivement les rotations moyennes dues au cisaillement transversal dans les directions (X) et (Y).

L'application de la théorie des stratifiés (figure 2) consiste en la modélisation de l'association acier-béton d'une dalle en béton armé par un empilement de couches isotropes (les barres étant assimilées à une plaque d'acier d'épaisseur équivalente). Le comportement d'ensemble se rapproche de celui d'une pièce isotrope. Une multicouche représente un empilement de couches différentes dont l'adhérence des couches est supposée parfaite. La plaque épaisse est divisée en un nombre fini de couches parallèles au plan moyen de la plaque.

2.1 Relation des déplacements

En utilisant les hypothèses de la théorie de Mindlin des plaques, les déplacements (u), (v) et

(w) en n'importe quel point de la dalle sont exprimés en fonction des coordonnées cartésiennes (x, y, z) comme suit :

$$\begin{bmatrix} U(x,y,z) \\ V(x,y,z) \\ W(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0(x,y) - Z\theta_x(x,y) \\ V_0(x,y) - Z\theta_y(x,y) \\ W_0(x,y) \end{bmatrix} \quad (2)$$

u_0 , v_0 et w_0 représentent respectivement les déplacements de la surface de référence de la plaque dans les directions (X), (Y) et (Z).

2.2 Relation déformations - déplacements

Dans l'analyse à deux dimensions basée sur la théorie des plaques de Mindlin en flexion et en contraintes planes, la relation déformations - déplacements peut être écrite sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 & -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} & 0 & 0 & -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 & -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

Où ε_x , ε_y , et γ_{xy} sont les composantes des déformations planes, γ_{xz} et γ_{yz} sont les composantes de la déformation de cisaillement transversal et z est la distance entre le centre de la couche et le plan médian de la plaque.

En utilisant l'approximation nodale par éléments finis, la relation entre déformation et déplacement s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & -z \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & -z \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & 0 & -z \frac{\partial N_i}{\partial y} - z \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{bmatrix} \quad (4a)$$

Ou, sous forme plus compacte, $\{\varepsilon\} = \sum_i B_i \{\delta_i\}$ (4b)

Où B_i est la matrice de déformation qui contient les dérivées cartésiennes des fonctions nodales. La matrice B_i peut s'écrire sous la

forme suivante :

$$B_i = \begin{bmatrix} B_{ix} & B_{iy} \\ 0 & B_{iz} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Où B_{ix} , B_{iy} , et B_{iz} sont des matrices de déformations associées respectivement aux déformations planes, flexionnelles et de cisaillement.

2.3 Relation contraintes - déformations

La relation contraintes - déformations est donnée par la loi de Hooke suivante: $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ où $[D]$ est la matrice d'élasticité qui dépend du type de matériau. La matrice d'élasticité correspondant à la couche des armatures s'écrit comme suit :

$$D_s = E_s \begin{bmatrix} c^4 & c^2 s^2 & c^3 s \\ s^2 c^2 & s^4 & cs^3 \\ sc^3 & cs^3 & c^2 s^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Où $C = \cos \alpha$, $S = \sin \alpha$ et α est l'angle d'orientation des barres par rapport à l'axe (X). Le module d'élasticité de l'acier est désigné par E_s . Pour l'acier, la relation contraintes - déformations est élastique parfaitement plastique.

La matrice d'élasticité correspondant à la couche de béton élastique et isotrope est donnée comme suit :

$$= \frac{E_c}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - \mu}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - \mu}{k} \end{bmatrix} \quad (8a)$$

Où E_c est le module d'élasticité du béton, μ son coefficient de Poisson et k le facteur de forme de cisaillement usuellement égal à 5/6. Quand la résistance à la compression est dépassée, E_c est donnée par la relation : de Chen [2]. La matrice d'élasticité $[D_c]$ peut être, donc, écrite comme suit :

$$[D_c] = \begin{bmatrix} D_{px} & 0 \\ 0 & D_{sz} \end{bmatrix} \quad (8b)$$

Où D_p et D_s représentent respectivement la matrice d'élasticité relative aux contraintes planes et la matrice d'élasticité relative aux contraintes de cisaillement transversal.

2.4 Matrice de rigidité

La matrice de rigidité élémentaire de tout l'élément est la somme de toutes les matrices de rigidités élémentaires de chaque couche, et s'écrit comme suit :

$$K = \sum_{i=1}^n \left(\iint B^T D B dx dy \right) dz_i \quad (9)$$

Où dz_i est l'épaisseur de la $i^{\text{ème}}$ couche, n est le nombre total de couches, B est la matrice de déformation et D est la matrice d'élasticité dépendante du type de matériau et de son état de contraintes.

3. Modèle du comportement du béton

L'objet de ce travail est de traiter les structures bidimensionnelles en béton armé soumises à des sollicitations monotones. Cela nécessite la construction d'un modèle plan tenant compte des irréversibilités du béton.

3.1 Critère de rupture

Pour le cas des dalles, en général, la connaissance du comportement sous contraintes biaxiales est suffisante. La surface de rupture adoptée dans cette étude est celle de Kupfer [3], et elle s'exprime en termes de contrainte de cisaillement octaédrale sous la forme suivante:

$$\tau_{oct} = a + b \sigma_{oct} \quad (10)$$

τ_{oct} est la contrainte de cisaillement octaédrale.

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 + 3\tau_{xy}^2)^{1/2}$$

σ_{oct} est la contrainte normale octaédrale.

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

a et b sont des constantes déterminées expérimentalement.

Prenons f_c comme résistance à la compression uniaxiale du béton et (f_t) comme résistance à la compression équivalente sous une compression biaxiale $f_{ct} = 1,16 f_c$, et en définissant le rapport $m = f_t/f_c$, avec f_t est la résistance à la traction du béton. Les constantes (a) et (b) de l'équation (10) peuvent être établies comme suit :

Compression - Compression

La loi d'écoulement du béton dans le cas de la

compression biaxiale s'écrit :

$$\frac{\tau_{oct}}{f_c} + 0,1714 \frac{\sigma_{oct}}{f_c} - 0,4143 = 0 \quad (11)$$

Traction - Compression

La loi d'écoulement du béton dans le cas de traction - compression s'écrit :

$$\frac{\tau_{oct}}{f_c} + \sqrt{2} \frac{1-m}{1+m} \frac{\sigma_{oct}}{f_c} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m}{1+m} = 0 \quad (12)$$

Traction - Traction

Puisqu'il n'y a pas d'augmentation de la résistance à la traction ultime à cause de la traction biaxiale, la condition du cercle simple est suffisante pour décrire la loi d'écoulement dans le cas de traction.

$$\left(\frac{\sigma_1}{f_t} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{f_t} \right)^2 - 1 = 0 \quad (13)$$

Où σ_1 et σ_2 sont des contraintes principales.

3.2 Compression du béton

Le comportement élastique linéaire du béton en compression est valable uniquement pour des charges inférieures ou égales à 30% de sa capacité ultime f_c . Au-delà, son comportement est non linéaire (figure 3). Les relations contraintes - déformations du béton élastique et isotrope sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_c}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

E_c est le module d'élasticité du béton et μ son coefficient de Poisson.

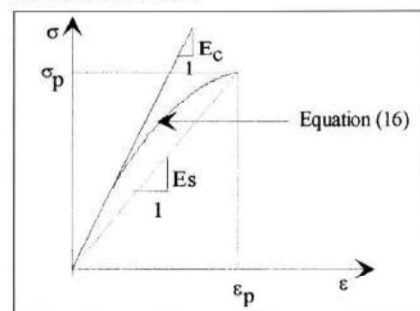


Figure 3 : Courbes contraintes-déformations uniaxiale équivalente

Dans le domaine non linéaire, le changement de la rigidité avec l'augmentation de la déformation est représenté pour le modèle de Lin, Nilson et State [4]. Le concept de base de ce modèle est de traiter le comportement de la relation contraintes - déformations du béton comme un cas uniaxial équivalent. La contrainte dans la direction principale est évaluée seulement par l'incrément de la déformation principale dans la même direction. La rigidité tangente qui est en fonction du rapport des contraintes principales tient compte de tous les effets biaxiaux. La relation contraintes - déformations est de la forme suivante :

$$\sigma = \frac{A + BE\varepsilon}{(1 - \mu\Omega)(1 - C\varepsilon + D\varepsilon^2)} \quad (15)$$

où A, B, C et D sont des constantes pouvant être retrouvées par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0, \sigma = 0 & \quad \varepsilon = \varepsilon_p, \sigma = \sigma_p \\ \varepsilon = 0, \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{E}{1 - \mu\Omega} & \quad \varepsilon = \varepsilon_p, \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0 \end{aligned}$$

$\Omega = \sigma_1/\sigma_2$ est le rapport entre la contrainte principale dans la direction orthogonale et la contrainte principale dans la direction considérée. σ_p et ε_p sont respectivement, la contrainte de pic en compression biaxiale et la déformation qui correspond.

A partir de ces conditions précédentes, la relation contraintes - déformations devient :

$$\sigma = \frac{E_p \varepsilon}{(1 - \mu\Omega) \left[1 + \left(\frac{1}{1 - \mu\Omega} \frac{E_p}{E_s} - 2 \right) \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} \right)^2 \right]} \quad (16)$$

σ et ε sont respectivement, la contrainte et la déformation sous charge biaxiale. E_s est le module d'élasticité du béton sous charge uniaxiale et μ son coefficient de Poisson.

σ_p est résistance ultime du béton en compression biaxiale ($\sigma_p = f_{cu}$).

ε_p est la déformation correspondant à la contrainte maximale du béton en compression biaxiale ($\varepsilon_p = 0,0025$).

$E_s = \sigma_p / \varepsilon_p$ est le module sécant.

L'équation (16) décrit le comportement contraintes - déformations du béton sous compression biaxiale jusqu'au pic de déformation égale à 0,0025. Au-delà de ce pic, l'équation cesse

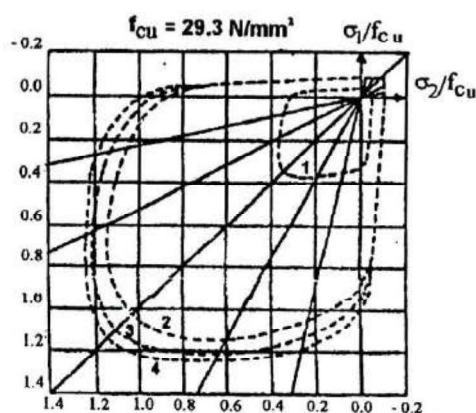


Figure 4 : Zones de comportement sous l'état de contraintes biaxiales

d'être valide à cause de l'adoucissement du béton. Puisque l'effet majeur sur la réponse non linéaire du béton armé en flexion est dû à la fissuration. Par conséquent, dans cette étude, l'adoucissement du béton est négligé en supposant que le comportement du béton est parfaitement plastique jusqu'à une déformation égale à 0,0035.

Dans la procédure numérique adoptée dans cette étude, l'équation précédente (16) est linéarisée incrémentalement durant le processus de chargement. Cela est usuellement réalisé, en utilisant des surfaces de chargement intermédiaires d'après Bell et Elms [5], Chen [2]. De telles surfaces sont montrées par la figure 4.

3.3 Traction du béton - Modèles des fissures

La fissuration due à la traction, en général possède un effet dominant sur le comportement non linéaire des éléments du béton armé. Par contre, l'écrasement dû à la compression du béton n'influe pas beaucoup sur la réponse non linéaire. Conformément à la théorie des fissures continues introduite par Rashid [6], deux modèles sont possibles pour représenter les fissures suivant la contrainte principale à la traction.

Figure 5 :
Contraintes dans
le béton simplement
fissuré

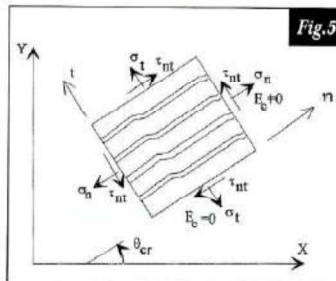
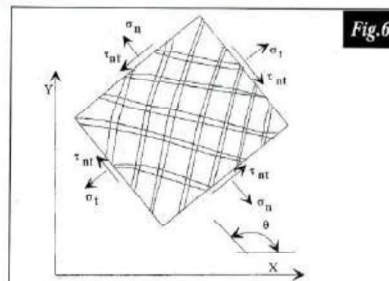


Figure 6 :
Contraintes dans
le béton doublement
fissuré



3.3.1 Analyse de la fissure de direction fixée

Dans cette analyse, la direction de la première fissure est fixée suivant la direction de la contrainte principale à la traction au moment où la contrainte principale à la traction est égale à la résistance de traction du béton. La matrice d'élasticité est modifiée en annulant la rigidité perpendiculaire à la fissure. Ainsi on suppose que les contraintes de traction sont maintenues nulles perpendiculairement aux plans fixes de la fissure. Cependant, puisque la contrainte de cisaillement peut agir dans les surfaces fissurées, cela signifie qu'une contrainte de traction peut se développer selon des directions autres que la direction de la fissure.

3.3.2 Analyse de la fissure de direction non fixée

La fissure apparaît dans le béton lorsque la contrainte en un point viole le critère de rupture soit en zone traction - traction soit en zone traction - compression.

Dans la zone traction - traction, le béton est supposé fissuré si le critère de rupture de l'équation (13) est violé. La direction de la fissure est supposée normale à la direction de la contrainte principale. Deux fissures orthogonales peuvent se former si les deux contraintes principales dépassent la résistance à la traction du béton. Par contre, sous l'état traction - compression, la fissuration du béton aura lieu lorsque le critère de rupture de l'équation (12) avec $f_c = f_{ct}$ sera violé. La direction de la fissure dans ce cas est supposée normale à la contrainte principale de traction. En cas d'augmentation du chargement, le béton qui était déjà fissuré dans une direction peut se fissurer aussi dans une autre direction, selon un angle de moins de 30° par rapport à la direction de la première fissure (si les fissures non orthogonales sont considérées) [7]. Par contre, si les fissures sont supposées orthogonales, une nouvelle fissure peut être formée mais avec la restriction que la deuxième fissure est normale à la direction de la fissure initiale [8]. La direction de la fissure peut être calculée par la formule suivante :

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (17)$$

où $45^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$

La direction de la fissure actuelle (θ_{cr}) est déterminée par rapport à l'axe (X) comme suit :

- calculer les contraintes principales avec l'expression standard suivante :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (18)$$

- calculer la contrainte normale associée à l'angle (θ) avec l'expression standard suivante :

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (19)$$

- comparer les valeurs des contraintes principales (σ_1, σ_2) avec la contrainte normale (σ_n).

*si $\sigma_x = \sigma_1$ l'angle de la fissure est : $\theta_{cr} = \theta$

*si $\sigma_y = \sigma_2$ l'angle de la fissure est : $\theta_{cr} = \theta + 90^\circ$

Traction simple du béton

Le béton fissuré est traité comme un matériau orthotrope avec des axes d'orthotropie parallèles et normaux à la direction de la fissure. L'effet de Poisson est négligeable à cause du manque d'interaction entre les deux directions orthogonales après fissuration et le module d'élasticité du béton normal à la direction de la fissure est réduit à zéro. Ainsi, les contraintes totales après fissuration sont données par rapport au système de coordonnées locales (n, t), fig. 5.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_t \\ \tau_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Où E est module d'élasticité du béton.

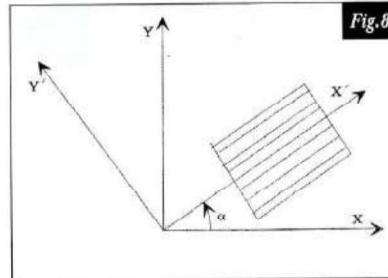
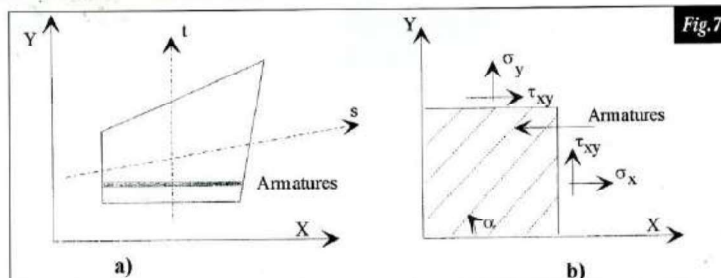
β est le facteur de conservation de cisaillement du béton ($0 < \beta < 1$).

G est le module de cisaillement du béton.

Fissuration double du béton

Le béton peut se fissurer selon deux directions orthogonales si les deux contraintes principales sont de traction et excèdent la résistance à la traction du béton, figure 6. Dans ce cas la relation contraintes - déformations est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_t \\ \tau_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix} \quad (21)$$



Afin de transformer les contraintes dans le béton fissuré simplement ou doublement, et qui sont définies par rapport aux axes d'orthotropie dans le système de coordonnées globales (X,Y), en utilisant la procédure standard qui s'écrit comme suit :

$$[D_c] = T^T D_c T$$

$$T = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Où $C = \cos \theta$, $S = \sin \theta$, et θ est l'angle de la fissuration par rapport à l'axe (X), et $[D_c]$ est la propriété matérielle dans les axes locaux d'orthotropie et dépend du type de fissuration du béton, qui est donnée par les formules (20) et (21).

Les contraintes finales dans le système de coordonnées globales (X, Y) peuvent être obtenues avec l'équation suivante :

$$\{\sigma\} = [D_c] \{\varepsilon\} \quad (24)$$

3.3.3 Conservation de cisaillement

Les surfaces du béton fissuré sont rugueuses, donc elles sont capables de transmettre les forces de cisaillement à travers les fissures par frottement. Pour prendre en compte la rigidité de cisaillement du béton, le module de cisaillement réduit égal à (βG) est pris en compte dans les relations contraintes - déformations données précédemment par les équations (20) et (21). Hand et Al [9] ont proposé l'approche du module de cisaillement réduit pour éviter les difficultés numériques, ils ont utilisé une valeur constante de (β) durant toute leur analyse. Par contre, Cedolin et Poli [10] ont utilisé une valeur de (β) qui décrit linéairement avec une déformation fictive normale à la fissure (qui représente la largeur de la fissure). Al-Mahaidi [11] avait aussi suggéré une variation hyperbolique de (β) avec la déformation fictive normale à la fissure. Dans cette étude l'équation (25) due à Al-Mahaidi [11] et utilisée par Abdel-Hafez [7] est retenue.

$$\beta = \frac{0,4}{\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_{cr}}} \quad (25)$$

où ε_{cr} est la déformation du béton fissuré ($\varepsilon_{cr} = f_t/E_c$) et ε_f est la déformation fictive normale à la

fissure et est donnée par l'équation suivante :

$$\varepsilon_f = \varepsilon_x \sin^2 \theta_{cr} + \varepsilon_y \cos^2 \theta_{cr} - \gamma_{xy} \sin \theta_{cr} \cos \theta_{cr}$$

où ε_x , ε_y et γ_{xy} sont les déformations planes et θ_{cr} est l'angle de fissuration.

4. Modèle du comportement des armatures

Le comportement symétrique de l'acier en traction et en compression est approché classiquement par un modèle élastoplastique avec ou sans écrouissage. Dans le développement d'un modèle en éléments finis du béton armé, deux représentations possibles des armatures sont utilisées (figure 7).

4.1 Représentation discrète

Les forces axiales ou les barres peuvent être utilisées avec deux degrés de liberté aux nœuds. Donc les éléments utilisés dans ce cas sont unidimensionnels [7].

4.2 Représentation continue

L'acier est supposé être distribué sur l'élément de béton avec une orientation d'angle donné (α). La section des barres d'acier est modélisée en une couche d'acier de section équivalente. L'alternative consiste alors à supposer les armatures modélisées en plaque travaillant que suivant la direction des barres d'armatures (figure 2). Une adhérence parfaite est supposée entre les éléments du béton armé, et l'acier. Pour l'analyse multicouches en éléments finis, le modèle continu est usuellement utilisé (figure 2). La couche d'acier est supposée être élastoplastique dans les deux cas traction et compression avec écrouissage. Pour des raisons de simplification dans l'analyse, il est usuel d'idéaliser la courbe contraintes - déformations uniaxiale de l'acier (élastoplastique avec écrouissage linéaire) [12]. Puisque les barres d'acier peuvent être orientées selon n'importe quel angle par rapport aux axes globaux (X, Y), le comportement multicouches est d'abord décrit dans la direction des axes locaux (X', Y') puis seront transformés aux axes globaux (X, Y). La transformation au système de coordonnées globales se fait par usage de la matrice de transformation qui dépend de

Figure 7 : Représentation alternative des armatures : a) Discrète, b) Continue.

Figure 8 : L'acier dans la direction des coordonnées locales

Méthode

Figure 10 : Courbes charge-déflexion aux différents points de la dalle

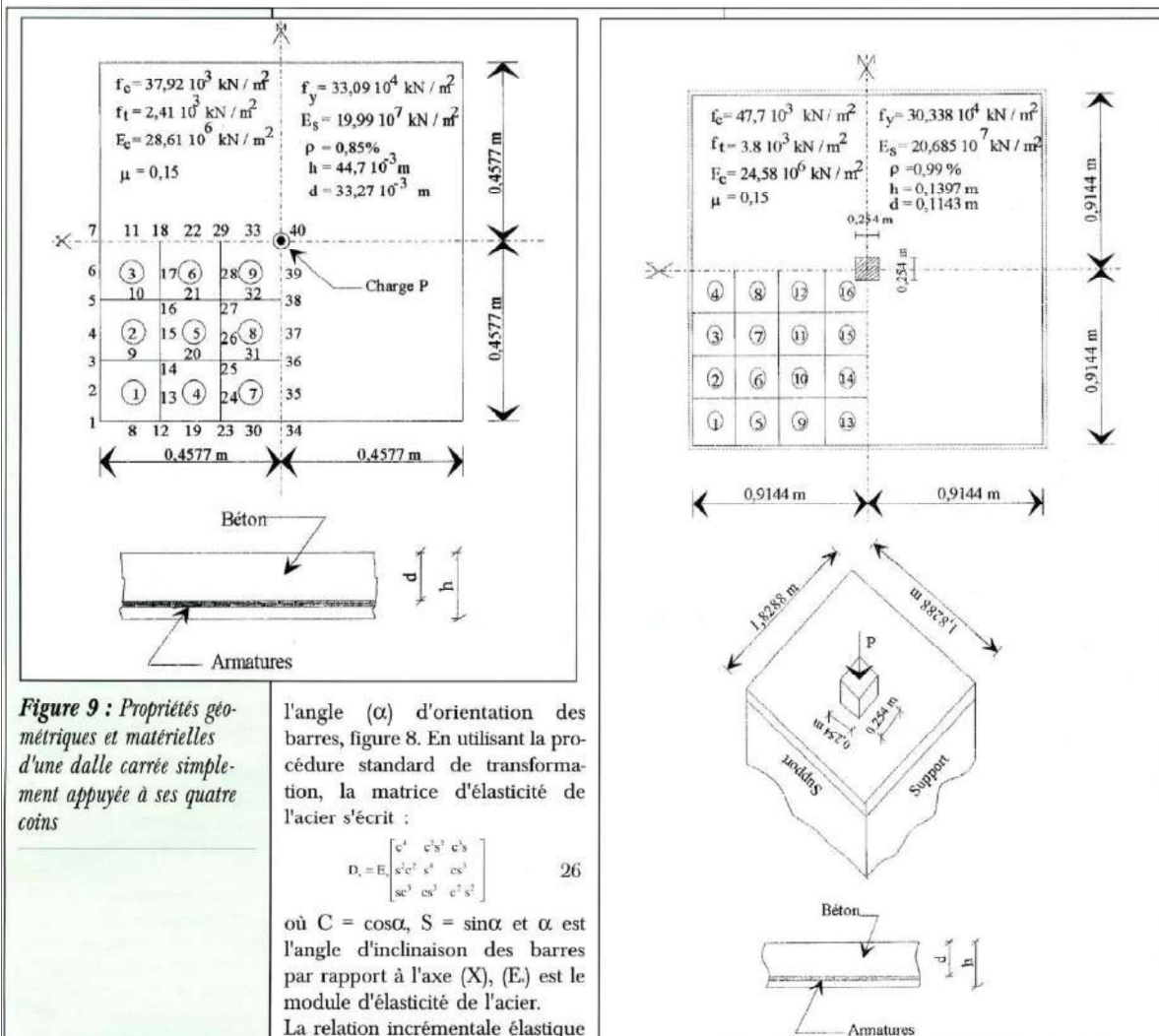
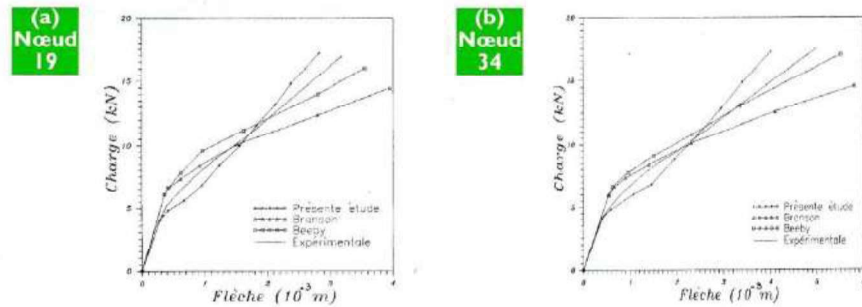


Figure 9 : Propriétés géométriques et matérielles d'une dalle carrée simplement appuyée à ses quatre coins

l'angle (α) d'orientation des barres, figure 8. En utilisant la procédure standard de transformation, la matrice d'élasticité de l'acier s'écrit :

$$D_s = E_s \begin{bmatrix} c^4 & c^3s^2 & c^2s^4 & cs^5 \\ s^4c^2 & c^4 & cs^3 & cs^5 \\ sc^5 & cs^3 & c^2s^4 & s^5c^2 \end{bmatrix} \quad 26$$

où $C = \cos\alpha$, $S = \sin\alpha$ et α est l'angle d'inclinaison des barres par rapport à l'axe (X), (E_s) est le module d'élasticité de l'acier.

La relation incrémentale élastique contraintes - déformations est donnée par :

$$\Delta\sigma = E_s \Delta\varepsilon \quad 27$$

Là où la contrainte uniaxiale de l'acier atteint sa valeur d'écoulement (f_t), la relation contraintes - déformations prend la forme suivante :

$$\Delta\sigma = E_s \left(1 - \frac{E_s}{E_s + H} \right) \Delta\varepsilon \quad 28$$

où H est le paramètre d'écrouissage de l'acier (considéré constant dans cette étude).

Figure 11 : Propriétés géométriques et matérielles d'une dalle carrée simplement appuyée

5. Applications

La validation du modèle concernant l'approche multicouches pour le composite «béton armé» doit être confirmée par une confrontation entre

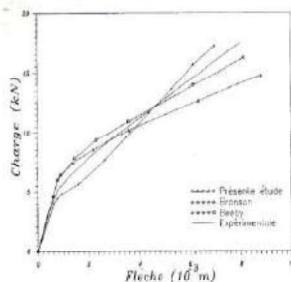
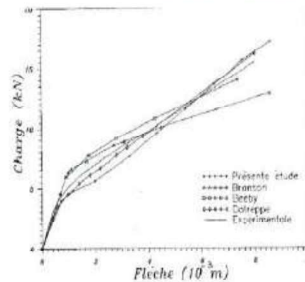
c
Nœud
37d
Nœud
39

Figure 10 : Courbes charge-déflexion aux différents points de la dalle

les résultats issus du calcul et ceux obtenus par l'expérimentation. La notion de validation est ici prise au sens de l'évaluation des performances de notre modèle. Au moyen des modèles présentés précédemment, on a analysé trois types de dalles.

5.1 Dalle carrée simplement appuyée sur ses quatre coins

Une dalle carrée simplement appuyée sur ses quatre coins de Jofriet et McNeice [13] est analysée et les résultats numériques et expérimentaux sont confrontés. La dalle est carrée avec 91,44 cm de côté et 4,47 cm d'épaisseur avec une maille d'armatures isotrope de 0,85%. La dalle est testée sous une charge concentrée appliquée en son centre. Elle est modélisée en deux couches d'armatures et quatre couches de béton à travers son épaisseur. L'étude est effectuée en considérant une analyse des fissures orthogonales, et le nombre maximum d'itérations est fixé à 50 pour chaque incrément. Quant à la tolérance de convergence, elle est prise égale à 5%.

La figure 9 montre la discrétisation par éléments finis et la numérotation des nœuds ainsi que les propriétés matérielles du béton et l'acier. La figure 10 montre les courbes charge - déflexion des résultats numériques comparés aux résultats expérimentaux en 4 points de la dalle. Une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et ceux prédits par cette étude peut être observée avec un comportement flexible au début du chargement et un comportement rigide en fin de chargement. Les résultats présentés par Dotreppe [14] au nœud 39 donne une allure presque similaire à celle trouvée dans cette étude. D'autre part, ceux de Branson [13] et de Beeby [13] montrent un comportement rigide au début du chargement et un comportement flexible en fin de chargement. Les résultats de Beeby [13] sont meilleurs que ceux de Branson [13]. C'est pourquoi on trouve que les résultats de cette étude sont aussi meilleurs que ceux de Branson [13] parce que les courbes de cette étude sont plus rapprochées aux courbes expérimentales.

5.2 Dalle carrée simplement appuyée

L'étude expérimentale de ce modèle de dalle a été réalisée par l'Association du Ciment Portland

et était analysée par la suite par Dotreppe [14]. La dalle est carrée de 182,88 cm de côté par 13,97 cm d'épaisseur avec une maille d'armatures isotrope de 0,99%. La charge est appliquée au centre de la dalle sur une colonne carrée de 25,4 cm de côté, comme le montre la figure 11. La dalle est modélisée en deux couches d'armatures et quatre couches de béton à travers son épaisseur. L'étude est effectuée en considérant une analyse des fissures orthogonales, et le nombre maximum d'itérations est égal à 50 pour chaque incrément. Quant à la tolérance de convergence, elle est prise égale à 5%. La figure 11 montre la discrétisation par éléments finis et la numérotation des nœuds ainsi que les propriétés matérielles du béton et l'acier. La figure 12 montre les courbes charge - déflexion des résultats numériques comparés aux résultats expérimentaux au centre de la

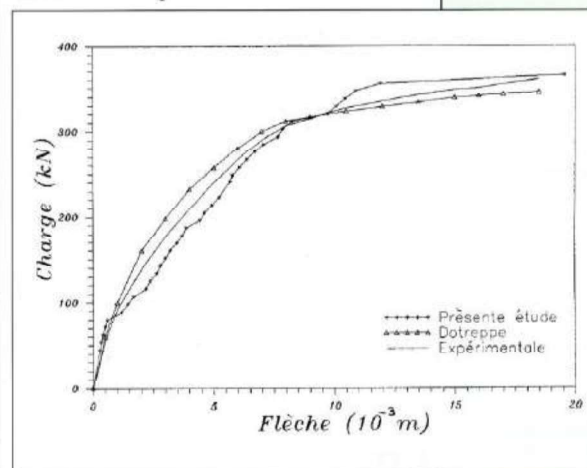


Figure 12 : Courbes charge-déflexion au centre d'une dalle carrée simplement appuyée

dalle. La réponse globale (figure 12) nous permet de constater une très bonne concordance entre les résultats numériques et les données expérimentales.

Les résultats de cette étude donnent un comportement flexible au début du chargement et un comportement rigide en A du chargement. Au contraire, les résultats de Dotreppe [14] donnent un comportement rigide au début du chargement et un comportement flexible en fin

Méthode

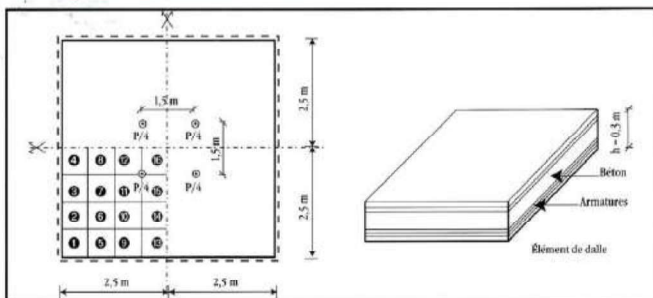


Figure 13 : Dalle carrée simplement appuyée sous charge uniforme

BIBLIOGRAPHIE

- [1] - R. D. Mindlin, «Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic plates». Jnl. Appl. mach., vol. 37, PP 1031-1036, 1951.
- [2] - W. F. Chen, «Plasticity in reinforced concrete». McGraw-Hill Book Company, 1982.
- [3] - H. Kupfer, H. K. Hilsdorf and H. Rusch: «Behavior of concrete under biaxial stresses». Int. journal, PP 656-666 aug 1969.
- [4] - T. C.-Y. Lin, A. H. Nilson and F. O. State: «Stress - strain response and failure of concrete in uniaxial and biaxial compression». proceedings of the American concrete institute, PP 291-295, may 1972.
- [5] - B. A. Bell et D. G. Elms «Non linear analysis of reinforced concrete slabs». Magazine of Concrete Research, vol. 24, n° 79, PP 63-70, June 1972.
- [6] - Y. R. Rashid, «Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels». Nucl. engrg. Design, Vol. 7, PP 334-344, 1968.
- [7] - L. M. Abdel-Hafez, «Direct design of reinforced concrete skew slabs». Ph.D Thesis, dept. of Civ. eng., University of Glasgow, oct. 1986.
- [8] - M. Benradouane, «Direct design of reinforced concrete slabs using non elastic stress fields». Master of science, dept. of civil eng. University of Glasgow, oct. 1988.
- [9] - A. K. Hand, D. A. Pecknold and W. C. Schnobrich, «Non-linear layered analysis of reinforced concrete plates and shells». Jnl. of the str. division, ASCE, st 7 PP 1491 - 1505, July 1973.



du chargement. De là on conclut que le modèle multicouches utilisé donne des résultats satisfaisants.

5.3 Expérimentations numériques

Au moyen de l'approche multicouches développée précédemment, on a analysé une dalle carrée [15] simplement appuyée sur son contour et soumise à des charges concentrées qui croissent de façon monotone. La dalle est de forme carrée de 5 m de côté et 0,3 m d'épaisseur comme représentée sur la figure 13. Les armatures sont modélisées en quatre couches: deux supérieures et deux inférieures. Le nombre de couches du béton varie de 4 à 8 plus deux couches d'enrobage des armatures.

Les propriétés matérielles du béton et de l'acier sont les suivantes:

- résistance à la compression du béton, $f_{cu} = 49,7.10^3 \text{ KN/m}^2$
- résistance à la traction du béton, $f_t = 3,5.10^3 \text{ KN/m}^2$
- module de Young du béton, $E_c = 27,58.10^6 \text{ KN/m}^2$
- module de Young de l'acier, $E_s = 20,68.10^7 \text{ KN/m}^2$
- coefficient de Poisson du béton, $\mu = 0,15$,
- résistance à l'écoulement de l'acier, $f_y = 30,68.10^4 \text{ KN/m}^2$.

Pour analyser chaque point à travers l'épaisseur d'une plaque épaisse, il est nécessaire de subdiviser celle-ci en plusieurs plaques minces. Le modèle multicouches est utilisé pour démontrer son efficacité en faisant varier le nombre de couches suivant l'épaisseur de la dalle.

6. Discussion des résultats

Les figures 14 et 15 montrent l'influence du nombre de couches sur les courbes charge - déflexion et charge - déformation des armatures de la nappe inférieure.

La figure 14 montre la comparaison des résultats charge - déflexion obtenus pour le nombre de couches égal à 10, 12 et 14. On remarque qu'au palier de plastification, il y a une légère diffé-

rence entre les courbes. Par contre, avant celui-ci, toutes les courbes sont confondues car la non linéarité est très faible. Les courbes montrent que la charge limite ultime obtenue par le nombre de couches égal à 10 est légèrement supérieure à celle obtenue par le nombre de couches égal à 12 et 14. De là, on peut dire que plus le nombre de couches augmente, plus la charge limite diminue. La non linéarité flexionnelle est mieux mise en évidence par le nombre de couches plus grand. Un nombre de couches réduit ne reflète pas fidèlement les redistributions des efforts notamment après plastification des aciers et donne une charge de rupture légèrement supérieure. Il est évident que la précision des résultats augmente avec le nombre de couches, mais la durée d'exécution du programme d'analyse non linéaire multicouches devient aussi plus grande.

La figure 15 montre les courbes charge - déformation des armatures de la nappe inférieure pour les modèles 10, 12 et 14 couches dans les différents points de la dalle. D'après ces courbes, on constate que les déformations des armatures inférieures augmentent avec l'augmentation de la charge dans les deux points proches du centre de la dalle, par contre aux deux autres points, on observe des discontinuités dans les courbes. La réduction partielle et monotone des déforma-

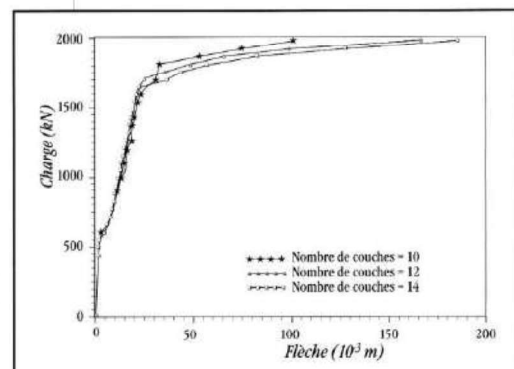


Figure 14 : Courbes charge-Déflexion pour une dalle carrée simplement appuyée soumise à une charge concentrée

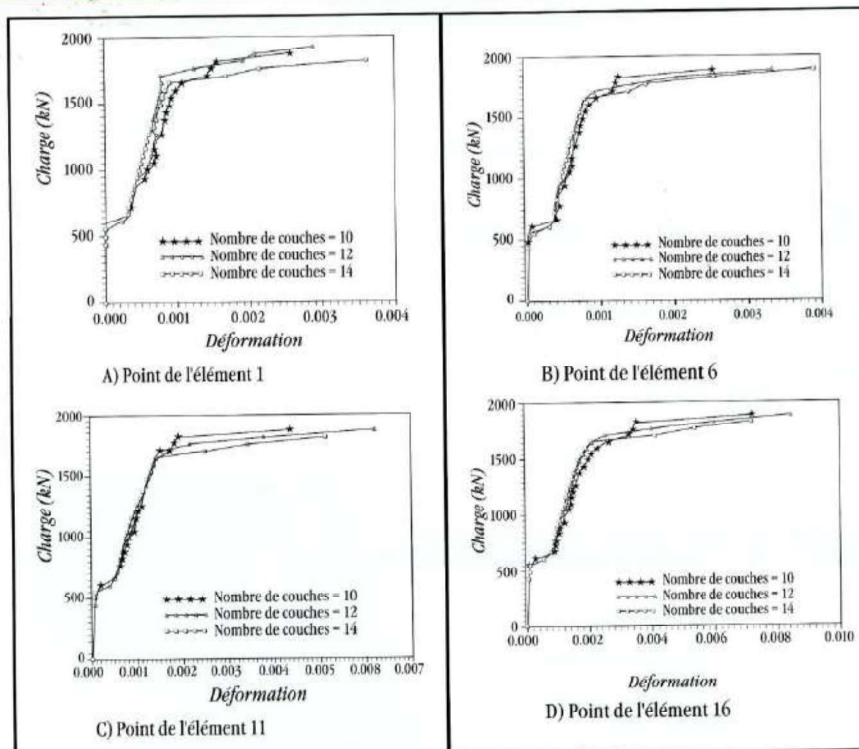


Figure 15 : Courbes charge-déformation des armatures de la nappe inférieure pour une dalle carrée simplement appuyée.

tions peut s'expliquer par l'apparition brusque des discontinuités de fissuration, causant des redistribution des efforts. En comparant les courbes de la figure 15, donnant les déformations des aciers sur différents points situés sur la diagonale de la dalle, on remarque qu'en se rapprochant plus du centre de la dalle, les déformations des armatures inférieures augmentent suivant la diagonale. Ceci est dû au fait que le centre de la dalle est plus sollicité par rapport aux autres points de celle-ci.

L'effet du nombre de couches confirme les observations précédentes. On observe le transfert presque instantané des efforts vers l'acier à la fissuration du béton. Les courbes sont non linéaires (à cause du comportement non linéaire du béton) bien avant la plastification de l'acier. Le comportement des armatures est ductile car, à la rupture, la déformation ultime atteint 0,4% à 0,6%.

7 CONCLUSION

Suivant les résultats obtenus, les modèles des matériaux présentés se sont avérés comme un outil très intéressant pour prédire le comportement des dalles en béton armé chargées jusqu'à la rupture. L'analyse des deux premiers modèles de dalles a donné des résultats proches des résultats expérimentaux et parfois même meilleurs aux résultats numériques obtenus par d'autres. Malgré les écarts minimes observés entre les résultats expé-

rimementaux et numériques, on peut dire que les résultats obtenus dans cette étude sont satisfaisants. Les modèles rhéologiques des matériaux sont capables de reproduire le comportement dominant de telles structures en béton armé chargées jusqu'à la ruine. Le modèle des fissures de direction fixée peut être utilisé dans le cas des armatures orthogonales. La simulation en éléments finis multicouches et les modèles rhéologiques utilisés pour le béton et l'acier se sont donc avérés très judicieux.

L'application de la méthode des éléments finis multicouches à l'étude des dalles en béton armé avec un élément isoparamétrique à 5 degrés de liberté par nœud avec intégration numérique semble très appropriée. Le modèle multicouches permet de prendre en compte l'effet de cisaillement, de suivre les différentes non linéarités matérielles à travers les couches composant chaque dalle et de réduire la dimension du problème. L'intégration numérique effective sélective 3*3 (totale) pour la partie flexionnelle et 2*2 (réduite) pour la partie cisaillement nous permet d'éviter le verrouillage de cisaillement ■



[10] - L. Cedolin and S. Deipoli; «Finite element studies of shear critical reinforced concrete beams». Journal of engineering mechanics division proceedings. ASCE, Vol. 103, n° EM3 PP 359-410, June 1972.

[11] - R.S.H. AL-Mahaidi; «Non-linear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Deep Members». Report N° 79-1, Dept. of structural engineering, Cornell university, January 1979.

[12] - S. Lourdiane et A. Charif - «Analyse non linéaire des dalles en béton armé par la méthode des éléments finis multicouches». Thèse de Magister, dpt. de Génie civil, Ecole nationale polytechnique d'Alger, Juillet 1994.

[13] - J. C. Jofriet And G. M. McNeice, «Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Slabs». Jnl. Of the Str. Division, st 12, PP 2905-2911, Dec 1971.

[14] - J. C. Dotreppe, W. C. Schnobrich and D. A. Perknold, «Layered Finite Element Procedure for Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Slabs». Publications of the Int. Association for Bridges on Str. Engrs., Vol. 33, n° 2, PP 53-68, 1973.

[15] - O. Merabet et J. M. Reynouard : «Modélisation des Structures Planes en Béton Armé sous Chargements Monotone et Cyclique» Annales des Ponts et Chaussées, 4e Trimestre.