

CALCUL DES MURS EN TOLES ONDULEES PEU PROFONDES

1ère partie : formulation théorique

Par
Mohamed GUENFOUD
Institut de Génie Civil, Université de Guelma

Résumé

La présente note a essentiellement pour objet l'étude de la transformation d'un mur en tôles ondulées peu profondes travaillant en membrane (état plan de contrainte) en plaque orthotrope équivalente afin d'éviter la complexité de la modélisation géométrique lors d'une discrétisation en éléments finis et d'enrichir le potentiel du programme de l'élasticité plane [4] en y incluant l'étude des structures orthotropes. Donc une recherche éventuelle dans ce domaine par éléments finis a tous les outils nécessaires pour démarrer.

L'étude consiste à dériver les modules d'élasticité de la plaque orthotrope équivalente (E_x , E_y et E_{xy}) à partir du module d'élasticité de base du matériau de la tôle (E) et de leurs dimensions.

Nous utilisons le principe de l'énergie minimum pour aboutir aux modules d'élasticité. Notons que la méthode est valable seulement pour des ondulations peu profondes.

Mots clés : murs en tôles ondulées - membrane - plaque orthotrope - MEF.

1 INTRODUCTION

La description géométrique de la tôle ondulée à étudier est présentée sur la figure 1.

On désigne par :

- b : Longueur de la tôle
- d : Largeur totale non développée de la tôle
- t : Epaisseur de la tôle
- l : Longueur de l'ondulation
- h : Profondeur de l'ondulation
- e : Largeur de la partie droite de la tôle
- P : Effort normal appliqué sur la tôle
- E, ν : Caractéristiques mécaniques de la tôle ondulée.

2 DERIVATION DU MODULE D'ELASTICITE SUIVANT L'AXE X

Le diagramme de distribution du moment sur une ondulation soumise à une force P suivant X est présenté à la figure 2.

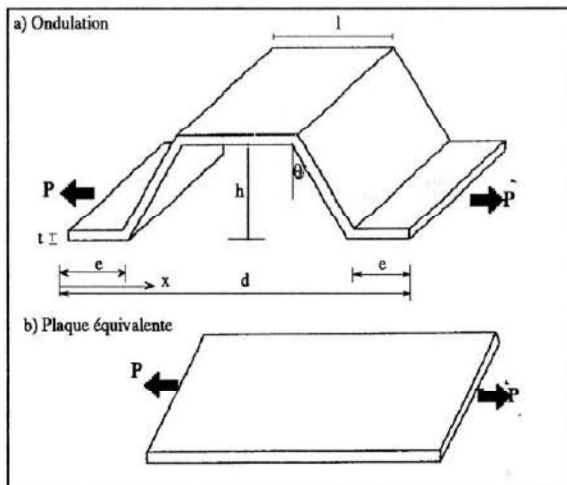


Figure 1 : Dimensions de la tôle ondulée et de la plaque équivalente selon la direction X.

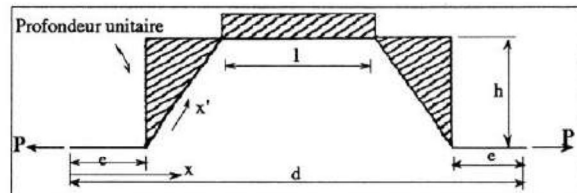


Figure 2 : Diagramme de distribution du moment dû à la force P.

L'expression de l'énergie du système est :

$$U = \int \frac{N^2}{2EA} dx + \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (1)$$

où N est l'effort axial et M le moment fléchissant dans l'élément considéré.

Les expressions de N et M pour chacun des tronçons droits de l'ondulation sont calculées facilement à l'aide des relations trigonométriques puis insérées dans l'équation (1) qui devient :

$$U = 2 [B + C + D + E + F] \quad (2)$$

avec :

$$B = \int_0^e \frac{P^2}{2EA} dx \quad C = \int_0^{h/\cos\theta} \frac{P^2 \sin^2\theta}{2EA} dx'$$

$$D = \int_0^{1/2} \frac{P^2}{2EA} dx \quad E = \int_0^{b/\cos\theta} \frac{P^2 \cos^2\theta x'^2}{2EI} dx'$$

$$F = \int_0^{1/2} \frac{P^2 h^2}{2EI} dx$$

D'où :

$$B = \frac{P^2}{2EA} e \quad C = \frac{P^2 \sin^2\theta}{2EA} \frac{h}{\cos\theta}$$

$$D = \frac{P^2}{4EA} l \quad E = \frac{P^2 \cos^2\theta}{6EI} \frac{h^3}{\cos^3\theta} \quad (3)$$

$$F = \frac{P^2 h^2}{4EI} l$$

Nous dérivons l'expression de U par rapport à P pour trouver le déplacement Δd :

$$\partial U / \partial P = \Delta d \quad (4)$$

où Δd est l'allongement de la longueur développée d de l'ondulation.

Nous obtenons :

$$\Delta d = \frac{2P}{EA} \left(e + h \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{2} \right) + \frac{2P}{EI} \left(\frac{h^3}{3\cos\theta} + \frac{h^2 l}{2} \right) \quad (5)$$

$$\epsilon_x = \frac{\Delta d}{d} = \frac{2P}{EA d} \left(e + h \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{2} \right) + \frac{2P}{EI d} \left(\frac{h^3}{3\cos\theta} + \frac{h^2 l}{2} \right) \quad (6)$$

L'expression de E_x est donnée par :

$$E_x = \sigma_x / \epsilon_x = P / (A \epsilon_x) \quad (7)$$

$$\text{où : } A = t \cdot l \quad \text{et} \quad I = (t^3 l) / 12$$

En mettant l'expression (6) dans (7), on obtient :

$$E_x = E d / \left(2 \left(e + h \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{2} \right) + 24 \frac{h^2}{t^2} \left(\frac{h}{3\cos\theta} + \frac{1}{2} \right) \right) \quad (8)$$

et pour le cas où $\theta=0$:

$$E_x = E d / \left(d + 24 \frac{h^2}{t^2} \left(\frac{h}{3} + \frac{1}{2} \right) \right) \quad (9)$$

3 DERIVATION DU MODULE D'ELASTICITE SUIVANT L'AXE Y

L'allongement relatif de b (Figure 3) est donné par :

$$\epsilon_y = \Delta b / b \quad (10)$$

où Δb est l'allongement de la longueur b.

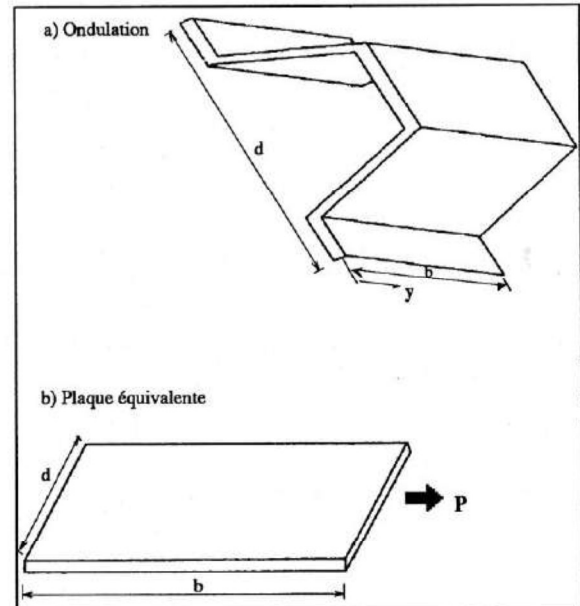


Figure 3 : Dimensions dans la direction de Y de la tôle ondulée et de la plaque équivalente.

Pour l'ondulation on a :

$$\varepsilon_{y1} = \Delta b / b = P / (A_1 \cdot E) \quad (11)$$

avec :

$$A_1 = t (2 e + 1 + 2 h / \cos \theta) \quad (12)$$

Pour la plaque équivalente on a :

$$\varepsilon_{y2} = \Delta b / b = P / (A_2 \cdot E_y) \quad (13)$$

avec : $A_2 = t \cdot d$

L'égalité entre les deux expressions (11) et (13) nous donne :

$$P / (t \cdot E (2 e + 1 + 2 h / \cos \theta)) = P / (t \cdot d \cdot E_y) \quad (14)$$

d'où on tire l'expression pour E_y

$$E_y = E (2 e + 1 + 2 h / \cos \theta) / d \quad (15)$$

et pour le cas où $\theta = 0$

$$E_y = E (d + 2h) / d \quad (16)$$

4 DERIVATION DU MODULE D'ELASTICITE E_{xy}

Le module d'élasticité E_{xy} est défini comme suit :

$$E_{xy} = v_{yx} \cdot E_x \quad (17)$$

où le coefficient de Poisson v_{yx} est le rapport d'une déformation suivant x, induite par une déformation imposée selon Y.

Comme E_y dérivé plus haut est du même ordre de grandeur que le module d'élasticité de base du matériau E, v_{yx} est le même que celui de base v. Comme E_{xy} doit être égal à E_{yx} par symétrie de la plaque orthotrope, on trouve :

$$v_{yx} E_x = v_{xy} E_y$$

d'où

$$v_{xy} = v_{yx} E_x / E_y \quad (18)$$

5 MATRICE DE RIGIDITE DE LA PLAQUE EQUIVALENTE

Nous savons que la matrice de rigidité pour une plaque isotrope soumise à des forces de membrane en état plan de contrainte est :

$$[H] = \frac{1}{(1-v^2)} \begin{bmatrix} E & v E & 0 \\ v E & E & 0 \\ 0 & 0 & (1-v^2)E \end{bmatrix} \quad (19)$$

Par analogie, nous trouvons pour la plaque orthotrope :

$$[H] = \frac{1}{(1-v_{xy} v_{yx})} \begin{bmatrix} E_x & v_{yx} E_x & 0 \\ v_{xy} E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1-v_{xy} v_{yx}) G_{xy} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Comme E_x est très petit à cause de la faible rigidité de l'ondulation suivant la direction X, alors $v_{yx} E_x$ est très petit, comparativement aux autres termes et on peut le remplacer par 0.

Le module de cisaillement G_{xy} peut être pris comme le module de base G comme première approximation, sinon il peut être obtenu par des tests expérimentaux. Il est à noter aussi que si l'ondulation est sinusoïdale et peu profonde, on peut remplacer la sinusoïde par une ondulation rectangulaire (Figure 4) ; et le problème ne consiste plus qu'à déterminer les dimensions pour que l'approximation soit la plus juste possible.

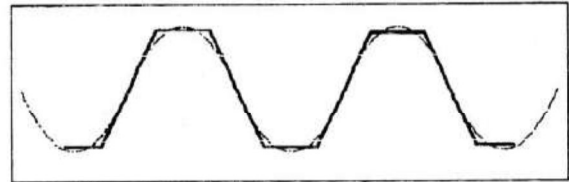


Figure 4 : Approximation d'une tôle sinusoïdale par une tôle rectangulaire.

6 CONCLUSION

En conclusion, nous disons qu'avec cette étude nous pouvons aborder les calculs des murs ondulés sur les plaques orthotropes équivalentes sans avoir recours à la modélisation de la structure réelle compliquée.

Dans un prochain article nous présenterons une série d'exemples pour tester la validité de cette approche ☺

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Timoshenko : "Théorie de l'élasticité".
- [2] L. Landau et E. Lifchitz : "Théorie de l'élasticité". Editions MIR, Moscou 1967.
- [3] V. Rekach : "Problèmes de la théorie de l'élasticité". Editions MIR, Moscou 1982.
- [4] M. Guenfoud, M. Araar et K. Djeghaba : "Présentation du logiciel "Finite" d'éléments finis". Rencontre Maghrébine sur la Mécanique, 24-25 Octobre 1992, Sidi-Bel-Abbès, Algérie.
- [5] Solomon : "Elasticité Linéaire". Massonet.