

ANALYSE STATIQUE ET DYNAMIQUE DES MURS REFENDS RENFORCÉS PAR DES PLAQUES EN COMPOSITE

R. YEGHNEM, S.A. MEFTAHA, A. TOUNSI, E. ADDA BEDIA (Magister en génie civil, Maître assistant, Maître de conférences, Professeur) Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès BP 89, Cité Ben M'hidi 22000, Sidi Bel Abbès

RÉSUMÉ

La conception parasismique des bâtiments en béton armé nécessite le plus souvent l'emploi des structures contreventées par murs refends. Ces voiles peuvent être pleins ou présentant des ouvertures le long d'une ou plusieurs rangées, ce qui augmente la complexité de leur comportement. Le but de ce présent travail est l'analyse statique et en vibration libre des murs refends en béton armé renforcés par des plaques en matériaux composites. L'intérêt de la technique de réparation présentée dans ce travail réside dans l'utilisation des matériaux composites à base de fibres, réparties de façon non uniforme le long de la largeur de la plaque. En effet la concentration des fibres dans les endroits où les contraintes normales sont plus élevées permet de compenser la perte de rigidité ou de résistance due à la fissuration des murs. Un modèle d'éléments finis mixtes a été proposé dans cette étude afin de modéliser l'assemblage collé entre le mur en béton armé et les plaques en matériaux composites. Plusieurs fonctions de répartitions des fibres (fractions volumiques des fibres) étaient proposées et testées sur des structures en murs refends. Les résultats de cette analyse ont montré qu'il est possible d'améliorer la rigidité des murs refends en béton armé par l'utilisation des plaques en fibres de carbone, réparties de façon non uniforme (concentration des fibres aux niveaux des bords de la plaque, où les contraintes normales sont élevées), placées à la base du mur. Ceci a pour conséquence la réduction du coût de la réparation des structures en béton armé, liée plus principalement au prix élevé des fibres de carbone (fibres de graphite) comparée à celui des autres types de fibres.

Mots-Clés

Vibrations libres, murs refends renforcés, éléments finis, matériaux composites, lois de mélange

1. INTRODUCTION

Les endommagements que les structures des bâtiments peuvent subir, sont dus essentiellement aux effets de la corrosion engendrée par l'agressivité atmosphérique (régions côtières), ainsi que par des forces d'origine sismiques qui s'avèrent très destructrices en cas de séisme majeur. A l'inverse des méthodes de réhabilitation traditionnelles (chemisage, gainage et injection d'une résine) qui sont souvent employées en Algérie à la suite de chaque séisme comme procédés de confortement, l'utilisation des plaques en matériaux composites type PRFC doit être développée.

L'analyse statique et dynamique des structures en béton armé tels que les poutres, poteaux et planchers renforcés par des matériaux composites a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche [1-2]. Cependant, peu de travaux dans ce domaine ont traité les murs refends en béton armé [3-6].

L'objectif de cette étude est l'analyse en vibrations libres des murs refends sans ouvertures renforcés par des plaques en matériaux composites fibreux, à base de fibres réparties de façon non uniforme le long de la longueur de la plaque, afin de réhabiliter des structures de bâtiments contreventées par des murs refends. Dans la formulation analytique, un modèle d'éléments finis mixtes bidimensionnels élaboré par Kwan a été développé pour déduire la matrice de rigidité élémentaire d'un ensemble voile en béton armé, couches d'adhésif et plaques en composite. Les propriétés élastiques du mur diffèrent de celles de l'adhésif et des plaques en matériaux composites. L'analyse statique était étendue au problème de vibrations libres en utilisant l'hypothèse des masses concentrées à chaque niveau du bâtiment. Ceci conduit à adopter des matrices masses diagonales. Les forces d'inertie considérées se limitent aux composantes latérales et verticales en raison de leurs importances comparées à celles de rotation. Finalement, des résultats numériques sont présentés montrant l'efficacité du PRFC à base de fibres réparties de façon non uniforme le long de la longueur de la plaque comme un moyen de renforcement utile.

2. ANALYSE DES MURS REFENDS PAR ÉLÉMENTS FINIS

Théoriquement, cette méthode devenue un outil nécessaire dans l'analyse, peut être utilisée pour toutes les structures. Dans cette étude, deux éléments existants, nommés respectivement : l'élément CHEUNG et l'élément KWAN [7-14] ont été utilisés. La

combinaison de ces deux éléments a mené à un modèle satisfaisant certains critères. La figure 1 illustre l'élément de KWAN simplifié.

En exploitant les translations et les rotations nodales de l'élément [15], on peut obtenir, en fonction des degrés de liberté, les expressions suivantes :

$$u = u_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{h} \right) + 2 \left(\frac{y}{h} \right)^3 \right) + \omega_1 h \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \left(\frac{y}{h} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h} \right)^2 - \left(\frac{y}{h} \right)^3 \right) + u_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left(\frac{y}{h} \right) - 2 \left(\frac{y}{h} \right)^3 \right) + \omega_2 h \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \left(\frac{y}{h} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h} \right)^2 - \left(\frac{y}{h} \right)^3 \right) \quad (1)$$

$$v = v_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{b} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{h} \right) + v_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{b} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{h} \right) + v_3 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{b} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{h} \right) + v_4 \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{b} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{h} \right) + \left(\frac{6}{h} \cdot (u_1 - u_2) - 3 \cdot (\omega_1 + \omega_2) \right) \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right) \left(\frac{x}{2} - \frac{b}{4} \right) \quad (2)$$

3. THÉORIE ET SOLUTIONS

3.1 MODULES ÉLASTIQUES DU COMPOSITE À BASE DE FIBRES AVEC ESPACEMENT VARIABLE

Les modules d'élasticité E_x , G_{xy} du matériau composite peuvent être donnés fonction des propriétés des fibres et de la matrice tout en respectant la loi de mélange :

$$E_x = \frac{E_f}{V_f + (1 - V_f)R_1} \quad (3)$$

$$G_{xy} = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)[R_3(1 - \nu_f) + V_f]} \quad (4)$$

où :

$$R_1 = \frac{E_f}{E_m} \quad R_3 = \frac{G_f}{G_m} \quad (5)$$

Dans les équations déjà évoquées, les indices f et m dénotent respectivement les fibres et la matrice, et V_f le volume des fibres dans le matériau composite. Pour un matériau ayant un espacement des fibres variable, V_f est fonction de x , donc E_x, E_y, G_{xy}, v_{xy} seront eux mêmes fonctions de x .

Supposons, par exemple, la fraction volumique des fibres variant paraboliquement tel que $V_f = \xi^2$, où $\xi = \frac{2x}{b}$ est une coordonnée non dimensionnelle, ayant pour origine le centre du mur refend. Cette fonction V_f prend la valeur 1 au niveau des bords ($\xi = \pm 1$), et 0 au centre du voile.

3.2 DÉTERMINATION DE LA MATRICE DE RIGIDITÉ DU MUR REFEND RENFORCÉ

Se basant sur les déplacements (horizontal et vertical) de l'élément de KWAN [7] tel que c'est indiqué par les équations (1) et (2). Il est possible de déterminer la matrice de rigidité du mur refend renforcé par des plaques en matériau composite en calculant l'énergie de déformation de l'élément (voile+adhésif+patch) (voir figure 2). Cette énergie due aux effets de flexion et de cisaillement vaut :

$$U^e = U_f^e + U_c^e \quad (6)$$

Où U_f^e et U_c^e sont les énergies de déformation dues à la flexion et au cisaillement respectivement, sont écrites en fonction des déformations du mur refend.

Considérons que l'énergie de déformation due à l'effet de flexion, notée U_f^e , qui vaut :

$$U_f^e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{vol} E_i^{(y)} (\epsilon_y)^2 dvol(i) \quad (7)$$

A partir de l'équation (3), l'énergie de déformation U_f^e s'écrit :

$$U_f^e = \frac{1}{2} E_b t l \int_{-\frac{h-b}{2}}^{\frac{h-b}{2}} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \epsilon_y^2 ds + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} t 3 \cdot E_f \int_{y_1 - \frac{h_1}{2}}^{y_1 + \frac{h_1}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\left(\frac{2 \cdot x}{b} \right)^2 + \frac{1 - \left(\frac{2 \cdot x}{b} \right)^2}{R_{11}} \right) \cdot \epsilon_y^2 ds + \frac{1}{2} t 2 \cdot E_{ad} \int_{y_1 - \frac{h_1}{2}}^{y_1 + \frac{h_1}{2}} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \epsilon_y^2 ds \right) \quad (8)$$

Tel que :

$$\epsilon_y = \frac{dv}{dy} \quad (9)$$

L'expression de l'énergie de déformation due à l'effet de cisaillement peut être écrite comme suit :

$$U_c^e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{vol} G_{xy}(xy) \gamma^2 dvol(i) \quad (10)$$

A partir de l'équation (4), cette énergie devient :

$$U_c^e = \frac{1}{2} G_b \cdot t l \int_{-\frac{h-b}{2}}^{\frac{h-b}{2}} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma_y^2 ds + 2 \left(\frac{1}{2} t 2 \cdot G_{ad} \int_{y_1 - \frac{h_1}{2}}^{y_1 + \frac{h_1}{2}} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma_y^2 ds + \frac{1}{2} t 3 \cdot E_f \int_{y_1 - \frac{h_1}{2}}^{y_1 + \frac{h_1}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{1}{2 \cdot (1 + \nu_f) \cdot [R_{33} \cdot (1 - \left(\frac{2 \cdot x}{b} \right)^2) + \left(\frac{2 \cdot x}{b} \right)^2]} \right) \gamma_y^2 ds \right) \quad (11)$$

Où :

$$\gamma_y = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \quad (12)$$

Où $E_y^{(y)}$ et $G_{xy}^{(y)}$ ($i=1-3$) sont les modules d'élasticité dans la direction y et les modules de cisaillement du mur refend, de l'adhésif et du composite. Comme s'est illustré sur la figure 2, la région renforcée s'étend sur toute la largeur b du voile et excentrée de y_1 à partir du centre du mur refend en béton armé.

Pour chaque élément mur, l'énergie de déformation s'écrit :

$$U^e = \frac{1}{2} d_c^t \cdot K_w \cdot d_c \quad (13)$$

où le vecteur de déplacement nodal est donné par :

$$d_c = \left\{ u_1, \omega_1, v_1, v_2, u_2, \omega_2, v_3, v_4 \right\} \quad (14)$$

Pour la détermination de la matrice de rigidité K_w , on s'est basé sur la formulation des éléments finis standards [16].

3.3 CALCUL DES VALEURS ET VECTEURS PROPRES (ANALYSE EN VIBRATION LIBRE)

L'analyse statique était étendue au problème de vibrations libres en utilisant l'hypothèse des masses concentrées à chaque niveau du bâtiment. Ceci conduit à adopter des matrices masses diagonales. Les forces d'inertie considérées se limitent aux composantes latérales et verticales en raison de leurs importances comparées à celles de rotation.

La matrice masse pour un tel système s'écrit sous la forme suivante :

$$[M] = \text{diag}[m_1, m_2, m_3, \dots, m_{n-1}, m_n] \quad (15)$$

où : m_i ($i=1, 2, n$) sont les masses concentrées à chaque niveau le long de la hauteur de la structure et n le nombre des masses concentrées.

Le calcul de toute structure en vibration libre et en particulier les murs refends consiste à trouver les λ_i et $\{u_i\}$ vérifiant la relation matricielle suivante :

$$[K] \{u_i\} = \lambda_i [M] \{u_i\} \quad (16)$$

où λ_i sont appelés les valeurs propres et $\{u_i\}$ sont les vecteurs propres ou modes propres associés.

[K]et [M] sont respectivement les matrices de rigidité et de masses globales obtenues par les assemblages des matrices élémentaires.

4. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

4.1 ETUDES DE CONVERGENCE

De nombreux exemples sont présentés pour valider les résultats de la présente méthode. Ces résultats seront comparés à ceux du modèle de référence (modèle non renforcé). Les paramètres géométriques du mur refend étudié sont donnés dans le tableau 1 et la figure 3. Tandis que les paramètres mécaniques des matériaux utilisés sont présentés dans le tableau 2.

4.1.1 FRÉQUENCES NATURELLES DE VIBRATION DU MUR RENFORCÉ

Le comportement vibratoire du mur refend de référence sans renforcement est étudié par le logiciel SAP2000 [17]. Les trois premiers modes de vibration seront comparés à ceux obtenus par la présente méthode développée dans ce travail. A partir de cette comparaison, le modèle présenté a donné des résultats jugés très satisfaisants sans pour autant de procéder à un maillage raffiné (224 éléments shells).

4.2 ETUDES PARAMÉTRIQUES

Des résultats numériques sont présentés dans cette étude dans le but de montrer l'effet de renforcement des murs refends par des plaques en matériaux composites sur les déplacements latéraux ainsi que sur les fréquences des trois premiers modes de vibration. Ces matériaux composites sont à base de fibres réparties de façon non uniforme le long de la largeur de la plaque (voir figure 4). L'intérêt de la présente étude est d'illustrer d'une part l'influence de la distribution des fibres, le choix des matériaux utilisés, la position du renforcement par la plaque composite (voir figure 5), et d'autre part le pourcentage de la région renforcée, ainsi que l'épaisseur de la plaque renfort utilisée sur les déplacements latéraux et les trois premiers modes de vibration.

Trois matériaux seront utilisés, à savoir les fibres de graphite, de glass et de boron, avec une matrice d'époxyde. Leurs paramètres mécaniques sont présentés dans le tableau 2.

Six différentes distributions des fibres étaient considérées [18], chacune est caractérisée par la variation de la fraction volumique des fibres V_f (voir tableau 3). Ces fonctions sont schématisées sur la figure 6. A partir du tableau 3 et de la figure 6, la distribution des fibres a pour des valeurs maximales de V_f de 100%, 75%, 50% et 25%. Ce tableau donne en outre $V_{f, moy}$, qui est la valeur moyenne de chaque distribution. Celle-ci est donnée par :

$$(V_f)_{moy} = \int_0^1 V_f(\xi) d\xi \quad (17)$$

Pour démontrer l'efficacité du modèle proposé, un mur refend de 20 étages était analysé, ayant pour hauteur de 60m et une largeur de 12m.

Les autres paramètres sont comme suit :

$t_1=0.25$ m, $t_2=0.002$ m, hauteur d'étage $h=3.00$ m

Les paramètres mécaniques du béton armé et de l'adhésif adoptés dans cette étude paramétrique sont donnés dans le tableau 2.

La masse de chaque étage est pris 120 000 kg. Le mur refend est soumis à une force latérale, distribuée uniformément le long de la hauteur de la structure. Cette force vaut 25 kn/m.

Les valeurs numériques de cette étude sont présentées dans les tableaux 4-7, et sur les figures 7-11. A partir de ces tableaux, nous

remarquons que la redistribution des fibres a tendance d'augmenter les valeurs des fréquences des modes de vibration étudiés. L'effet majeur était observé sur la diminution des déplacements latéraux quand la distribution $V_{f, moy}$ vaut 67% (Pour $\xi = 1$) comme le montre la figure 6. La figure 7 montre l'effet des types de renforts utilisés (graphite, glass et boron) sur les déplacements latéraux du mur refend. Nous pouvons remarquer que chacun des matériaux composites utilisés contribue à réduire la déflexion latérale pouvant aller jusqu'à 20%. La figure 5 présente les positions que peuvent prendre les plaques composites sur les faces extérieures des murs refends pouvant conduire à diminuer la déflexion latérale. La figure 9 démontre qu'une grande performance peut être obtenue en considérant une position de la plaque composite à partir de la base du mur refend. Le pourcentage de la région renforcée influe proportionnellement sur les déflexions et les fréquences de vibration (voir figure 10). L'effet de l'épaisseur de la plaque composite est présenté sur la figure 11, à partir de laquelle une grande épaisseur de la plaque composite conduit à une diminution des déplacements latéraux.

5. CONCLUSION

Une méthode d'analyse des murs refends renforcés par des plaques en matériaux composites à base de fibres réparties de façon non uniforme le long de la largeur du refend était proposée dans le cadre de cette étude, par l'utilisation de la méthode des éléments finis mixtes. Les résultats obtenus démontrent l'effet de la redistribution des fibres de la plaque composite utilisée dans le renforcement des murs refends étudiés. Considérant les déplacements latéraux obtenus, les fibres doivent être placées aux bords de l'élément à renforcer, là où les contraintes normales sont les plus élevées. Cette étude peut être étendue au calcul sismique des structures murs refends en béton armé situées dans les pays à risques sismiques, exemple l'Algérie.

6. BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Benyoucef, A. Tounsi, S.A. Meftah, E. Adda Bedia "Approximate analysis of the interfacial stress concentrations in FRP-RC hybrid beams", Composites interface journal, corrected and submitted, 2005.
- [2] A. Tounsi "Improved theoretical solution for interfacial stresses in concrete beams strengthened with FRP plate" International Journal of Solids and Structures (In press).
- [3] A. Balsamo, A. Colombo, G. Manfredi, P. Negro, A. Prota "Seismic behavior of a full-scale RC frame repaired using CFRP laminates", Engineering structures, 2005, pp. 769-780.
- [4] S. A. Meftah., A. Tounsi., E .Adda Bedia. "A. Lateral stiffness and vibration characteristics of RC shear walls bonded with thin plates" Int Journal of Composite Structures, (In press).
- [5] H.S. Shen, Y. Chen, J. Yang, "Bending and vibration characteristics of a strengthened plate under various boundary conditions", Engineering Structures, 2003, 25, 1157-1168.
- [6] S.A. Meftah, R. Yeghnem, A. Tounsi, E. Adda Bedia, "Lateral stiffness and vibration characteristics of composite plated RC shear walls with variable fibers spacing", International Journal of Structural Stability and Dynamic, corrected and submitted, 2005.
- [7] A. Coull, N.K Subedi, "Coupled shear walls with two and three bands of openings", Pergamon Press, Vol. n° 7, 1972, pp. 81-86.

[8] A. Coull, A.W Irwin, "Load distribution in multi-storey shear wall structures", extrait du rapport final du huitième congrès de l'association des ponts et charpente, 1968, pp.995-1004.

[9] A. Coull, N.W Adams, "Variable stiffness elastic base mechanic for model shear wall structures", Journal of strain analysis, Vol. n° 15, 1983, pp.145-149.

[10] A. Coull; T.H Mohamed, "Simplified analysis of lateral load distribution in structures consisting for frames coupled shear walls and cores", Journal of Structures Engineering, Vol.n° 61 B, 1983, pp.1-8.

[11] A. Coull; E.B. El Talibi, "Dynamic behaviour of stiffened shear walls on flexible foundations", Proceeding of international conference on behaviour of slender structures, Vol. n° 1, 1987, pp.1-18

[12] M. Albiges; W. Jalil, "Contreventement des bâtiments par façades et noyaux", Annale de l'I.T.B.T.P, Série : théorie et méthode de calcul, Publication n°410,1982.

[13] M.M. Coin, Decauchy & Collignon, "Murs de contreventement à ouvertures multiples", Annale de l'I.T.B.T.P, Série : théorie et méthodes de calcul, Publication n°132, 1971

[14] T. Paulay, "Shear walls of multi-storey buildings", printed in the united states of America, 1970

[15] A. McLeod, " New rectangular Finite Element for shear wall analysis", Journal of Structure Division, Vol.n°2, 1969, pp.452-461

[16] K.J. Bathe, " Finite element procedures" , Prentice-Hall, Inc, New Jersey, 1996.

[17] SAP2000, Integrated Software for Structural Analysis and Design, Analysis Software Manual, Computer and Structures Inc. Berkeley, USA, Version 7.12, 1999.

[18] A.W. Leissa ; A.F. Martin, "Vibration and buckling of rectangular composite plates with variable fiber spacing", Composite Structures 14, 1990, pp.339-357

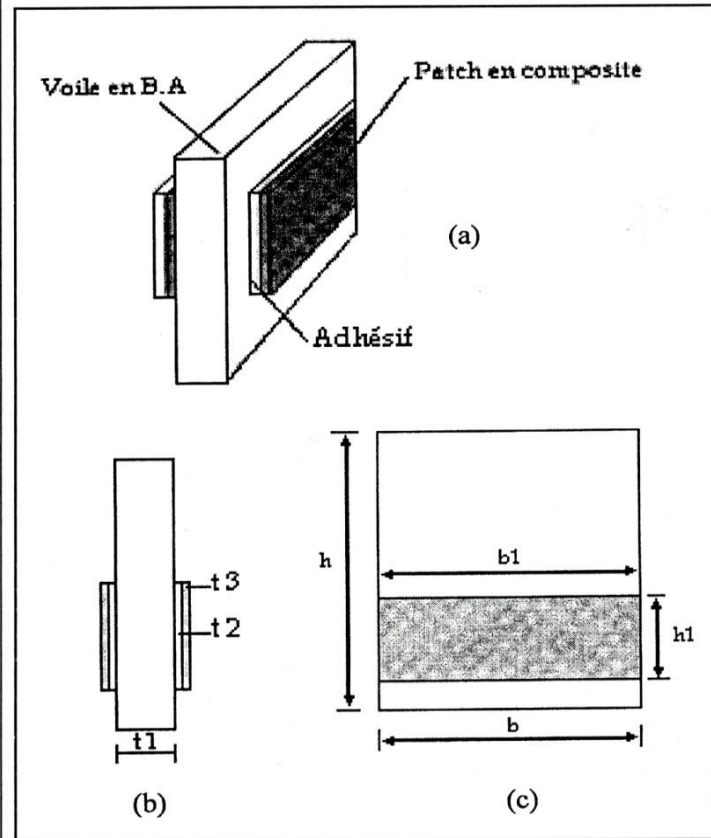


Figure-2 Perspective d'emplacement des plaques composites (a) Emplacement des patches, (b) Vue de face, (c) Vue latérale

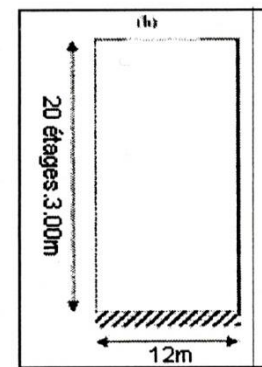


Figure-3 mur refend de 20 étages

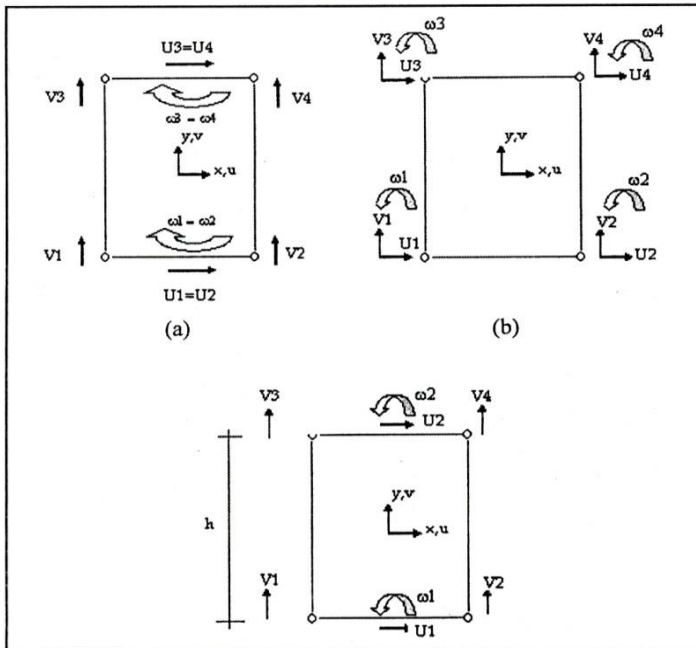


Figure-1 Elément de KWAN simplifié : (a) Elément simplifié avec des déformations latérales négligées (b) Elément original 12 DDL [15]

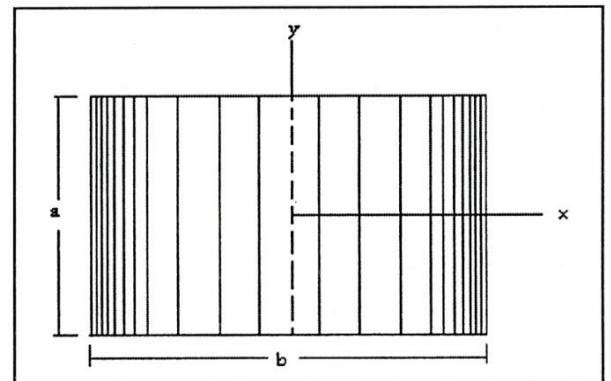


Figure-4 Schéma d'une plaque en composite (Patch en composite)

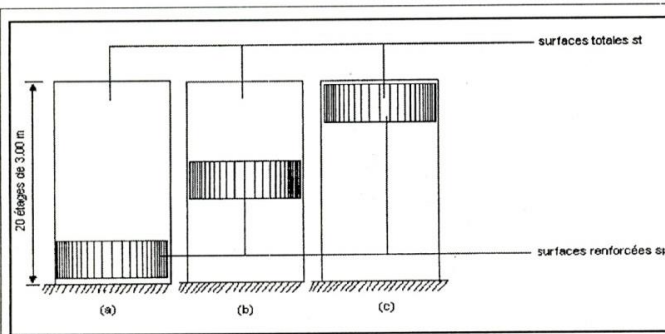


Figure-5 Positions des plaques composites sur le mur refend (a) à la base, (b) au centre, (c) au sommet

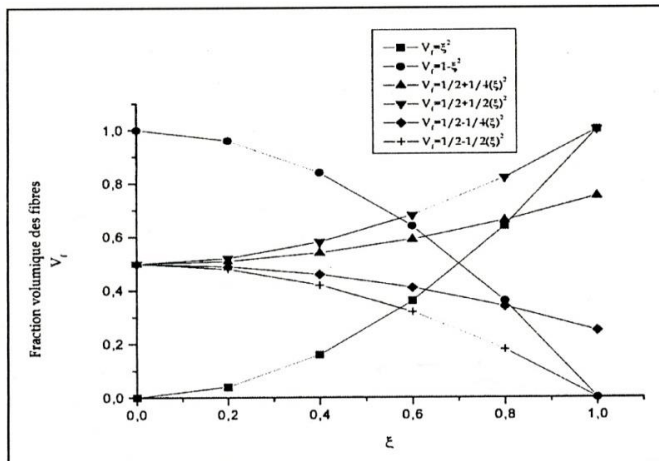


Figure-6 Distributions des fibres

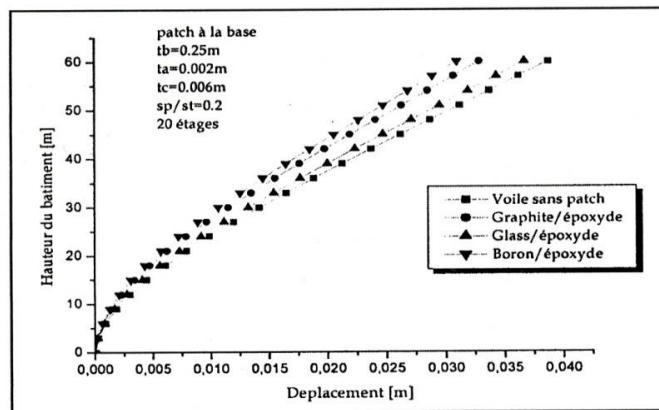


Figure-7 Déplacements en fonction des composites utilisés (Patch de 6mm, à la base, sp/st=0.2, 20 étages)

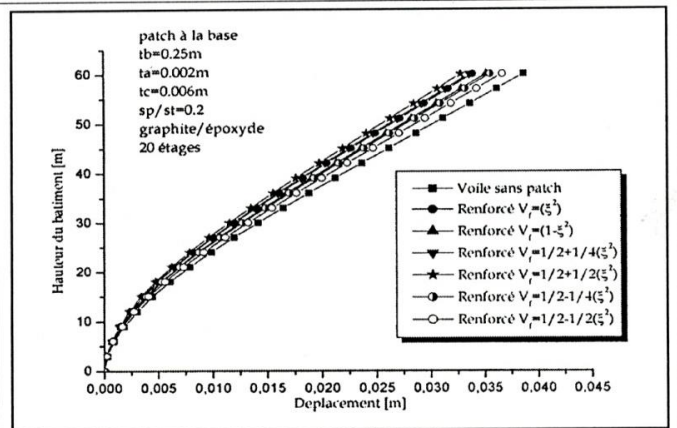


Figure-8 Déplacements en fonction des distributions (Patch en graphite/époxyde de 6mm, à la base, sp/st=0.2, 20 étages)

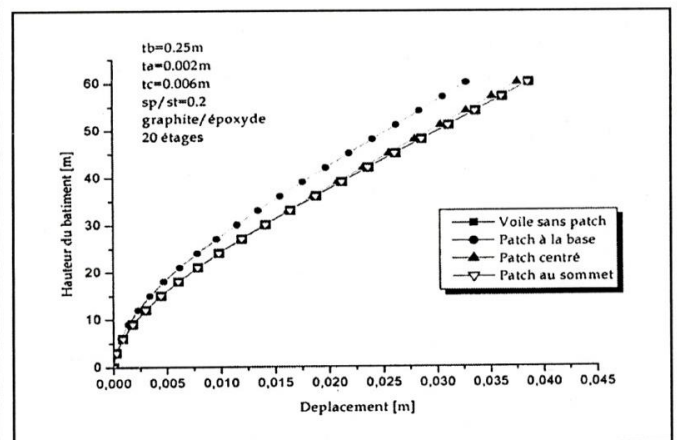


Figure-9 Déplacements en fonction de la position du patch (Patch en graphite/époxyde de 6 mm, sp/st=0.2, 20 étages)

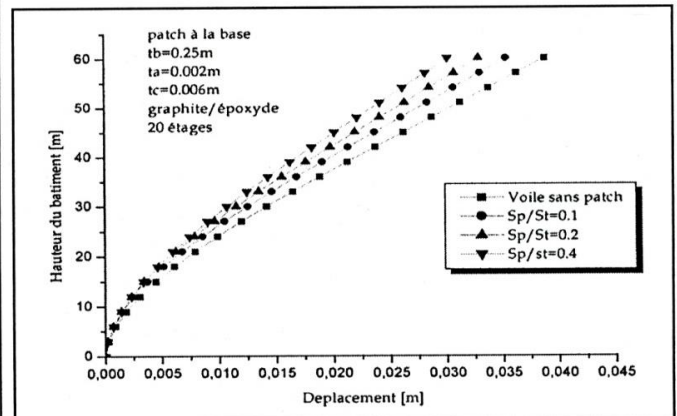


Figure-10 Déplacements en fonction du pourcentage du patch (Patch en graphite/époxyde de 6mm, à la base, 20 étages)

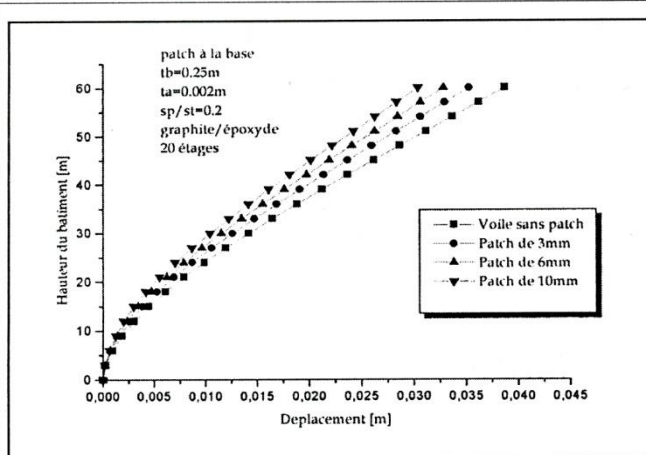


Figure-11 Déplacements en fonction de l'épaisseur du patch (Patch en graphite/époxyde, à la base, $sp/st=0.2$, 20 étages)

Modèles de structures	Dimensions			
	Hauteur totale H (m)	Hauteur d'étage (m)	Largeur du mur (m)	Épaisseur du mur (m)
20 étages	60	3	12	0.25

Tableau-1 Dimensions de la structure étudiée

Matériaux	Propriétés		
	Module d'Young (MPa)	Module de cisaillement (MPa)	Coefficient de poisson (MPa)
Béton	$30 \cdot 10^3$	12712	0.18
Adhésif	3000	1112	0.35
Matrice époxyde	3445	1275	0.35
Graphite	$275 \cdot 10^3$	107420	0.28

Tableau-2 Paramètres mécaniques des matériaux utilisés

$V_f(\xi)$	$(V_f)_{moy}$	$(V_f)_{max}$
ξ^2	33%	100%
$1 - \xi^2$	67%	100%
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\xi^2)$	58%	75%
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\xi^2)$	67%	100%
$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(\xi^2)$	42%	25%
$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\xi^2)$	33%	50%

Tableau-3 Distributions des fibres proposées

Distributions V_f	Fréquences (Hz)		
	Mode1	Mode2	Mode3
Sans patch	0.774	4.031	6.247
SAP2000	0.755	4.255	6.031
ξ^2	0.827	4.150	6.412
$1 - \xi^2$	0.811	4.129	6.540
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\xi^2)$	0.831	4.157	6.511
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\xi^2)$	0.841	4.181	6.540
$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(\xi^2)$	0.807	4.112	6.447
$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\xi^2)$	0.796	4.088	6.412

Tableau-4 Fréquences fonction des distributions (Patch en graphite/époxyde de 6mm, à la base, $sp/st=0.2$, 20 étages)

Position du patch	Fréquences (Hz)		
	Mode1	Mode2	Mode3
Sans patch	0.774	4.031	6.247
à la base	0.841	4.181	6.540
Centré	0.795	3.864	6.123
Au sommet	0.598	3.254	5.987

Tableau-5 Fréquences fonction de la position du patch (Patch en graphite/époxyde de 6 mm, 20 étages)

Pourcentage du patch sp/st (%)	Fréquences (Hz)		
	Mode1	Mode2	Mode3
Sans patch	0.774	4.031	6.247
10	0.811	4.154	6.393
20	0.841	4.181	6.540
40	0.879	4.221	6.815

Tableau-6 Fréquences fonction du pourcentage du patch (Patch en graphite/époxyde de 6 mm, à la base, 20 étages)

Épaisseurs du patch (mm)	Fréquences (Hz)		
	Mode1	Mode2	Mode3
Sans patch	0.774	4.031	6.247
3	0.811	4.119	6.409
6	0.841	4.181	6.540
10	0.873	4.255	6.682

Tableau-7 Fréquences fonction des épaisseurs (Patch en graphite/époxyde à la base, $sp/st=0.2$, 20 étages)