

FORMULATION D'UN NOUVEL ELEMENT D'ARC

Par :

M.A MOHAMED CHERIF

Ingénieur Ecole Polytechnique de Montréal- Magister Génie Civil - Enseignant à l' E.N.T.P.

Et :

A. CHAKER

MSc. PH. D. Illinois University - Professeur à l' U.S.T.H.B.

1 INTRODUCTION

L'utilisation des éléments finis pour le calcul des arcs à été entreprise par divers auteurs depuis plusieurs années [2] [10].

L'intérêt de ces travaux réside non seulement dans le calcul des déplacements et des efforts des structures de ce type ; mais aussi dans la recherche de formulations pouvant servir à des structures plus complexes à savoir les coques.

Historiquement, le modèle déplacement a été le premier à être utilisé et les éléments basés sur un champ de déplacements ont donné de très bons résultats et ont permis de traiter une grande variété de problèmes. Il est bien connu que le champ de déplacements choisi doit pouvoir représenter l'état de déformation constant pour les valeurs correspondantes des degrés de liberté [11], et il doit pouvoir représenter les modes rigides. Enfin, une continuité de type C^1 (continuité des déplacements et de leurs dérivées premières) doit être assurée pour ne pas avoir de discontinuité entre les éléments.

2 REVUE DES DIFFERENTS ELEMENTS

L'un des premiers travaux effectué pour formuler un élément d'arc (poutre courbe) élancé, basé sur des fonctions simples d'interpolation et de représentations admissibles, assurant la continuité C^0 pour le déplacement tangentiel (u) et la continuité C^1 pour le déplacement radial (w) se termine par des failles inexplicables. Il est pratiquement nécessaire d'utiliser des éléments dont la longueur est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur pour obtenir une solution adéquate. Le champ de déplacements est linéaire en (u) et cubique en (w) (élément C.L).

On s'accordait alors sur l'explication que l'élément ne donnait pas de résultats satisfaisants, parce qu'il ne pouvait pas représenter les mouvements de corps rigide.

Dans un article original CANTIN et CLOUGH [7] rajoutent les déplacements correspondants à un mouvement de corps rigide, pour obtenir un champ contenant explicitement les modes rigides (élément C.C.L) :

Les résultats donnés par ASHWELL et SABIR [3] [4]

résumant l'étude comparée des éléments C.L. et C.C.L. Les conclusions de ces travaux montrent que l'inclusion explicite des mouvements de corps rigide dans les fonctions de déplacement améliore le comportement et la convergence de l'élément pour les arcs surbaissés épais ou minces. Cependant, pour les arcs élancés ($h/R=320$) l'élément C.C.L. nécessite un grand nombre d'éléments dans le modèle pour obtenir une convergence satisfaisante.

DAWE [9] [10] étudia les éléments d'arc en retenant les fonctions de déplacement suivantes :

a) élément Q.Q : Les fonctions de déplacement retenues sont de degré (5) pour (u) et (w) [Quintique en u et Quintique en w]

b) élément C.Q : Les fonctions de déplacement retenues sont respectivement de degré 3 pour (w) et de degré 5 pour (u). [Cubique et Quintique.].

c) élément Q.C : [Quintique en (w) et Cubique en (u)].

d) élément C.C : [Cubique en (w) et Cubique en (u)].

A titre de comparaison l'élément S.C [2] dont le champ de déplacements couplé est réaménagé pour obtenir un état de déformation longitudinal constant et une variation de courbure linéaire a été introduit dans l'étude. Les résultats montrent la bonne performance de l'élément (Q.Q) et de l'élément (S.C) dont le comportement est régulier quel que soit le degré de surbaissement de l'arc ou du rapport h/R. De plus l'élément (S.C) utilise les degrés de liberté nodaux dont la signification physique est évidente, contrairement à l'élément (Q.Q) qui utilise les dérivées secondes des déplacements. Les éléments (C.Q) et (C.C) sont nettement moins performants que l'élément (S.C) et, dans certains cas, même moins performants que l'élément de poutre droite.

L'élément (Q.Q) présente une forte oscillation dans le calcul des efforts normaux ; ce qui le rend de ce point de vue, moins intéressant que l'élément S.C.

3 FORMULATION D'UN NOUVEL ELEMENT

La procédure consiste à étudier l'effet du mouvement de corps rigide sur la matrice de rigidité de l'élément d'une part, et l'effet de la déformation propre de l'élément sur

cette matrice d'autre part. On s'assure pendant la formulation que le mouvement de corps rigide ne provoque pas de déformation dans l'élément.

3.1 Matrice de transformation

Considérons un mouvement de corps rigide défini par les deux translations et la rotation ;

$$\Delta x, \Delta y \text{ et } \Delta \theta$$

En désignant la rotation de la section au point (P) par ϕ ; on écrit la relation donnant les déplacements en fonction de ce mouvement de corps rigide :

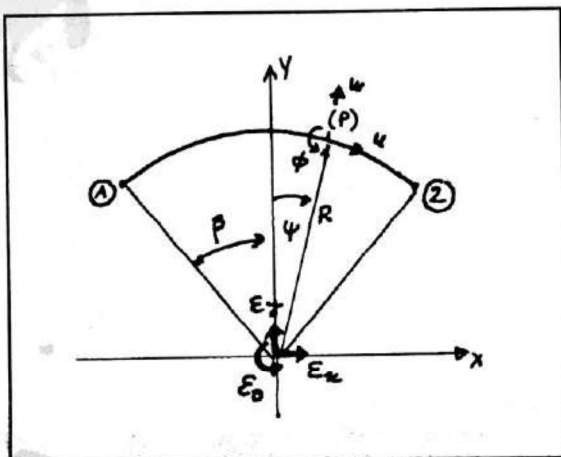
$$\begin{pmatrix} u \\ w \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & -R \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta \theta \end{pmatrix}$$

Dans leurs travaux sur les considérations qualitatives de convergence des éléments d'arc, YAMAMOTO & OHTSUBO [12] introduisent les déplacements généralisés rapportés au point 0 (centre de courbure de l'élément) dus à une déformation propre de l'élément (Element-Wise Deformation). En adoptant la même procédure, on réduit la déformation propre de l'élément sous forme de trois composantes d'une déformation généralisée.

$$[\hat{\epsilon}] = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_\theta \end{pmatrix}$$

Les déplacements généralisés correspondants sont définis [12] par :

$$\begin{aligned} \delta x &= R\epsilon_x \\ \delta y &= R\epsilon_y \\ \delta \theta &= \epsilon_\theta \end{aligned}$$



Ces paramètres représentent les déplacements généralisés rapportés au point (0) du système (X,Y) dus à une

déformation propre de l'élément mais ne désignent pas des quantités physiques particulières. Ils seront explicités en fonction du modèle de déformation choisi. Leur évaluation au niveau des noeuds (1) et (2) s'écrivent :

$$\delta x_i = \pm \beta R \epsilon_x \quad \delta y_i = \pm \beta R \epsilon_y \quad \delta \theta_i = \pm \beta \epsilon_\theta$$

A l'aide des transformations précédentes on définit les déplacements aux noeuds (1) et (2) de l'élément dus à un mouvement de corps rigide et à une déformation propre de l'élément par :

$$U_1 = (\Delta x - \beta R \epsilon_x) \cos \beta + (\Delta y + \beta R \epsilon_y) \sin \beta - R (\Delta \theta - \beta \epsilon_\theta)$$

$$W_1 = -(\Delta x - \beta R \epsilon_x) \sin \beta + (\Delta y - \beta R \epsilon_y) \cos \beta$$

$$\phi_1 = \Delta \theta - \beta \epsilon_\theta$$

$$U_2 = (\Delta x + \beta R \epsilon_x) \cos \beta - R (\Delta \theta + \beta \epsilon_\theta) - (\Delta y + \beta R \epsilon_y) \sin \beta$$

$$W_2 = (\Delta x + \beta R \epsilon_x) \sin \beta + (\Delta y + \beta R \epsilon_y) \cos \beta$$

$$\phi_2 = \Delta \theta + \beta \epsilon_\theta$$

La résolution de ces équations conduit à :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_\theta \end{pmatrix} = [T] [U_1, W_1, \phi_1, U_2, W_2, \phi_2]^T$$

[T] est une matrice de TRANSFORMATION de dimension (3x6) dont les termes sont donnés par :

$$T_{11} = -T_{14} = -\cos \beta / 2R\beta \quad T_{12} = T_{15} = \sin \beta / 2R\beta$$

$$T_{13} = -T_{16} = -\cos \beta / 2\beta \quad T_{21} = T_{24} = -\sin \beta / 2R\beta \cos 2\beta$$

$$T_{22} = -T_{25} = -\cos \beta / 2R\beta \cos 2\beta$$

$$T_{23} = T_{26} = -\sin \beta / 2\beta \cos 2\beta$$

$$T_{31} = T_{32} = T_{34} = T_{35} = 0 \quad T_{33} = -T_{36} = -1/2\beta$$

3.2 Matrice de rigidité élémentaire

La déformation longitudinale est donnée par :

$$\epsilon = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R}$$

et (w/R) désignera la déformation longitudinale de la fibre moyenne sous l'effet de la flexion seulement, soit :

$$\varepsilon_\theta = \frac{du}{ds} = -\frac{w}{R}$$

En ce qui concerne (du/ds) représentant l'effet de l'effort normal, une relation devra être établie pour la lier à la déformation généralisée ε_x .

On note par :

$$L = \int_{-\beta}^{+\beta} ds = 2R\beta \quad \text{et} \quad l = \int_{-\beta}^{+\beta} dx = 2R \sin \beta$$

respectivement la longueur de l'élément d'arc (L) et la longueur de la corde sous-tendue (l). On retient l'hypothèse : les déformations sus-mentionnées sont dans le même rapport que les longueurs correspondantes (l) et (L) ;

$$\frac{du/ds}{\varepsilon_x} = \frac{L}{l} = \frac{\beta}{\sin \beta} \quad \text{soit} \quad \frac{du}{ds} = \frac{\beta}{\sin \beta} \varepsilon_x$$

Ce qui donne :

$$\varepsilon = \frac{\beta}{\sin \beta} \varepsilon_x - \varepsilon_\theta$$

La variation de courbure est donnée par :

$$\kappa = -\frac{d}{ds} \left(\frac{dw}{ds} \right) + \frac{w}{R^2} = \frac{1}{R} \left(\frac{dw}{ds} + \frac{w}{R} \right)$$

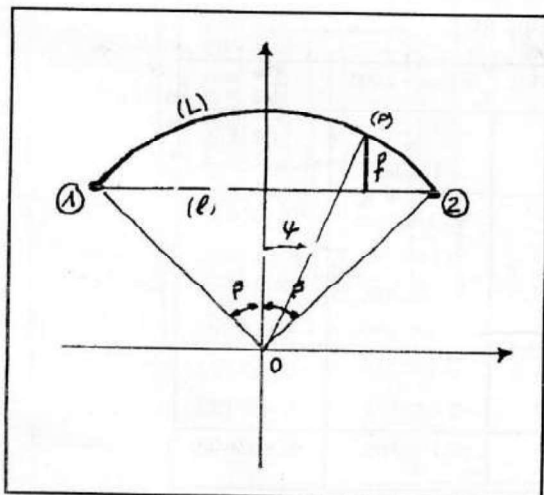
Prenant en compte ce qui a été dit précédemment pour la déformation longitudinale, on peut établir une relation entre (dw/ds) et ε_y .

Dans ce cas, la longueur F, (en remplacement de la longueur - l - de la corde) sera définie par :

$$F = \int_{-\beta}^{+\beta} f \, d\psi$$

avec :

$$f = R (\cos \psi - \cos \beta)$$



Algerie EQUIPEMENT

$$F = 2R \sin \beta - \beta \cos \beta$$

On retient également l'hypothèse que les deux déformations ;

$$\frac{dw}{ds} \quad \text{et} \quad \varepsilon_y$$

sont dans le même rapport que (L/F) ;

$$\frac{dw/ds}{\varepsilon_y} = \frac{L}{F} = \frac{\beta}{\sin \beta - \beta \cos \beta}$$

Cependant l'élément utilisé avec cette hypothèse n'a pas donné de résultats satisfaisants. Aussi, s'inspirant de l'élément S.C (variation linéaire du changement de courbure), ou de la poutre droite classique on a retenu une variation linéaire du changement de courbure. Ce qui s'écrit :

$$\kappa = \frac{1}{R} \left(\frac{\beta}{\sin \beta - \beta \cos \beta} \psi \varepsilon_y - \varepsilon_\theta \right)$$

On retrouve ainsi les relations liant la déformation de l'élément (déformation longitudinale et changement de courbure) aux déformations généralisées : $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ et ε_θ

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\sin \beta} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{\beta \psi}{R (\sin \beta - \beta \cos \beta)} & \frac{-1}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_\theta \end{pmatrix}$$

$$= [\mathbf{B}] \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_\theta \end{pmatrix}$$

La matrice de rigidité $[\mathbf{Ke}]$ exprimée en fonction des déformations généralisées sera donnée par :

$$[\mathbf{Ke}] = \int_{\text{vol}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \, d(\text{vol})$$

soit :

$$[\mathbf{Ke}] = \begin{pmatrix} \frac{2 E \Omega R \beta^3}{\sin^2 \beta} & 0 & \frac{-2 E \Omega R \beta^2}{\sin \beta} \\ 0 & \frac{2 E I \beta^5}{3 R (\sin \beta - \beta \cos \beta)^2} & 0 \\ \frac{-2 E \Omega R \beta^2}{\sin \beta} & 0 & 2 E \Omega R \beta + 2 \frac{EI}{R} \beta \end{pmatrix}$$

La matrice de rigidité $[K]$, exprimée en fonction des degrés de liberté retenus à savoir les déplacements (u) et (w) et la rotation à chaque noeud sera donnée par :

$$[K] = [T]^T [Ke] [T]$$

$[T]$, étant la matrice de transformation développée auparavant.

3.3 Convergence

La matrice de rigidité ainsi formulée a été introduite dans un programme d'éléments finis et un ensemble d'exemples ont été traités pour vérifier la performance et la conver-

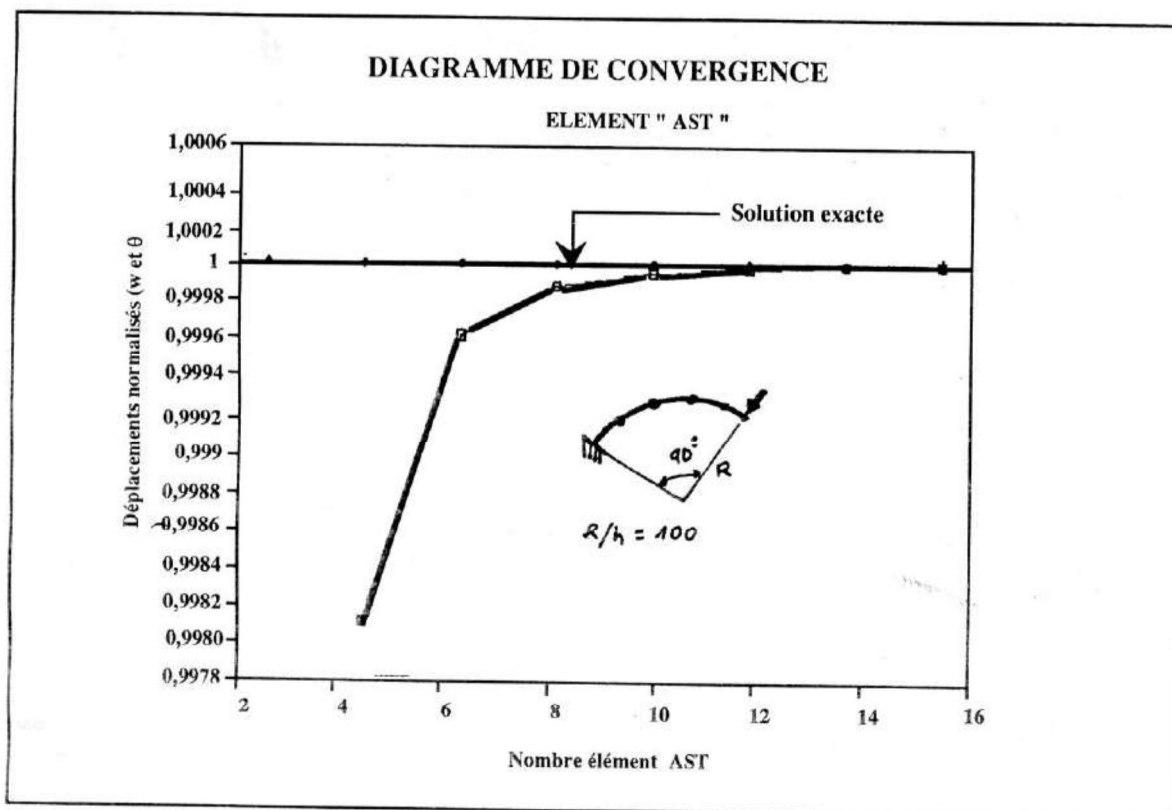
gence de l'élément.

L'examen des résultats obtenus permet de souligner les principales qualités de cet élément :

- 1) Le nombre de degrés de liberté est minimum et leur signification physique simple,
- 2) La bonne performance de l'élément obtenue avec un nombre relativement réduit d'éléments (10) et ce pour différents types de condition limites,
- 3) La cohérence des résultats qui sont tels que l'énergie de déformation reste constamment légèrement en dessous de celle de la solution exacte. On notera que l'élément est légèrement plus rigide que celui de la solution exacte,
- 4) La bonne performance demeure valable quel que soit le type d'arc aussi bien pour les élancements faibles ($R/h=10$)

TABLEAU 1 - ARC EN CONSOLE SOUS-TENDANT UN ANGLE DE 90 °						
E = 2.6 Inertie = 8.33E-2 Section = 1.000						
R/h = 10			R/h = 100			
Nb élém	W à la clef	U à la clef	rotation à la clef	W à la clef	U à la clef	rotation à la clef
4	-0.362102	0.230141	-0.461540	-0.361807	0.230334	-0.461540
5	-0.362504	0.230396	-0.461540	-0.362208	0.230588	-0.461540
6	-0.362653	0.230489	-0.461540	-0.362355	0.230689	-0.461540
8	-0.362749	0.230549	-0.461540	-0.362451	0.230740	-0.461540
10	-0.362776	0.230566	-0.461540	-0.362477	0.230757	-0.461540
12	-0.362786	0.230572	-0.461540	-0.362487	0.230763	-0.461540
Exact	-0.362794	0.230577	-0.461538	-0.362494	0.230767	-0.461538

TABLEAU 2 - ARC EN CONSOLE AVEC APPUI SIMPLE SOUS-TENDANT UN ANGLE DE 90 °					R/h = 100
E = 2.6 Inertie = 8.33E-2 Section = 1.000					
Nb élém	W à la clef	rotation à la clef	N à la clef	M encastrement	
4	-0.377406	-0.908875	-0.140694	-0.406943	
5	-0.382184	-0.913843	-0.140506	-0.405057	
6	-0.383968	-0.915683	-0.140436	-0.404359	
8	-0.385135	-0.916879	-0.140390	-0.403905	
10	-0.385460	-0.917211	-0.140378	-0.403779	
12	-0.385578	-0.917332	-0.140373	-0.403733	
Exact	0.385687	-0.917441	-0.140369	-0.403690	



que pour les élancements élevés ($R/h=100$ et 1000),

5) L'élément est sans limitation à l'élancement de la structure. Il ne fait pas apparaître le phénomène de blocage à l'effort normal,

6) La convergence est monotone et rapide pour les variables cinématiques et cinétiques.

La simplicité de sa formulation et de sa dérivation lui donne un avantage sur les éléments d'arc existant jusqu'à présent. En effet la matrice de rigidité élémentaire - avant transformation- obtenue est remarquablement simplifiée et permet d'envisager des transformations simples pour tenir compte de la non-linéarité géométrique ou mécanique.

4 BIBLIOGRAPHIE

(1) D. G. ASHWELL & A. B. SABIR "A New Cylindrical Finite Element Based on Simple Strain Function" Int. Jour. Mechanical Science vol. 13 pp. 171-180 (1971).

(2) D. G. ASHWELL & A. B. SABIR & T.M. ROBERTS "Further Studies in the Application of curved Finite Element to Circular Arch" Int. Jour. Numerical Methods in Eng. vol.3 pp.507-517 (1974).

(3) D. G. ASHWELL & A. B. SABIR "Limitation of certain Curved Element when Applied to Arch." Int. Journ. Numerical Methods in Eng. vol.3 pp. 113-139 (1971).

(4) D. G. ASHWELL & A. B. SABIR "On the Finite Element Calculation of Stress Distribution in Arch." Int. Jour. Mechanical Science. vol. 16 pp. 21-29 (1974).

(5) D. G. ASHWELL "The Behavior with Diminishing Curvature of Strain Based Finite Element." Journal of sound & vibration vol.18 pp. 133-137 (1970).

(6) G. CANTIN "Rigid Body Motion in Curved Finite Element". Jour. American Inst. Aera. & Astronautics Vol. 8 pp. 1252-1255 (1968).

(7) G. CANTIN & W. CLOUGH "A curved cylindrical Shell Finite Element" Jour. American Inst. Aera. & Astronautics Vol.6 pp. 1057-1062 (1968).

(8) G. CANTIN "Strain Displacement Relationship for cylindrical Shell Finite Element" Jour. American Inst. Aera. & Astronautics vol.6 pp. 1787-1788 (1968).

(9) D.J. DAWE "Numerical Studies Using Circular Arch Finite Element" Computers & Structures Int. Jour., vol. 4 pp. 729-740 (1974).

(10) D.J. DAWE "on Finite Deflection Analysis of Shallow Arch by Discret Element." Int. Journ. Numerical Methods in Eng. vol.3 pp. 529-552 (1971).

(11) D.J. DAWE "Curved Finite Element for Analysis of shallow and deep Arches." Computers & Structures Int. Jour., vol.18 pp. 559-580 (1974).

(12) Y. YAMAMOTO & H. OSHTSUB "A Qualitative Accuracy Consideration on Arch Elements" Int. Jour. Numerical Methods in Eng. vol. 18 pp. 1179-1193 (1982).