



المدرسة الوطنية العليا للأشغال العمومية

**Ecole Nationale Supérieure des Travaux Publics**

**National School of Built and Ground Works Engineering**

# Mémoire

*Pour l'Obtention du Diplôme de MASTER*

*Filière : TRAVAUX PUBLICS*

*Spécialité : INFRASTRUCTURES DE BASE*

## Thème

**Calcul optimal des poutres en béton à haute  
performance aux états limites ultimes selon  
l'Eurocode 2 (EC 2)**

*Proposé par :*  
**Dr.FEDGHOUCHE Ferhat**

*Présenté par :*  
**BENDAHOUCHE Abdelmoumene**

*Promotion 2015*

*Ecole Nationale des Travaux Publics. Garidi. Kouba.*

## ملخص

يحتوي هذا البحث على عرض طريقة عامة معتمدة على طرق التصميم الامثل و هذا من اجل الحصول على الابعاد المثلى لتصميم منخفض التكاليف لأعمدة خرسانية مسلحة عالية الاداء مستطيلة المقطع, الدالة الهدف تمثل تكاليف المواد, مجموعة القيود تتمثل في قيود ميكانيكية مستخرجة طبقا لقواعد الوثيقة المعتمدة الخرسانة المسلحة في الحالات القصوى تحت بند السلوك البلاستيكي للخرسانة و الفولاذ و كذلك قيود تصميم مستخرجة طبقا للقواعد العامة للتصميم و التنفيذ الجيد.

## الكلمات المفتاحية

الامتلية, تصميم منخفض التكاليف, الدالة الهدف, قيود, خرسانة عالية الجودة, عارضة, حالة الحد النهائي, الكود الاوروبي.

## Résumé

Le présent travail de recherche résume une méthodologie générale pour obtenir, sur la base d'une méthode d'optimisation, les dimensionnements optimaux de moindres coûts des poutres rectangulaires en béton armé à haute performance. La fonction objective à minimiser représente les coûts des matériaux, l'ensemble des contraintes consiste aussi bien en des contraintes de comportement (définies ici conformément au Eurocode 2 incluant celles liées aux comportements plastique du béton et de l'acier) qu'en que des contraintes relatives aux règles pratiques courantes de pré-dimensionnement et de bonne exécution.

## MOTS-CLES

Optimisation, Conception de moindre cout, fonction objectif, contrainte, Béton à haute performance, poutre, état limite ultime, Eurocode 2.

## Abstract:

this research work resume a general methodology to obtain, on the basis of method of optimization , to find the optimum dimensions for a law costs design of an rectangular reinforced concrete columns (case of the piers of bridges). The objective function to minimize represents the costs of the materials. The whole of the constraints consists as well of design constraints (defined, here, in accordance with the BAEL under the bend of those related to the plastic behaviors of the concrete and steel) as in that constraints relating to the rules of good practices design and good execution.

## KEYWORDS

Optimization, minimum cost design, objective function, constraint, high performance concrete, beam, ultimate limit state, Eurocode 2.

## Table des matières

Introduction générale .....	1
Objectifs visés .....	1

Recherche Bibliographique.....	3
--------------------------------	---

### **Chapitre 1 : Béton à haute performance**

1.1 Introduction.....	7
1.2 Définition des BHP .....	7
1.3 Propriétés .....	7
1.3.1 Effets de la température sur le béton en cours de durcissement.....	7
1.3.2 Comportement en compression .....	8
1.3.3 Comportement en traction .....	9
1.3.4 Rigidité .....	10
1.3.5 Le fluage .....	10
1.3.6 Durabilité.....	10
1.3.7 Résistance au feu .....	10
1.4 Avantage des BHP .....	11
1.5 Application.....	12
1.5.1 Le pont de Normandie .....	13
1.5.3 Le pont de l'île de Ré.....	13
1.5.4 Les Tours Cœur-Défense.....	14
1.5.5 La Tour PB6 .....	14

### **Chapitre 2 : Calcul classique d'une poutre rectangulaire simplement armée selon l'EC 2**

2.1 Introduction.....	16
2.1.1 Définitions.....	16
2.1.2 Notations et terminologie.....	16
2.2 Principes généraux de calcul.....	17
2.2.1 Etat limite ultime.....	17
2.2.2 Etats limites de service.....	17
2.3 Equations générales .....	18
2.3.1 Equilibre des forces.....	18
2.3.2 Equilibre des moments.....	18

2.3.3 Equations de compatibilité.....	18
2.4 Section rectangulaire sans aciers comprimés.....	19
2.4.1 Coefficients de remplissage et de centre de gravité.....	19
2.4.2 Diagramme parabole-rectangle et rectangulaire simplifié.....	21
2.4.3 Moment frontière $M_{AB}$ .....	23
2.4.4 Dimensionnement de $A_{s1}$ , $u$ à l'ELU.....	25
2.5 Armatures d'effort tranchant.....	27
2.6 Organigrammes récapitulatifs pour les sections rectangulaires:.....	29

### **Chapitre 3 : Concept et formulation générale d'un problème d'optimisation**

3.1 Introduction.....	33
3.2 Domaine d'application.....	33
3.3 Définition.....	34
3.3.1 Fonction objectif.....	34
3.3.2 Contrainte.....	34
3.3.3 Variables de décision.....	35
3.3.5 Minimisation.....	35
3.3.6 Maximisation.....	36
3.3.7 Formulation générale du problème.....	36
3.4 Type des problèmes d'optimisation.....	38
3.4.1 Problèmes probabilistes.....	38
3.4.3 Problèmes déterministes.....	39
3.5 Méthode et formulation général d'un problème d'optimisation déterministe.....	39
3.5.1 Contraintes.....	39
3.5.2 Espace de conception.....	41
3.5.3 Fonction objectif.....	42

### **Chapitre 4: Méthodologie de calcul optimal des poutres rectangulaire simplement armée en BHP selon l'EC 2**

4.1 Introduction :.....	44
4.2 États limites ultimes.....	44
4.3 Position du problème.....	46
4.4 Fonction objectif.....	47

4.5 Formulation du problème.....47

Conclusion générale.....50

Référence bibliographique .....51

## Liste des figures

Figure 1.1 Relation entre la résistance à la compression et le rapport E/C.....	8
Figure 1.2 Béton ordinaire .....	9
Figure 1.3 Béton à haute performance.....	9
Figure 1.4 diminution de la résistance à la compression des BHP selon l'EC2 Feu.....	9
Figure 1.5 Des charges opposées sur la surface des grains de ciment provoquent la floculation.....	11
Figure 1.6 Adsorption des molécules du plastifiant à l'interface entre le grain de ciment et l'eau.....	13
Figure 1.7 Répulsion électrostatique des deux particules de ciment.....	14
Figure 1.7 Le pont de Normandie.....	14
Figure 1.8 Le pont de l'île de Ré.....	15
Figure 1.9 Les Tours Cœur-Défense.....	16
Figure 1.10 La Tour PB6.....	17
Figure 2.1 Application de la force par rapport au centre de gravité dans une poutre.	18
Figure 2.2 diagramme des forces internes.....	19
Figure 2.3 digramme de Navier.....	20
Figure 2.4 hauteur de l'axe neutre "ELU".....	21
Figure 2.5 hauteur de l'axe neutre "ELS".....	21
Figure 2.6 Equilibre d'une section soumis à un moment de flexion (section rectangulaire).....	22
Figure 2.7 Diagramme parabole-rectangle.....	23
Figure 2.8 Equilibre d'une section soumis à un moment de flexion (Diagramme parabole-rectangle).....	24
Figure 2.9 Diagramme bilinéaire.....	27
Figure 2.10 rectangulaire simplifié.....	29
Figure 2.12 Diagrammes des pivots A et B.....	29
Figure 2.13 Exemples d'armatures d'effort tranchant.....	27
Figure 2.14 poutres rectangulaire.....	29
Figure 1.15 Organigrammes récapitulatifs pour la section rectangulaire. ....	32
Figure 4.1 Diagramme contrainte-déformation poutre rectangulaire.....	47

## Liste des tableaux

Tableau 2.1 Elément de hauteur de la force de compression dans le diagramme parabole-rectangle.....	21
Tableau 2.2 Elément de hauteur de la force de compression dans le diagramme bilinéaire.....	22
Tableau 2.3 Valeur de $\lambda$ on fonction de la classe de résistance de béton.....	24

## **Introduction générale**

Les règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états limites -Eurocode 2- ont pour objet de spécifier les principes et les méthodes les plus actuels devant présider et servir à la conception et aux calculs de vérification des structures et ouvrages en béton armé.

Les bétons font partie des matériaux les plus utilisés dans l'industrie de la construction. Ces matériaux composites sont constitués de granulats lesquels sont liés par une pâte de ciment hydraté. Le processus d'hydratation se déroule d'une manière très complexe. Encore aujourd'hui, les mécanismes de l'hydratation du ciment ne sont pas complètement compris. La quantité d'eau exigée par les réactions d'hydratation représente environ 30 % de la masse du ciment, des recherches étaient faites pour diminuer cette quantité d'eau pour obtenir un grand résistant du béton.

Le dimensionnement des structures en béton armé est l'une des préoccupations majeures de l'ingénieur en génie civil. L'objectif de l'ingénierie moderne consiste à réduire les coûts et à satisfaire les performances avec une utilisation efficace des ressources disponibles.

La formulation de l'optimisation vise à minimiser la fonction objective (le poids, la section ou coût de construction) sous les contraintes de performance, de résistance et de faisabilité physique et géométrique (D'autres formulations peuvent être utilisées comme l'optimisation multicritère où il s'agit de minimiser ou de maximiser les fonctions de coûts et de performance simultanément).

D'une façon générale, l'optimisation des structures est formulée mathématiquement par un problème de minimisation d'une fonction appelée «fonction objectif» sous des fonctions de contrainte appelées « limitations ». Ce problème est souvent résolu avec les algorithmes itératifs de la programmation.

## **Objectifs visés**

Le présent travail de recherche vise le développement d'une méthodologie générale des dimensionnements optimal des moindres coûts des poutres rectangulaires simplement armées soumises à des charges ultimes en béton à haute performance. De

## Introduction générale

---

manière générale, la fonction objective à minimiser devra comprendre les coûts du béton, de l'acier et du coffrage.

Les contraintes consisteront en des contraintes de conception aux Etats Limites Ultimes (ELU) définies conformément à un code récent de conception et de calcul des structures en béton armé largement adopté par la communauté internationale. Le modèle mathématique de moindre coût devra également inclure les contraintes liées aux règles pratiques courantes de pré-dimensionnement et de bonne exécution.

### Recherche Bibliographique

Smeaton (1756), Vicat (1818), Apsdin (1825) furent parmi les inventeurs des bétons modernes. Monier et Lambot (1848), Coignet (1852), Hennebique (1880) réalisèrent, avec ce matériau les premières constructions en béton armé.

Puis durant un siècle, le béton restera un mélange de granulats, de ciment et d'eau. Ce dernier constituant jouait deux rôles essentiels : assurer l'hydratation du ciment et participer activement à l'ouvrabilité du béton frais en lui donnant une rhéologie satisfaisant.

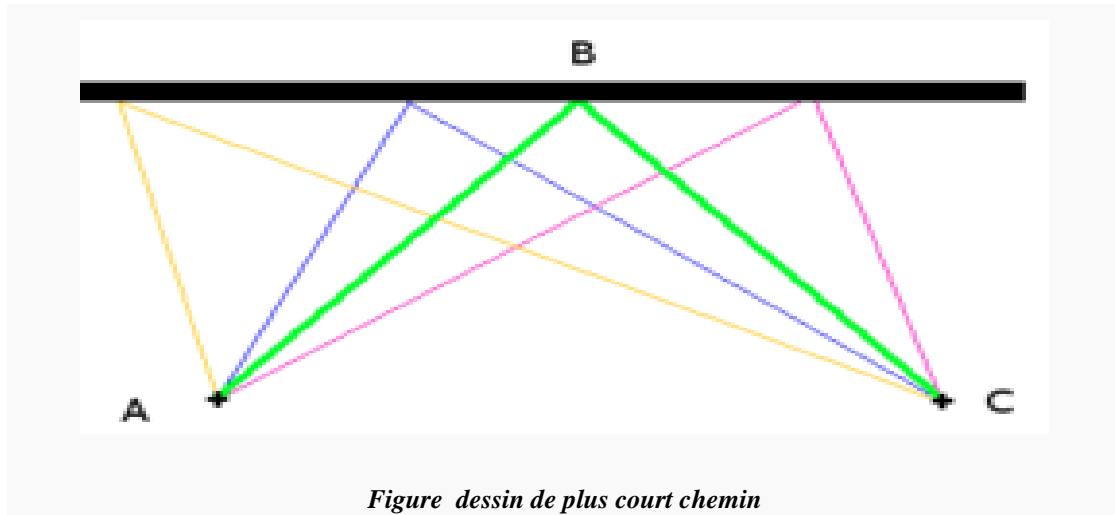
Cette dernière décennie les études ont été axées sur la recherche de méthodes permettant de renforcer cette résistance. Des progrès considérables ont été enregistrés dans ce domaine au cours de ces dernières décennies. Aux Etats-Unis, durant les années 1950, une résistance à la compression de 35 MPa était considérée comme une résistance élevée. Dans les années 1980, la limite a été portée à 70 MPa, alors qu'en 1990, la notion de béton à haute résistance était réservée à un béton d'une résistance à la compression comprise entre 80 et 100 MPa. Cette évolution n'est pas terminée. Des résistances à la compression supérieures à 120 MPa ont été réalisées lors de constructions récentes. La notion de « haute résistance » est dès lors très relative et, de toute évidence, évolutive. [1]

Dans le béton à haute performance, en particulier il a beaucoup de recherche dans ce domaine parmi ceux-ci, par exemple Les bétons hautes performances, Caractéristiques, durabilités, applications, presse pont et chaussée Presses de l'école nationale des ponts et chaussées, 1992. Béton haute performance, Pierre-Claude Aitcen 2001. Dr, ir, G, De Schulter ir, arch. J, Apers Le béton à haute performance, J, P, Jacobs 2007. Et beaucoup des thèses magistère et doctorat parmi eux : Hamrat Mustafa, Béton à haute performance formulation, propriétés rhéologiques et mécanique, Thèse magistère, Université de Chlef, 1994. Robert Le Roy, Déformations instantanées et différées des bétons à hautes performances, Thèse doctorat, 19 septembre 1995 et M, BOUCHABOUB Comportement de poteaux élancés en béton armé soumis à un chargement excentré, Thèse de doctorat, 10 Avril 2013.

## Recherche bibliographique

---

En ce qui concerne l'optimisation Les premiers problèmes d'optimisation auraient été formulés par Euclide, au III<sup>e</sup> siècle avant notre ère, dans son ouvrage historique Éléments. Trois cent ans plus tard, Héron d'Alexandrie dans Catoptrica énonce le principe du plus court chemin dans le contexte de l'optique. (Voir figure ci-dessus)



Le plus court chemin pour aller de A à C en passant par un point B de la droite est obtenu lorsque l'angle d'incidence est égal à l'angle réfléchi (sur la figure, il s'agit du chemin vert).

Au XVII<sup>e</sup> siècle, l'apparition du calcul différentiel entraîne l'invention de techniques d'optimisation, ou du moins en fait ressentir la nécessité. Newton met au point une méthode itérative permettant de trouver les extrémums locaux d'une fonction en faisant intervenir la notion de dérivée, issue de ses travaux avec Leibniz. Cette nouvelle notion permet de grandes avancées dans l'optimisation de fonctions car le problème est ramené à la recherche des racines de la dérivée.

Durant le XVIII<sup>e</sup> siècle, les travaux des mathématiciens Euler et Lagrange mènent au calcul des variations, une branche de l'analyse fonctionnelle regroupant plusieurs méthodes d'optimisation. Ce dernier invente une technique d'optimisation sous contraintes : les multiplicateurs de Lagrange.

Le XIX<sup>e</sup> siècle est marqué par l'intérêt croissant des économistes pour les mathématiques. Ceux-ci mettent en place des modèles économiques qu'il convient

## Recherche bibliographique

---

d'optimiser, ce qui accélère le développement des mathématiques. Depuis cette période, l'optimisation est devenue un pilier des mathématiques appliquées et le foisonnement des techniques est tel qu'il ne saurait être résumé en quelques lignes.

On peut tout de même évoquer l'invention de plusieurs méthodes itératives utilisant le gradient de la fonction, ainsi que l'utilisation du terme programmation mathématique, pour désigner des problèmes d'optimisation.

Historiquement, le premier terme introduit fut celui de programmation linéaire, inventé par George Dantzig vers 1947. Le terme programmation dans ce contexte ne réfère pas à la programmation informatique (bien que les ordinateurs soient largement utilisés de nos jours pour résoudre des programmes mathématiques). Il vient de l'usage du mot programme par les forces armées américaines pour établir des horaires de formation et des choix logistiques, que Dantzig étudiait à l'époque. L'emploi du terme programmation avait également un intérêt pour débloquer des crédits en une époque où la planification devenait une priorité des gouvernements. L'expression programmation mathématique, qui requiert la longue explication ci-dessus, tend à être abandonnée. Par exemple, en juin 2010, la société savante internationale qui représente cette discipline a vu son nom précédent « Mathematical Programming Society » changé en « Mathematical Optimization Society » ; pour la même raison, on préfère aujourd'hui utiliser les locutions optimisation linéaire/quadratique/... au lieu de programmation linéaire/quadratique/....

Dans cet aspect, parmi les livres qui traitent l'optimisation dans sa nouvelle forme c'est : Cost optimization of structure de Hajjat Adeli et Kamal C. Sarma, 2006 et des grand nombre des thèses doctorant aux domaines de génie civil comme F, Fedghouche. Optimisation des éléments de structures en béton armé aux états limites. Thèse magistère. 20 juin 2001. F, Fedghouche. Modèle de calcul de moindre coût des poutres en T en BA par optimisation non linéaire. Thèse doctorat. ENP Alger, 2013. F, Fedghouche and Tiliouine B. Minimum cost design of reinforced concrete rectangular sections in bending under ultimate loads, the 5th International Conference on Advances in Mechanics. ICAMEM2010, December 18-20, Hammamet, Tunisia, 2010. F, Fedghouche and Tiliouine, B. Minimum cost design of reinforced concrete T-beams at ultimate loads using Eurocode 2. Eng. Struct.. 42, 43- 50, 2012. Tiliouine, B. and Fedghouche, F. Economic design of reinforced HSC T –sections in flexure.

## Recherche bibliographique

---

International journal of modeling and optimization.vol3. N°2, April 2013. F, Yennoune. Dimensionnement des murs de soutènement par optimisation multicritère. Thèse magistère, 14 juin 1998. M,Moussaoui . L'analyse inverse des problèmes géotechniques applications des méthodes d'optimisations stochastiques. Thèse doctorat. Université de Skikda, 2013.

Et dans autres domaine d'ingénierie : Z, Moula. Contribution à l'optimisation des réseaux d'alimentation en eau. Thèse Magistère. Université des sciences et technologie Houari Boumediene,2012. Oumesaad Hajji. Contribution au développement de méthodes d'optimisation stochastiques. Application à la conception des dispositifs électrotechniques. Thèse doctorat. Université de Lille, 2003. O, Zerdeni. L'optimisation non linéaire multiobjectif. Thèse de doctorat. Université Mouloud Mammri, Tizi-ouzou, 2013.

### Référence bibliographique

- [1] **Pierre-Claude Aitcen** Béton haute performance, Edition Eyrolles.
- [2] Les bétons hautes performances, Caractéristiques, durabilités, applications, presse pont et chaussée,
- [3] **Hamrat Mustafa**. Béton à haute performance formulation, propriétés rhéologiques et mécanique. Thèse magistère. Université de Chlef, 1994.
- [4] **Dr, ir, G, De Schulter ir, arch. J, Apers** LE BÉTON À HAUTES PERFORMANCES. J, P, Jacobs 2007.
- [5] **Robert Le Roy**, Déformations instantanées et différées des bétons à hautes performances. Thèse doctorant, 19 septembre 1995.
- [6] **M, BOUCHABOUB** Comportement de poteaux élancés en béton armé soumis à un chargement excentré, Thèse de doctorat. 10 Avril 2013
- [7] **Jean Roux**, Pratique de l'euro code 2, Edition afnor.
- [8] **Jean Roux**, Maitrise de l'euro code 2, Edition afnor.
- [9] Document : Euro code 2 Calcul des structures en béton NF EN 1992-1-1. Afnor 2005
- [10] **S. Multon**, Béton armé euro code 2, INSA, Université Paul Sabatier, Toulouse France.
- [11] **Hajjat Adeli et Kamal C**, Cost optimization of structure, 2006
- [12] **F, Fedghouche**. Optimisation des éléments de structures en béton arme aux états limites. Thèse magistère. 20 juin 2001.
- [13] **F, Fedghouche**. Modèle de calcule de moindre cout des poutres en T en BA par optimisation non linéaire. Thèse doctorat. ENP Alger, 2013.
- [14] **F, Fedghouche and Tiliouine B**. Minimum cost design of reinforced concrete rectangular sections in bending under ultimate loads, the 5nd International Conference on Advances in Mechanics. ICAMEM2010, December 18-20, Hammamet, Tunisia, 2010.
- [15] **F, Fedghouche and Tiliouine, B**. Minimum cost design of reinforced concrete T-beams at ultimate loads using Eurocode2. Eng. Struct.. 42, 43- 50, 2012.

## Référence Bibliographique

---

- [16] **Tiliouine, B. and Fedghouche, F.** Economic design of reinforced HSC T – sections in flexure. International journal of modeling and optimization.vol3. N°2, April 2013.
- [17] **F, Yennoune.** Dimensionnement des murs de soutènement par optimisation multicritère. Thèse magistère, 14 juin 1998.
- [18] **M,Moussaoui .** L’analyse inverse des problèmes géotechniques applications des méthodes d’optimisations stochastiques. Thèse doctorant. Université de Skikda, 2013.
- [19] **Z, Moula.** Contribution à l’optimisation des réseaux d’alimentation en eau. Thèse Magistère. Université des sciences et technologie Houari Boumediene.2012 ;
- [20] **Oumesaad Hajji.** Contribution au développement de méthodes d'optimisation stochastiques. Application à la conception des dispositifs électrotechniques. Thèse doctorant. Université de Lille, 2003.
- [21] **O, Zerdeni.** L’optimisation non linéaire multiobjectif. Thèse de doctorat. Université Mouloud Mammri, Tizi-ouzou, 2013.

## 1.1 Introduction

Les bétons à hautes performances (BHP) sont des bétons qui développent des résistances mécaniques élevées (entre 45 et 80 MPa) du fait de la diminution de la porosité rendue possible grâce à l'ajout de super plastifiants qui diminuent la teneur en eau nécessaire et des propriétés exceptionnelles à l'état frais (notamment en termes de viscosité).

De plus, le spectre du mélange granulaire utilisé est élargi par l'ajout d'éléments ultrafins qui confèrent à l'ensemble une haute compacité.

De ce fait, ces bétons présentent une durabilité accrue grâce à une perméabilité réduite aux agents agressifs chimiques extérieurs.

## 1.2 Définition des BHP

Les bétons à hautes performances « BHP » se caractérisent par :

- ✚ Une résistance à la compression à 28 jours supérieure à 45 MPa sur cylindre.
- ✚ Un rapport E/C inférieur à 0.4.

Ils présentent une micro-texture très dense et une faible porosité et sont donc très résistants à la pénétration d'agents agressifs. [2]

## 1.3 Propriétés

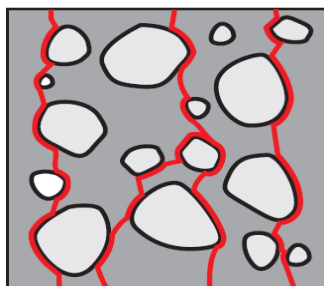
### 1.3.1 Effets de la température sur le béton en cours de durcissement

En raison de la teneur élevée en ciment et de l'utilisation de ciment fin, la production de chaleur, inhérente au processus de l'hydratation, s'intensifie dans le béton à hautes performances par rapport au béton ordinaire. Des contraintes thermiques relativement élevées. Même si le béton à haute performance absorbe mieux les contraintes de traction, le risque de fissuration est cependant nettement supérieur. Lors de la conception et de l'exécution, il convient donc d'accorder à ce phénomène une attention suffisante. [3]

## 1.3.2 Comportement en compression

Lorsqu'un béton doté d'une résistance normale est comprimé, les fissures d'adhérence entre la matrice de mortier et le granulat se propageront autour des granulats. A un niveau proche de la résistance à la compression, ces fissures d'adhérence se propageront à toute la matrice de mortier, entraînant l'apparition de fissures dans le mortier. En définitive, le béton cèdera sous l'effet de tout un réseau de fissures ininterrompues dans le mortier, alors que les granulats ne subiront aucun dommage (*Figure 1.2*). Le béton à hautes performances se caractérise par une meilleure adhérence entre les granulats et la matrice de ciment. En outre, la résistance de la matrice sera pratiquement égale à la résistance des granulats. Dès lors, l'apparition et le développement de fissures d'adhérence ou de microfissures seront retardés. A l'approche de la rupture, les fissures se seront désormais généralement propagées au travers des granulats (*Figure 1.3*).

Sur le diagramme contrainte-déformation (*Figure 1.4*), ce phénomène s'exprime par un comportement légèrement plus linéaire par rapport au béton de résistance conventionnelle. De même, le béton à hautes performances présente un retrait plus marqué après l'obtention de la résistance à la compression, c'est-à-dire après la rupture du béton, et la portance tendra très rapidement vers la valeur zéro. Le BHP présente en d'autres termes un comportement de rupture fragile plus marqué que le béton de résistance conventionnelle.



*Figure 1.2 : Béton ordinaire. [4]*

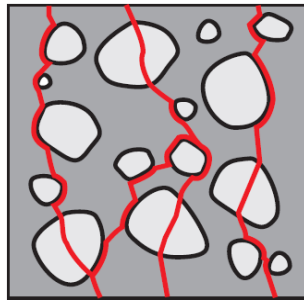


Figure 1.3 : Béton à haute performance. [4]

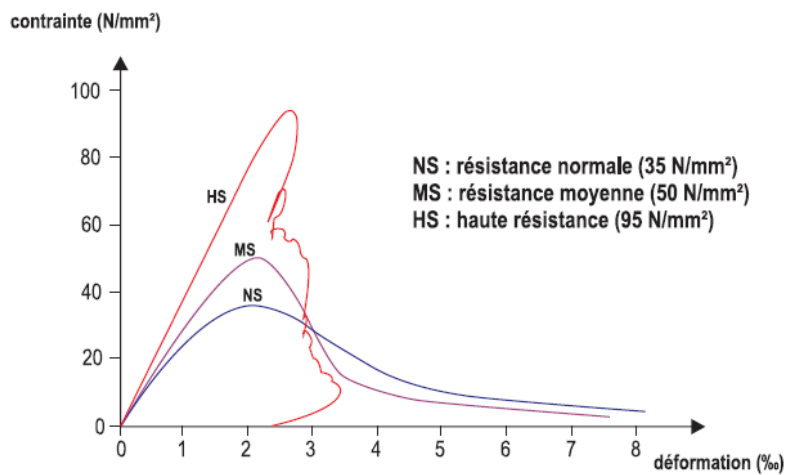


Figure 1.4 Diagramme contrainte-déformation

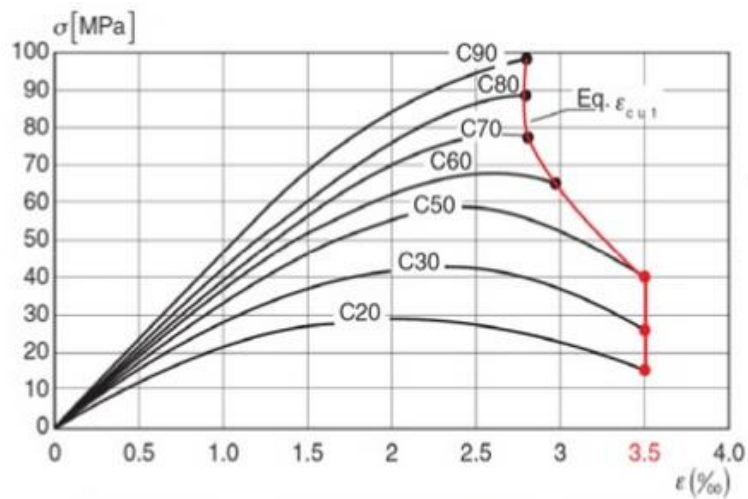


Figure 1.5 Diagramme contrainte-déformation des différentes classes de résistance du béton

### 1.3.3 Comportement en traction

Généralement, la résistance à la traction du béton est liée à la résistance à la compression.

## **1.3.4 Rigidité**

Le module d'élasticité du béton est essentiellement déterminé par les propriétés des granulats et de la matrice de mortier. Au fur et à mesure que la matrice se consolide et se rigidifie, le béton présentera également une rigidité accrue. Le module d'élasticité du béton à hautes performances est dès lors toujours lié à la résistance à la compression.

## **1.3.5 Le fluage**

Le fluage du béton à hautes performances – c'est-à-dire la déformation croissante sous l'effet d'une contrainte constante – est fréquemment inférieur au fluage observé pour un béton de résistance conventionnelle. L'âge du béton au moment de la sollicitation est également extrêmement important pour le BHP. Lorsque la charge est exercée sur un béton jeune, la déformation par fluage sera plus importante que dans le cas d'un béton plus âgé. Il en va de même en ce qui concerne le béton conventionnel.

## **1.3.6 Durabilité**

Etant donné la structure plus dense des pores du béton de hautes performances, ce matériau affiche un meilleur comportement face aux mécanismes d'agression. La plupart des processus de dégradation sont en effet causés par l'entrée de substances agressives, telles que des chlorures, du dioxyde de carbone, des acides, ... Si la pénétration de ces substances dans le béton est entravée, comme dans le cas du BHP, les processus de dégradation y afférent ne pourront bien évidemment se produire que bien plus tard. Quoi qu'il en soit, il convient toujours de veiller à la pureté des éléments constitutifs du béton, afin d'éviter toute agression par des mécanismes internes (présence de sulfates, d'alcalis, de granulats réactifs, ...). [5]

## **1.3.7 Résistance au feu**

Même si la durabilité du BHP est en règle générale nettement supérieure à celle du béton conventionnel, la résistance au feu est cependant un élément sur lequel il convient d'attirer l'attention. En raison de la structure des pores, la pression de vapeur, qui apparaît à l'intérieur du béton à des températures excédant 100°C, peut difficilement être réduite. La vapeur ne peut en effet pas être rapidement évacuée à

l'extérieur, en raison de la structure très dense du matériau. Par rapport au béton conventionnel, la résistance du béton à haute résistance diminuera dès lors plus rapidement si la température est supérieure à 100°C. La figure ci-dessous illustre la diminution de la résistance à la compression des bétons à hautes résistance en fonction de l'augmentation de la température.

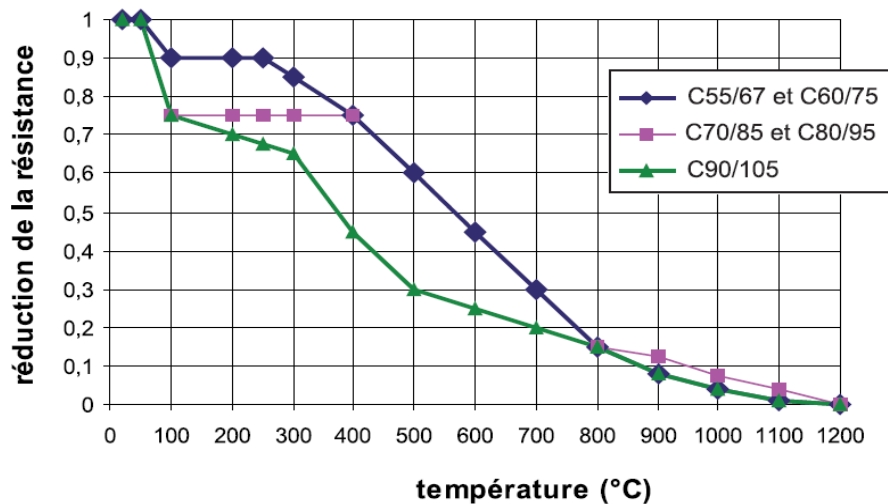


Figure 1.4 : diminution de la résistance à la compression des BHP selon l'EC2 Feu [4]

## 1.4 Avantage des BHP

La formulation et la fabrication de bétons dont la résistance en compression à 28 jours atteint plus de 50 Mpa voire 80 Mpa est aujourd'hui de pratique courante et n'est plus du domaine expérimental. De nombreux ouvrages ont été exécutés en BHP ces dernières années. Cette "vulgarisation" des BHP est rendue possible par la disponibilité du produit au sein du réseau des centrales. Ces BHP sont en général formulés avec des granulats locaux. Les centrales à béton sont équipées des automatismes, des processus de fabrication, des procédés de dosages et des procédures de contrôle rigoureuses assurant la reproductibilité des caractéristiques et la maîtrise de la fabrication des BHP.

De nombreux atouts justifient l'utilisation, la compétitivité économique et la banalisation de l'emploi des BHP pour les ouvrages courants. [6]

### ✚ En phase de conception

- Simplification des sections
- Simplification des ferrillages

- Optimisation possible de la géométrie de l'ouvrage (une diminution des sections de béton)

- Allègement des structures

## ✚ **En phase de construction**

- Économie de matière
- Gain de poids, donc simplification des fondations et des méthodes de construction
- Réduction des délais d'exécution
- Optimisation des cycles de construction et de la productivité
- Minimisation de l'incidence des intempéries sur les phasages de construction

## ✚ **En phase de service**

- Durabilité augmentée (une résistance importante aux agents agressifs, faible risque de corrosion des armatures, une forte résistance aux cycles de gel/dégel, une faible perméabilité).
- Frais d'entretien réduit
- Allongement de la durée d'exploitation de l'ouvrage
- Maintenance réduite [6]

## 1.5 Application

La résistance au jeune âge du béton autorise des décoffrages rapides, ainsi que des mises en précontrainte accélérées.

Les applications sont nombreuses en préfabrication (poutres, planchers), et sur chantier (voussoirs de ponts, poteaux).

Les hautes résistances en service permettent la réalisation des structures de bâtiments et d'ouvrages (bâtiments de grande hauteur, ponts, structures réticulées) conciliant contraintes élevées et diminution des sections.

La durabilité et la résistance aux agents agressifs sont déterminantes pour les ouvrages à la mer, les structures offshore, les ouvrages exposés au gel.

Il faut également mentionner l'emploi de bétons HP en relation avec leur bonne ouvrabilité. C'est le cas des bétons utilisés dans les bâtiments de grande hauteur et qui sont pompés, ou dans la réalisation de poutres avec un ferrailage laissant peu de place au passage du béton.

## 1.5.1 Le pont de Normandie

Avec sa travée centrale de 856 m (le record pour les ponts à haubans) et ses pylônes de 214 m de hauteur en BHP, le pont de Normandie est un ouvrage d'art exceptionnel. Du fait de sa particularité, il fait appel, pour sa mise en œuvre, à des bétons spécialement conçus pour chacune de ses parties.



*Figure 1.7 Le pont de Normandie*

Le béton de hautes performances (BHP 60 MPa), utilisé pour les voussoirs des rampes d'accès, permet le décoffrage rapide, la mise en tension accélérée des câbles de précontrainte et le poussage de la travée au rythme d'une longueur de voussoir tous les deux jours. Ceci grâce à la conjugaison du super plastifiant et d'un fort dosage en ciment,

## 1.5.3 Le pont de l'île de Ré

Cet ouvrage de près de 3 000 m de long (construit en moins de 16 mois) ont été déterminants dans le choix du béton à haute performance.

Alors que le cahier des charges ne prévoyait qu'un béton B40 pour les voussoirs, les cadences d'exécution de ces 798 pièces imposaient un démoulage à 15 heures, donc une résistance minimale de 12 MPa. Le béton réalisé qui présentait une résistance à 15 heures de plus de 20 MPa, atteint à 28 jours plus de 60 MPa. L'emploi des fumées de silice en association avec un super plastifiant a également nettement amélioré la maniabilité du béton.



*Figure 1.8 Le pont de l'île de Ré*

## 1.5.4 Les Tours Cœur-Défense

Ce projet, conçu par le cabinet Jean-Paul Viguier est constitué de deux tours fines décalées, de trente-neuf niveaux, arrondis à leurs extrémités et de trois bâtiments bas qui donnent de l'ampleur à la façade sur l'esplanade. L'ensemble représente 220 000 m<sup>2</sup> de bureaux. Le noyau central de chaque tour et les poteaux de 1,10 m de diamètre ont été réalisés en béton HP de type B 80.



*Figure 1.9 Les Tours Cœur-Défense*

## 1.5.5 La Tour PB6

Cette tour est un immeuble à usage de bureaux de quarante étages soit 147 m de hauteur au-dessus du niveau d'accès situé sur le parvis de la Défense, trois niveaux de parking en sous-sol, un niveau technique et, deux niveaux d'infrastructures de 3,40 m.

L'emprise en plan de la tour est constituée de deux ellipses de 74,84 x 31,18 m. Les efforts sont repris d'une part par un noyau central de 31x 14,10 m et, d'autre part, par seize poteaux de façade et deux poteaux intérieurs.

## CHAPITRE I

---

L'usage d'un béton BHP de type B 80 a permis de limiter le diamètre des poteaux les plus chargés à 1,30 m.



*Figure 1.10 La Tour PB6*

***Chapitre 2 : Calcul  
classique d'une poutre  
rectangulaire simplement  
armée selon l'EC 2***

## 2.1 Introduction

### 2.1.1 Définitions

Une poutre à plan moyen est sollicitée en flexion plane simple lorsque l'ensemble des forces et couples appliqués à gauche d'une section droite  $\Sigma$  est réductible, au centre de gravité  $G$  de  $\Sigma$ , à :

- un couple  $M$  d'axe perpendiculaire au plan moyen (ou moment fléchissant) ;
- une force  $V$  située dans le plan de  $\Sigma$  et dans le plan moyen (ou effort tranchant).

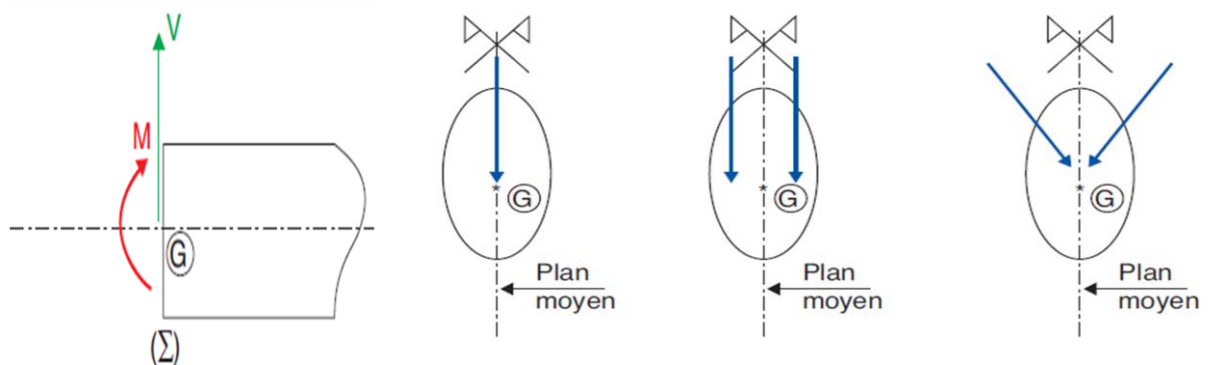
Ceci revient à dire :

1/ que les forces extérieures appliquées sont :

- Soit dans le plan moyen et normal à la ligne moyenne ;
- soit dans des plans symétriques par rapport au plan moyen et normal à la ligne moyenne ;

2/ que les couples extérieurs appliqués ont leurs axes perpendiculaires au plan moyen.

[7]



*Figure 2.1 Application de la force par rapport au centre de gravité dans une poutre.*

### 2.1.2 Notations et terminologie

Considérons une poutre fléchie à axe horizontal.

- ✓ Si  $M > 0$  : la partie supérieure de la section est comprimée, la partie inférieure est tendue ;
- ✓ Si  $M < 0$  : C'est inverse.

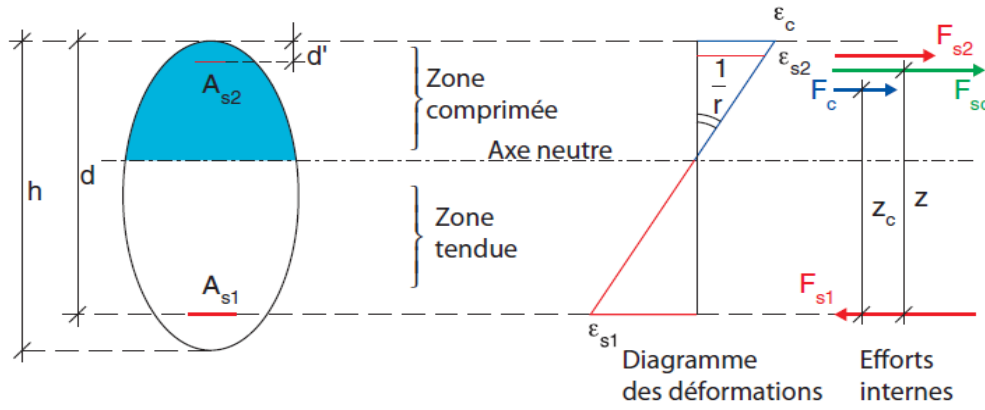


Figure 2.2 diagramme des forces internes

## 2.2 Principes généraux de calcul

### 2.2.1 Etat limite ultime

Moment agissant ultime :  $M_{ED} = \sum \gamma_i M_i$

Le diagramme des déformations passe :

- ✓ soit par le pivot A ;
- ✓ soit par le pivot B ;

Mais pas par le pivot C (sinon, la section serait entièrement comprimée, ce qui est en contradiction avec les hypothèses de la flexion simple) [7].

### 2.2.2 Etats limites de service

Moment agissant de service :  $M_{ED} = \sum M_i$

Le diagramme des contraintes est linéaire (diagramme de Navier) :

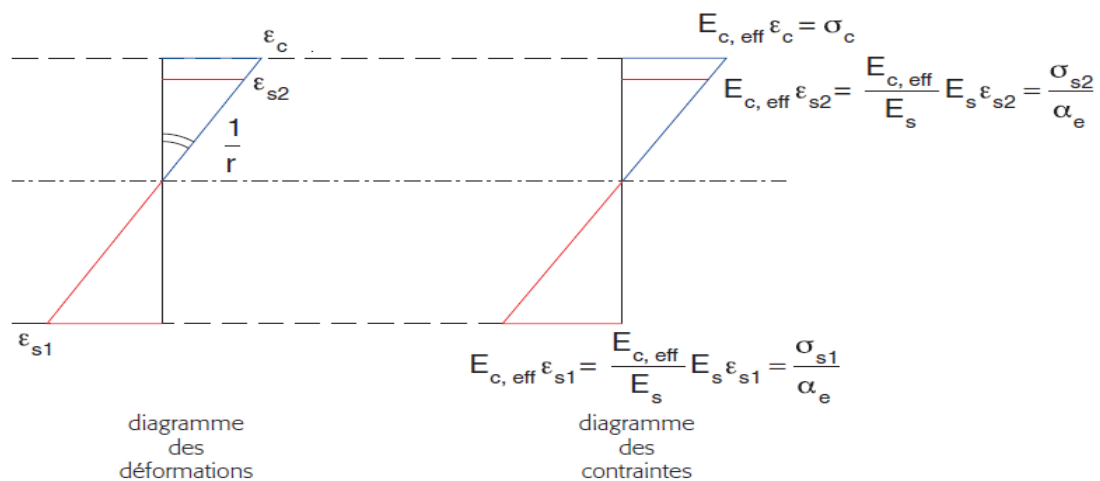


Figure 2.3 digramme de Navier.

## 2.3 Equations générales

Pour résoudre tout problème de flexion simple, soit à l'état limite ultime, soit à l'état limite de service, on dispose en tout et pour tout de trois équations :

- Deux équations de la statique :
  - équilibre des forces ;
  - équilibré des moments ;
- une équation de «compatibilité » exprimant la conservation des sections planes (relations de triangles semblables) :
  - Par les déformations dans le cas de l'ELU ;
  - Par les contraintes dans le cas de l'ELS.

Il ne peut donc y avoir plus de 3 inconnues.

Dans le cas contraire, pour  $n$  inconnues, il faut se fixer  $n - 3$  conditions supplémentaires. [8]

### 2.3.1 Equilibre des forces

La résistance à la traction du béton tendu étant négligée, les efforts de traction doivent être intégralement équilibrés par les armatures tendues.

En flexion simple, il n'y a aucun effort normal extérieur. La résultante des forces internes :

- de compression  $F_{sc}$  ;
- et de traction  $F_{s1}$ ;

Doit être nulle :  $F_{s1} = F_{sc} = F_c + F_{s2}$

### 2.3.2 Equilibre des moments

Le couple formé par les forces internes  $F_{sc}$  et  $F_{s1}$  doit équilibrer le moment extérieur agissant  $M$  :  $M = F_{sc} \cdot z = F_{s1} \cdot z$

#### Remarque

$M = M_{Ed}$  ou  $M_{ser}$  suivant que l'on se trouve à l'ELU ou à l'ELS.

### 2.3.3 Equations de compatibilité

#### État limite ultime

En désignant par  $x_u$  la « hauteur » de l'axe neutre à partir de la fibre la plus comprimée

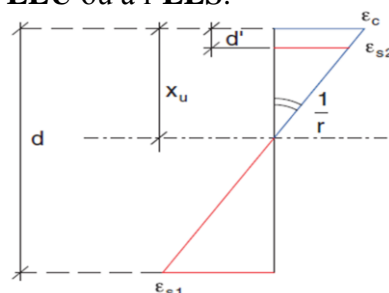


Figure 2.4 hauteur de l'axe neutre "ELU".

On peut écrire, puisque le diagramme des déformations est linéaire :

$$\frac{\varepsilon_c}{x_u} = \frac{\varepsilon_{s2}}{x_u - d'} = \frac{\varepsilon_{s1}}{d - x_u}$$

Au pivot A :  $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{ud}$  ou  $\infty$  suivant le diagramme  $\sigma - \varepsilon$  d'acier utilisé  $\rightarrow \varepsilon_{s2}$  et  $\varepsilon_c$

Au pivot B :  $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu2}$  ou  $\varepsilon_{cu3}$  suivant le diagramme  $\sigma - \varepsilon$  de béton utilisé  $\rightarrow \varepsilon_{s2}$  et  $\varepsilon_{s1}$

### État limite de service

En désignant par  $x_1$  la « hauteur »

De l'axe neutre à partir de la fibre la plus comprimée.

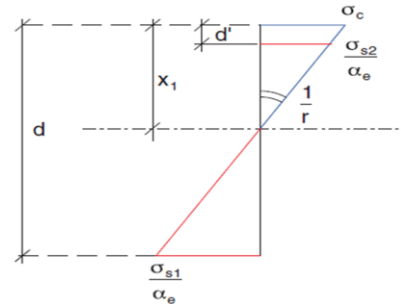


Figure 2.5 hauteur de l'axe neutre "ELS".

On peut écrire, puisque le diagramme des contraintes est linéaire :

$$\frac{\sigma_c}{x_1} = \frac{\sigma_{s2}}{\alpha_e(x_1 - d')} = \frac{\sigma_{s1}}{\alpha_e(d - x_1)}$$

A l'état limite de service avec limitation de la contrainte de compression du béton :

$$\sigma_c = \sigma_c(\text{barre}) \rightarrow \sigma_{s2} \text{ et } \sigma_c$$

## 2.4 Section rectangulaire sans aciers comprimés

La méthode de calcul due à Jean Perchat, développée dans la suite, s'applique aux sections avec ou sans aciers comprimés.

Ce qui suite on s'intéresse au dimensionnement à l'état limite ultime

### 2.4.1 Coefficients de remplissage et de centre de gravité

Dans une section rectangulaire  $b_w \cdot d$  (largeur  $b_w$ , hauteur utile  $d$ ), on pose :

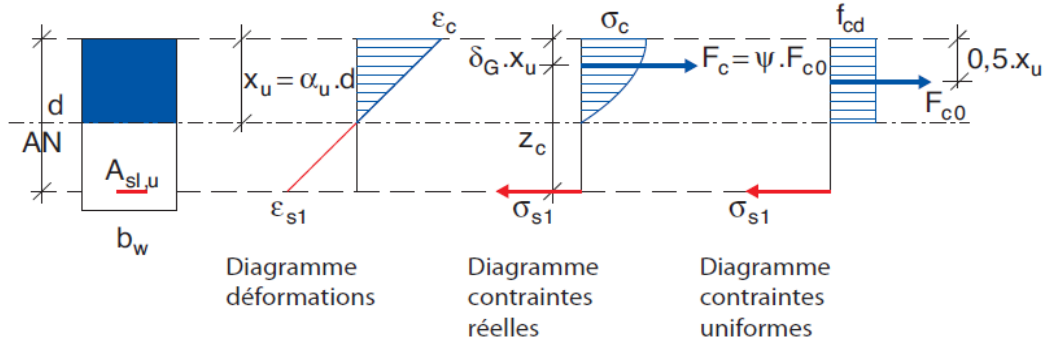
$F_c$  = résultante des efforts de compression dans la zone de béton comprimé.

$z_c$  = bras de levier de  $F_c$  par rapport au centre de gravité des aciers tendus,  
(= bras de levier du béton seul),

$F_{c0}$  = résultante des efforts de compression dans la zone de béton comprimé sous une contrainte uniforme égale à  $f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$  :

$$F_{c0} = b_w \cdot x_u \cdot f_{cd}$$

## CHAPITRE II



*Figure 2.6 Equilibre d'une section soumise à un moment de flexion (section rectangulaire).*

On appelle :

- coefficient de remplissage  $\Psi$ , le rapport :  $\Psi = \frac{F_c}{F_{c0}}$
- coefficient de centre de gravité  $\delta_G$ , le coefficient qui fixe la distance  $\delta_G \cdot x_u$  de  $F_c$  à la fibre la plus comprimée.

On peut donc écrire :

$$\begin{cases} F_c = \Psi \cdot F_{c0} = \Psi \cdot b_w \cdot x_u \cdot f_{cd} \\ z_c = d - \delta_G \cdot x_u \end{cases}$$

D'où l'expression générale du moment des forces internes :

$$M_{Ed} = F_c z_c = \Psi \cdot b_w \cdot x_u \cdot f_{cd} (d - \delta_G \cdot x_u)$$

Que l'on écrit sous la forme :

$$M_{Ed} = \Psi \cdot b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd} \frac{x_u}{d} (1 - \delta_G \cdot \frac{x_u}{d})$$

D'où en posant :

$$\alpha_u = \frac{x_u}{d}$$

$$\mu_c = \frac{M_{Ed}}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} \quad \text{Moment réduit}$$

Il vient :

$$\mu_c = \Psi \alpha_u (1 - \delta_G \cdot \alpha_u)$$

2.4.2 Diagramme parabole-rectangle et rectangulaire simplifié

Diagramme parabole-rectangle

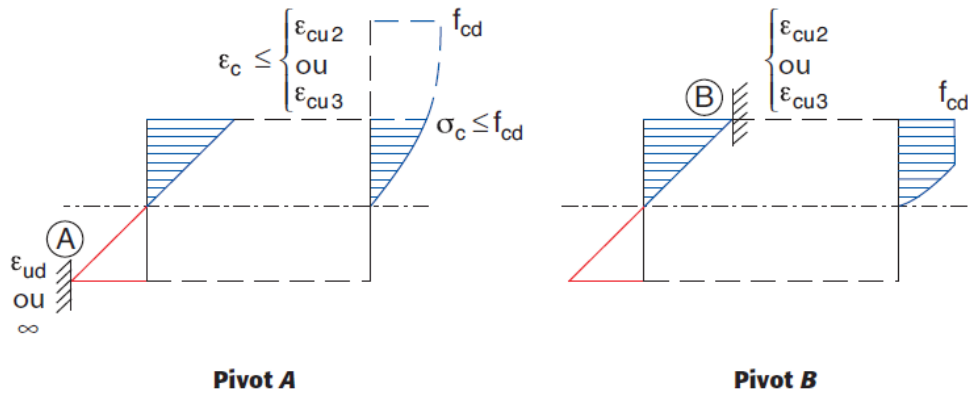


Figure 2.7 Diagramme parabole-rectangle.

- Si le pivot est **A** :  $\psi$  et  $\delta_G$  dépendent de  $\alpha_u$ . Leurs expressions sont assez compliquées.
- Si le pivot est **B** :
  - lorsque l'on utilise le diagramme parabole-rectangle, il est entièrement mobilisé et l'on a pour :  $f_{ck} \leq 50 \text{ MP}$  :

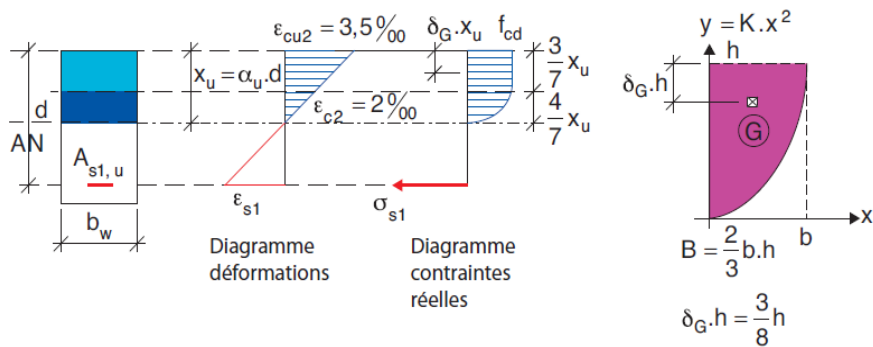


Figure 2.8 Equilibre d'une section soumise à un moment de flexion (Diagramme parabole-rectangle).

Tableau 2.1 Elément de hauteur de la force de compression dans le diagramme parabole-rectangle.

Élément de hauteur	$F_c$ ( $b_w \cdot x_u \cdot f_{cd}$ )	$\delta$ ( $x_u$ )	$F_c \cdot \delta$ ( $b_w \cdot x_u^2 \cdot f_{cd}$ )
$\frac{4}{7} x_u$	$\frac{2}{3} b_w \frac{4}{7} x_u \cdot f_{cd} = \frac{8}{21}$	$\left(\frac{3}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7}\right) = \frac{9}{14}$	$\frac{72}{294}$
$\frac{3}{7} x_u$	$1 \cdot b_w \frac{3}{7} x_u \cdot f_{cd} = \frac{3}{7}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$	$\frac{9}{98}$
$\Sigma$	$\frac{17}{21} = 0,8095 = \psi$		$\frac{99}{294}$

## CHAPITRE II

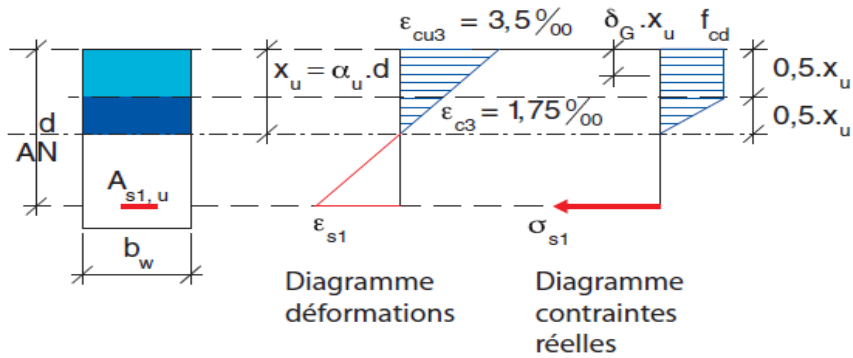
$$\delta_G . x_u = \frac{\frac{99}{17}}{21} . x_u = \mathbf{0.41597 . x_u}$$

Donc :

$$\Psi = \mathbf{0.81}$$

$$\delta_G = \mathbf{0.416}$$

Lorsque l'on utilise le diagramme bilinéaire, il est entièrement mobilisé et l'on a pour  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$  :



*Figure 2.9 Diagramme bilinéaire.*

*Tableau 2.2 : Elément de hauteur de la force de compression dans le diagramme bilinéaire.*

Élément	$F_c$ $(b_w \cdot x_u \cdot f_{cd})$	$\delta$ $(x_u)$	$F_c \cdot \delta$ $(b_w \cdot x_u^2 \cdot f_{cd})$
Inférieur	$\frac{1}{2} b_w \cdot \frac{1}{2} x_u \cdot f_{cd} = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$
Supérieur	$1 \cdot b_w \cdot \frac{1}{2} x_u \cdot f_{cd} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$\Sigma$	$\frac{3}{4} = 0,75 = \psi$		$\frac{7}{24}$

$$\delta_G . x_u = \frac{\frac{7}{24}}{\frac{3}{4}} . x_u = \mathbf{0.389 . x_u}$$

Donc :

$$\Psi = \mathbf{0.75}$$

$$\delta_G = \mathbf{0.389}$$

**Diagramme rectangulaire simplifié:**

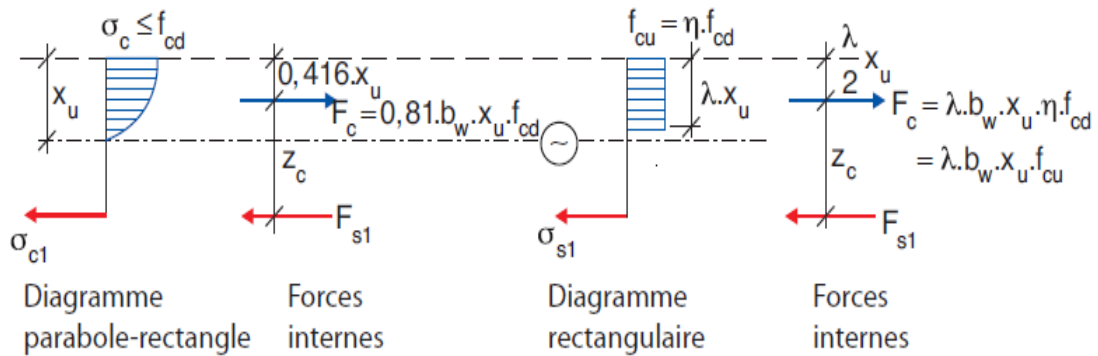


Figure 2.10 rectangulaire simplifié [7].

On démontre que, lorsque le pivot est A ou B, on peut substituer au diagramme parabolé rectangle un diagramme rectangulaire :

De largeur égale à  $f_{cu} = \eta f_{cd} = \eta \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$

De hauteur égale à  $\lambda x_u$  depuis la fibre la plus comprimée,

Pour lequel on a :  $\Psi = \lambda \cdot \eta$  et  $\delta_G = \frac{\lambda}{2}$

Les coefficients  $\lambda$  et  $\eta$  ont pour valeur ( $f_{ck}$  en MPa) :

$$\lambda = \begin{cases} 0.8 & \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 0.8 - \frac{f_{ck} - 50}{200} & \text{si } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 1 - \frac{f_{ck} - 50}{200} & \text{si } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases}$$

Dans ce cas, le moment réduit a pour expression :

$$\mu_c = \frac{M_c}{b_w d^2 f_{cd}} = \lambda \eta \alpha_u \left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_u\right) \Rightarrow$$

$$\mu_{cu} = \frac{M_{Ed}}{b_w d^2 f_{cu}} = \lambda \alpha_u \left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_u\right)$$

**2.4.3 Moment frontière  $M_{AB}$**

Si l'on veut connaître à l'avance le pivot, il faut calculer le moment de flexion  $M_{AB}$  au centre de gravité de l'armature inférieure correspondant à un diagramme de déformation passant par :

$\epsilon_{s1} = \epsilon_{ud}$  ou  $\infty$  (suivant le diagramme  $\sigma$ - $\epsilon$  d'aciers utilisés) pour les aciers tendus.

## CHAPITRE II

$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu2}$  ou  $\varepsilon_{cu3}$  (suivant le diagramme  $\sigma$ - $\varepsilon$  de béton utilisé) pour le béton le plus comprimé. [8]

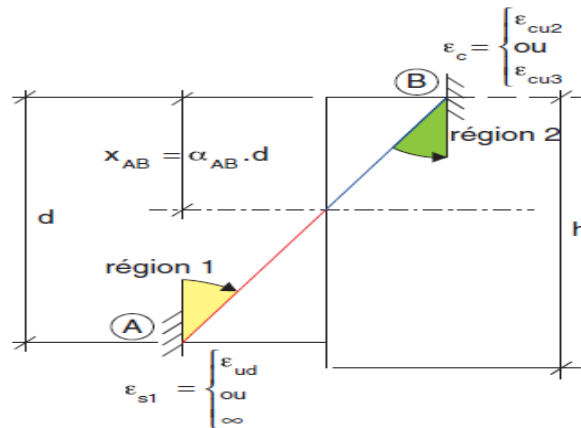


Figure 2.11 Diagrammes des pivots A et B.

$$\alpha_{AB} = \frac{x_{AB}}{d} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{s1}}$$

D'où:

$$\mu_{AB} = \lambda \cdot \alpha_{AB} \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \cdot \alpha_{AB} \right)$$

On obtient ainsi dans le cas du diagramme  $\sigma$ - $\varepsilon$  à palier incliné (dans les cas comportant trois valeurs, le chiffre du haut correspond aux aciers de classe de ductilité A, le chiffre intermédiaire à la classe B et le chiffre inférieur à la classe C) :

Tableau 2.3 Valeur de  $\lambda$  en fonction de la classe de résistance de béton [7].

Classe de résistance du béton	≤ C50/60	C55/67	C60/75	C70/85	C80/95	C90/105
$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu2} = \varepsilon_{cu3}$ (‰)	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,6
$\varepsilon_{ud} = 0,9 \cdot \varepsilon_{uk}$ (‰) (valeur recommandée et à utiliser pour l'Annexe nationale française) <sup>3</sup>	22,5 45 67,5					
$\alpha_{AB} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{s1}}$	0,1346 0,0722 0,0493	0,1211 0,0644 0,0439	0,1142 0,0605 0,0412	0,1071 0,0566 0,0385	0,1036 0,0546 0,0371	0,1036 0,0546 0,0371
$\lambda = 0,8$ ou $0,8 - \frac{f_{ck} - 50}{400}$	0,8	0,7875	0,7750	0,7500	0,7250	0,7000
$\mu_{AB} = \lambda \cdot \alpha_{AB} \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \cdot \alpha_{AB} \right)$	0,1019 0,0561 0,0387	0,0908 0,0494 0,0340	0,0846 0,0458 0,0314	0,0771 0,0415 0,0285	0,0723 0,0388 0,0265	0,0699 0,0375 0,0256

On en déduit :

$$\mu_{AB} = \frac{M_{AB}}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cu}} \rightarrow M_{AB} = \mu_{AB} b_w \cdot d^2 \cdot f_{cu}$$

D'où:

$$M_{Ed} \leq M_{AB} \Leftrightarrow \mu_{cu} \leq \mu_{AB} \rightarrow \text{on est au pivot A,}$$

$M_{Ed} > M_{AB}$  ( $\Leftrightarrow \mu_{cu} > \mu_{AB}$ )  $\rightarrow$  on est au pivot B,

Remarque

Lorsque  $\epsilon_{s1} = \infty$  (cas du diagramme  $\sigma$ - $\epsilon$  de l'acier à palier horizontal),  $\alpha_{AB} \rightarrow 0$  et  $\mu_{AB} \rightarrow 0$ .

### 2.4.4 Dimensionnement de $A_{s1, u}$ à l'ELU

Equations d'équilibre :

$$F_c = b_w \cdot \lambda \cdot x_u \cdot f_{cu}$$

$$z_c = \left(d - \frac{\lambda}{2} x_u\right)$$

$$M_{Ed} = F_c z_c \rightarrow M_{Ed} = b_w \cdot \lambda \cdot x_u \cdot f_{cu} \cdot \left(d - \frac{\lambda}{2} x_u\right)$$

$$M_{Ed} = A_{s1, u} \cdot \sigma_{s1} \cdot z_c$$

On posant:

$$\mu_{AB} = \frac{M_{Ed}}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cu}} \text{ et } \alpha_u = \frac{x_u}{d}$$

On obtient :

$$\mu_{cu} = \lambda \alpha_u \left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_u\right) \text{ et } A_{s1, u} = \frac{M_{Ed}}{z_c \sigma_{s1}}$$

Et par résolution de cette équation du deuxième degré en  $\alpha$

$$\alpha_u = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \sqrt{1 - 2\mu_{cu}}\right)$$

**Méthode de calcul dans le cas d'un diagramme d'acier à palier incliné :**

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 1 - \frac{f_{ck} - 50}{200} & \text{si } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases} \quad (f_{ck} \text{ en MPa}) \rightarrow f_{cu} = \eta \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$$

$$\Leftrightarrow \mu_{cu} = \frac{M_{Ed}}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cu}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \begin{cases} 0.8 & \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 0.8 - \frac{f_{ck} - 50}{200} & \text{si } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_u = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \sqrt{1 - 2\mu_{cu}}\right)$$

## CHAPITRE II

---

$$\Rightarrow \mu_{AB} = \begin{cases} 0.1019 : \text{classe de ductilité A.} \\ 0.0561 : \text{classe de ductilité B.} \\ 0.0387 : \text{classe de ductilité C.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Si } \mu_{cu} \leq \mu_{AB} \rightarrow \text{Pivot A} \rightarrow \epsilon_{s1} = \epsilon_{ud} = \begin{cases} 2.5/1000 : \text{classe A,} \\ 45/1000 : \text{classe B,} \\ 5/1000 : \text{classe C,} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Si } \mu_{cu} > \mu_{AB} \rightarrow \text{Pivot B} \rightarrow \epsilon_c = \epsilon_{cu2} \text{ ou } \epsilon_{cu3}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{s1} = \epsilon_c \frac{1 - \alpha_u}{\alpha_u}$$

$$\begin{cases} \epsilon_{s1} < \epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \rightarrow \sigma_{s1} = E_s \cdot \epsilon_{s1} \\ \epsilon_{s1} \geq \epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \rightarrow \sigma_{s1} = \begin{cases} 432.71 + 952.38 \epsilon_{s1} \\ 433.20 + 727.27 \epsilon_{s1} \\ 432.84 + 895.52 \epsilon_{s1} \end{cases} \end{cases}$$

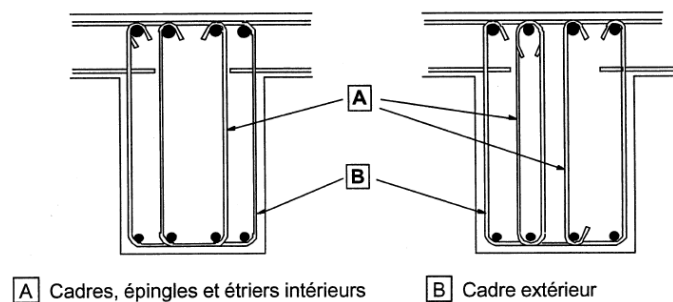
$$\Rightarrow z_c = d \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_u\right)$$

$$\Rightarrow A_{s1,u} = \frac{M_{Ed}}{z_c \sigma_{s1}}$$

### 2.5 Armatures d'effort tranchant

Il convient que:

1. Les armatures d'effort tranchant forment un angle  $\alpha$  compris entre  $45^\circ$  et  $90^\circ$  avec l'axe longitudinal de l'élément structural.
2. Les armatures d'effort tranchant peuvent être composées d'une combinaison de :
  - cadres, étriers ou épingles entourant les armatures longitudinales tendues et la zone comprimée.
  - barres relevées;
  - cadres ouverts, échelles, épingles, etc., façonnés sans entourer les armatures longitudinales mais correctement ancrés dans les zones comprimées et tendues.



*Figure 2.12 Exemples d'armatures d'effort tranchant*

3. Les cadres, étriers et épingles soient efficacement ancrés. Un recouvrement sur le brin vertical situé près de la surface de l'âme est autorisé sous réserve que le cadre ne participe pas à la résistance à la torsion.
4. Au moins  $\beta_3$  des armatures d'effort tranchant nécessaires soient sous forme de cadres, étriers ou épingles.

La valeur de  $\beta_3$  à utiliser dans un pays donné peut être fournie par son Annexe Nationale. La valeur recommandée est  $\beta_3 = 0,5$ . [9]

5. Le taux d'armatures d'effort tranchant est donné par l'Expression

## CHAPITRE II

---

$$\rho_w = A_{sw} / (s \cdot b_w \cdot \sin\alpha)$$

$\rho_w$  : est le taux d'armatures d'effort tranchant.

$\rho_w$  ne devrait pas être inférieur à  $\rho_{w,\min}$ .

$A_{sw}$  : est l'aire de la section des armatures d'effort tranchant régnant sur la longueur  $s$

$S$  : est l'espacement des armatures d'effort tranchant, mesuré le long de l'axe longitudinal de l'élément.

$b_w$  : est la largeur de l'âme de l'élément.

$\alpha$  : est l'angle entre les armatures d'effort tranchant et l'axe longitudinal.

La valeur de  $\rho_{w,\min}$  à utiliser pour des poutres, dans un pays donné, peut être fournie par son Annexe Nationale.

La valeur recommandée est donnée par l'Expression

$$\rho_{w,\min} = (0.08 \sqrt{f_{ck}}) / f_{yk}$$

6. L'espacement longitudinal maximal entre les cours d'armatures d'effort tranchant ne soit pas supérieur à  $s_{l,\max}$ .

La valeur de  $s_{l,\max}$  à utiliser dans un pays donné peut être fournie par son Annexe Nationale.

La valeur recommandée est donnée par l'Expression suivant :

$$s_{b,\max} = 0,6 d (1 + \cot\alpha)$$

7. l'espacement transversal des brins verticaux dans une série de cadres, étriers ou épingles d'effort tranchant ne soit pas supérieur à  $s_{t,\max}$ .

La valeur de  $s_{t,\max}$  à utiliser dans un pays donné peut être fournie par son Annexe Nationale. La valeur recommandée est donnée par l'Expression : [9]

$$s_{t,\max} = 0,75d \leq 600 \text{ mm.}$$

**2.6 Organigrammes récapitulatifs pour les sections rectangulaires:**

**Dimensionnement des armatures a l'ELU**

**Cas ou la contrainte de compression du béton est limitée à l'ELS**

**Diagramme  $\sigma$ - $\epsilon$  des aciers à palier incliné**

Sollicitation :

$M_{Ed}, M_{ser}$

Matériaux :

$f_{ck}$

$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$  et classe de ductilité

$E_s = 2.10^5 \text{ MPa}$ .

$\epsilon_{cu}$  ou  $\epsilon_{cu3}$

Type de diagramme  $\sigma$ - $\epsilon$  des aciers

$\alpha_e = E_s / E_{c,eff}$

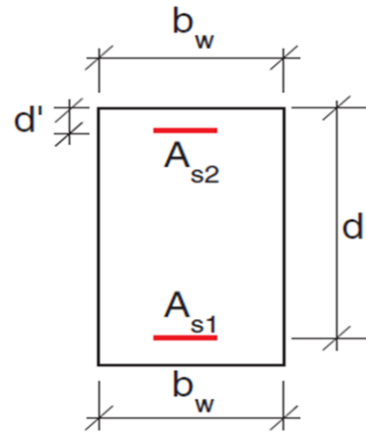
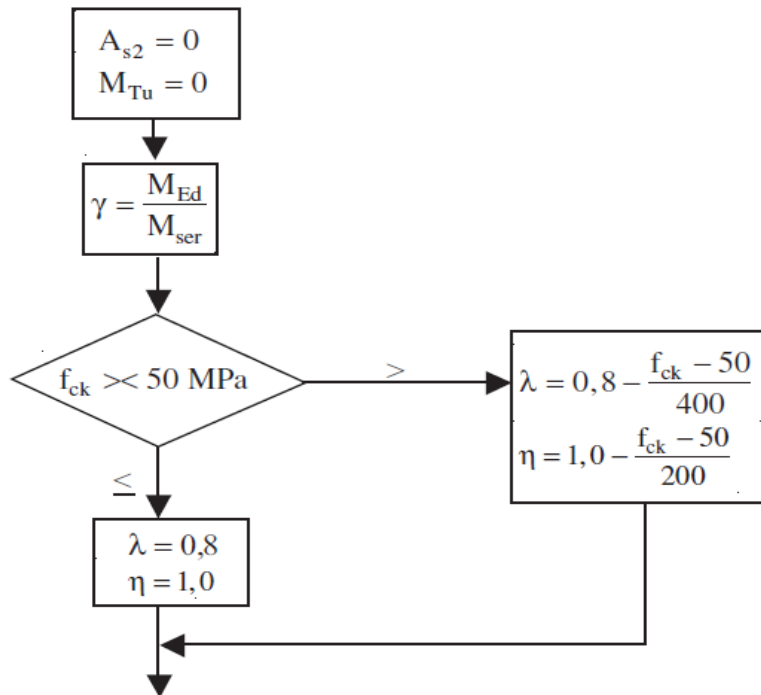
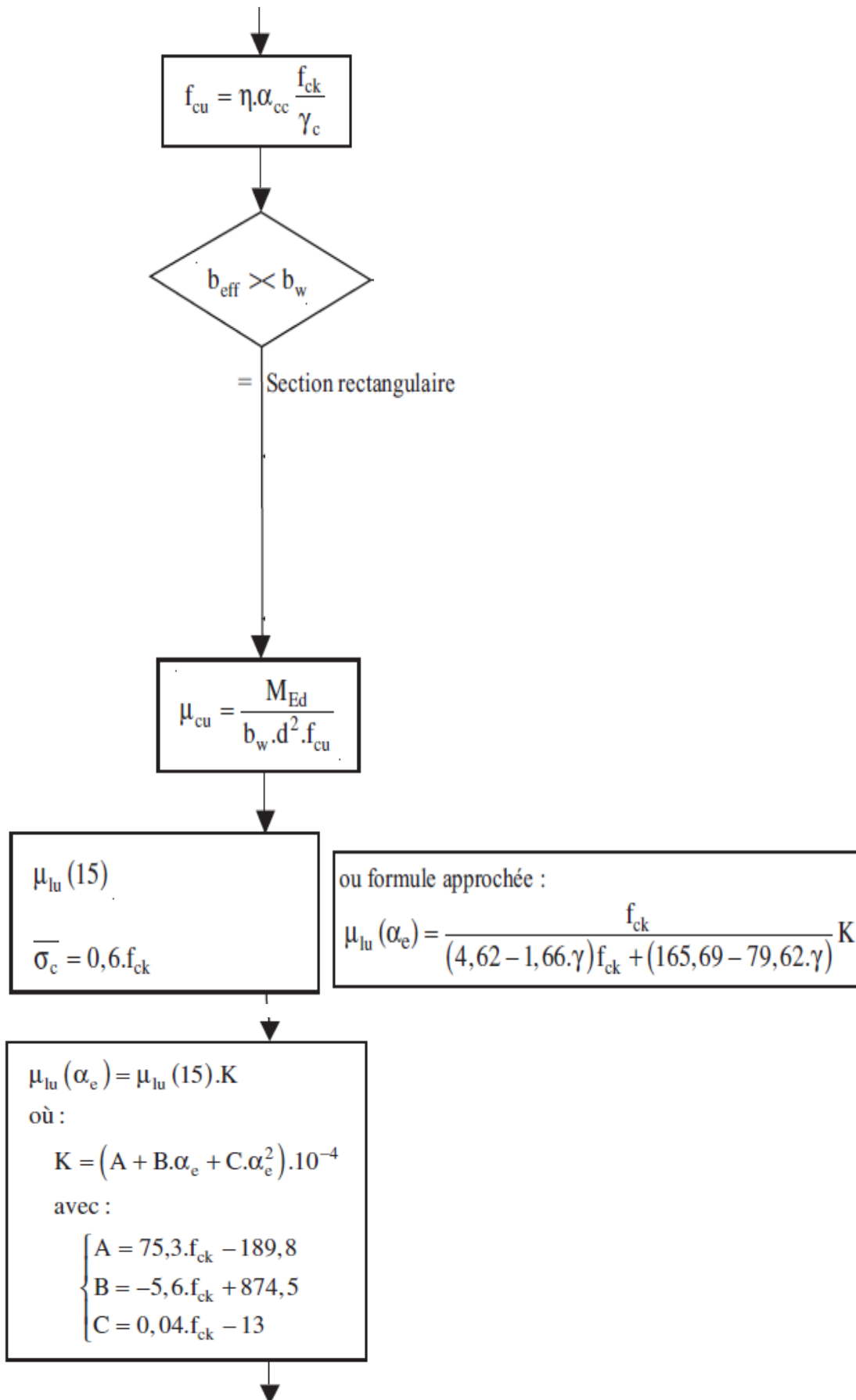
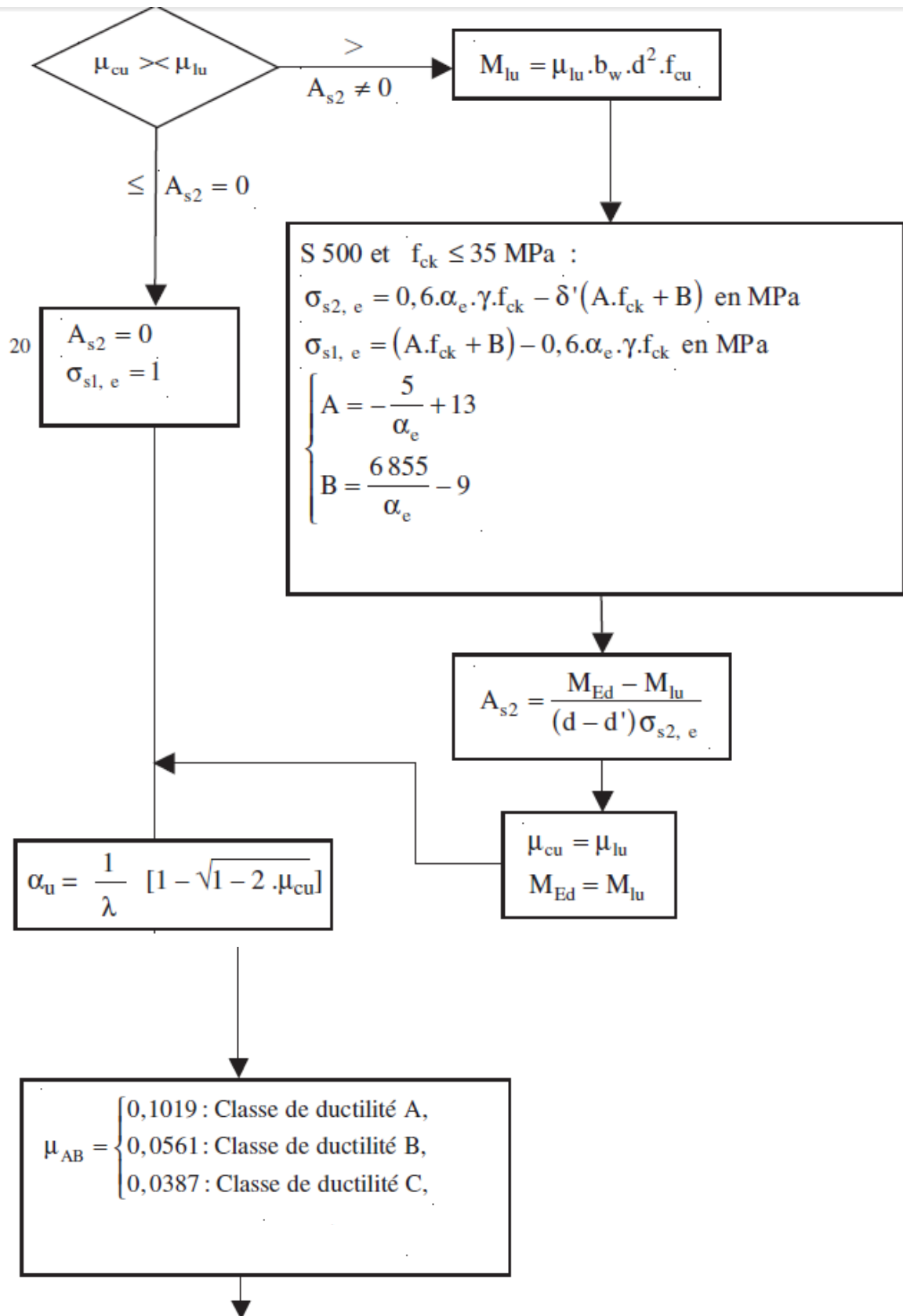


Figure 2.13 poutres rectangulaire







## CHAPITRE II

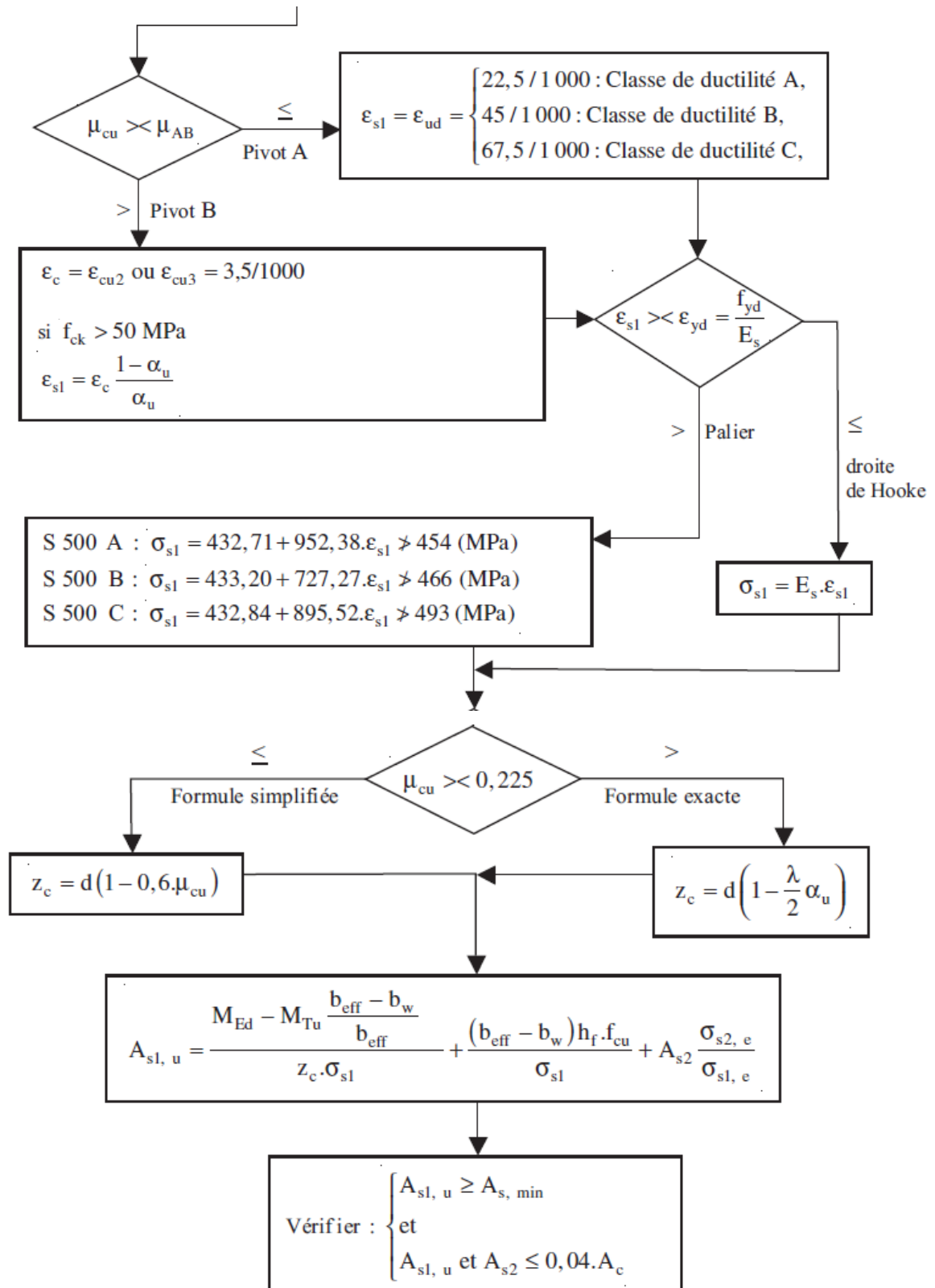


Figure 1.14 Organigrammes récapitulatifs pour la section rectangulaire [7]

*Chapitre 3 : Concept et  
formulation générale d'un  
problème d'optimisation*

### 3.1 Introduction

Dans les problèmes complexes d'ingénierie, il existe souvent un nombre élevé de critères que l'on cherche, la résistance, la rigidité, la durabilité tout en assurant l'économie pour répondre au souci des ingénieurs on fait appel à l'optimisation qui est un dérivé du verbe "**optimiser**" qui signifie trouver la meilleure solution possible d'un problème et donnerait des valeurs acceptables pour la fonction but.

Le mot optimisation en mathématique désigne la recherche des conditions moyennant pour les quelles une fonction donnée atteint un optimum, qui se présente le plus souvent comme un extremum. L'optimum impose qu'une certaine fonction de mérite (fonction objectif, fonction économique) soit maximale ou minimale.

C'est la recherche de la meilleure solution, évaluée selon certains critères avec prise en compte des conditions nécessaires. On voit immédiatement à quel point ce genre de problème peut répondre à des préoccupations de tout ordre physique, mécanique, technique, économique,...etc.

L'objectif dans l'optimisation des éléments en béton armé est de trouver les dimensions optimales et le coût minimum correspondant des matériaux mis en œuvre.

En général, le nombre de variables de conception indépendantes est relativement petit et les contraintes sont données par des expressions explicites c'est souvent possible de trouver la solution optimale par une recherche directe dans un espace d'un ou deux variables qui représentent les dimensions du béton [12].

### 3.2 Domaine d'application

L'optimisation joue un rôle important en recherche opérationnelle (domaine à la frontière entre l'informatique, les mathématiques et l'économie), dans les mathématiques appliquées (fondamentales pour l'industrie et l'ingénierie), en analyse et en analyse numérique, en statistique pour l'estimation du maximum de vraisemblance d'une distribution, pour la recherche de stratégies dans le cadre de la théorie des jeux, ou encore en théorie du contrôle et de la commande.

Ils sont extrêmement variés : optimisation d'un trajet, de la forme d'un objet, d'un prix de vente, d'une réaction chimique, du contrôle aérien, du rendement d'un

appareil, du fonctionnement d'un moteur, de la gestion des lignes ferroviaires, du choix des investissements économiques, de la construction d'un navire, etc. L'optimisation de ces systèmes permet de trouver une configuration idéale, d'obtenir un gain d'effort, de temps, d'argent, d'énergie, de matière première, ou encore de satisfaction.

Donc elle permet de déterminer la meilleure solution d'un problème et d'aboutir à des coûts minimaux. Le développement des méthodes d'optimisation n'a servi qu'à rendre explicite la recherche, l'évolution et le classement des options. Les tendances faites pour développer ces méthodes ont eu pour effets bénéfiques d'affiner notre compréhension du projet et d'identifier les applications valables de la sous optimisation et de restructurer un grand nombre des processus partiels qu'intègre l'étude du projet.[17]

### **3.3 Définition**

#### **3.3.1 Fonction objectif**

Le terme fonction objectif ou fonction économique, est utilisé en optimisation mathématique pour désigner une fonction qui sert de critère pour déterminer la meilleure solution à un problème d'optimisation.

Concrètement, elle associe une valeur à une instance d'un problème d'optimisation. Le but du problème d'optimisation est alors de minimiser ou de maximiser cette fonction jusqu'à l'optimum, par différents procédés comme l'algorithme du simplexe (c'est un algorithme de résolution des problèmes d'optimisation linéaire. permettant de minimiser une fonction sur un ensemble défini par des inégalités).

#### **3.3.2 Contrainte**

En mathématiques, une contrainte est une condition que doit satisfaire la solution d'un problème d'optimisation. On distingue deux types de contraintes : les contraintes d'égalité et les contraintes en inégalité. L'ensemble des solutions satisfaisant toutes les contraintes est appelé l'ensemble admissible.

- Si une contrainte en inégalité est satisfaite en égalité au point optimal, la contrainte est dite saturée, dans le sens où le point ne peut pas être modifié selon

la direction donnée par cette contrainte, même si le faire donnerait une meilleure valeur de la fonction coût.

- Si une contrainte en inégalité est satisfaite en inégalité stricte, la contrainte est dite non saturée, dans le sens où le point pourrait être modifié selon la direction donnée par cette contrainte, bien qu'alors l'optimalité ne soit plus garantie. Si la contrainte est non saturée, le problème d'optimisation aurait la même solution en l'absence de cette contrainte.
- Si une contrainte n'est pas satisfaite en un point, celui-ci est dit non admissible. [11]

### 3.3.3 Variables de décision

Les variables de conception ou de décision ou variables de calcul sont constituées par des sections ou par les dimensions (épaisseur, longueur, ...) de la structure ou à d'autres paramètres.

Dans les structures à deux ou trois dimensions ceux qui définissent la géométrie sont particulièrement intéressants à déterminer afin de minimiser la quantité des matériaux mis en œuvre.

Le calcul consiste à définir les valeurs des composantes du vecteur  $X : x_1, x_2, \dots$  qui sont les inconnues du problème (on appelle ces composantes les variables de décision) [12].

### 3.3.5 Minimisation

Plus formellement, l'optimisation est l'étude des problèmes qui s'expriment de la manière suivante.

Problème d'optimisation : Étant donné une fonction  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un ensemble  $A$  à valeurs dans l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels (éventuellement dans la droite achevée  $\mathbb{R}(\text{barre}) := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ), trouver un élément  $x(\text{barre})$  de  $A$  tel **que**  $f(x(\text{barre})) \leq f(x)$  pour tous les  $x$  dans  $A$ .

On dit que l'on cherche à minimiser la fonction  $f$  sur l'ensemble  $A$ .

La fonction  $f$  porte divers noms : fonction-coût ou simplement coût, fonction-objectif ou simplement objectif, critère, etc.

L'ensemble  $A$  est appelé l'ensemble admissible et les points de  $A$  sont appelés les points admissibles du problème. On dit que le problème est réalisable si  $A$  est non vide.

Le point  $x$  (*barre*) est appelé solution du problème d'optimisation (minimum ou minimiseur)

### 3.3.6 Maximisation

Le problème décrit ci-dessus est un problème de minimisation. Comme on a :

$$\text{Sup}_{x \in A} f(x) = - \inf_{x \in A} (-f(x)),$$

Un problème de maximisation d'une fonction  $f$  (à gauche ci-dessus) est équivalent au problème de minimisation de  $-f$  (à droite ci-dessus). L'équivalence veut dire ici que les solutions sont les mêmes et que les valeurs optimales sont opposées. En particulier, une méthode pour analyser/résoudre un problème de minimisation pourra être utilisée pour analyser/résoudre un problème de maximisation. [21]

### 3.3.7 Formulation générale du problème

D'une façon générale, un problème de programmation mathématique non-linéaire peut être énoncé comme suit :

Trouver le vecteur  $\{X\}$  de variables de décision (appelées aussi variables de conception) tel que :

$$Z = F(\{X\}) \rightarrow \text{Min}$$

$$G_j(\{X\}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m.$$

$$H_j(\{X\}) = 0 \quad j = 1, \dots, k.$$

$Z$  est la fonction objectif du problème désignée également par (fonction critère ou fonction mérite). Les fonctions  $G_j$  et  $H_j$  sont appelées contraintes d'inégalité et contraintes d'égalité respectivement.

Les contraintes d'égalité peuvent souvent être éliminées et la recherche optimale peut être effectuée dans l'espace des solutions admissibles défini par les contraintes d'inégalité.

## CHAPITRE III

---

A ce jour il n'existe pas une méthode de programmation mathématique non linéaire que l'on peut qualifier de façon systématique comme la plus efficace et de nombreux algorithmes ont été proposés dans la littérature spécialisée. [12]

### Exemples :

1) On considère un problème d'optimisation classique :

$$\min_{x \in C} f(x)$$

Avec:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^4$$

$$\text{Et } C = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, x_1 \geq 1, x_2 = 1\}$$

Et  $X$  désigne le vecteur  $(x_1, x_2)$ .

Dans cet exemple, la première ligne montre la fonction à minimiser (appelée fonction objectif ou fonction-coût) mais aussi l'ensemble où la solution doit être recherchée, ici  $C$ . Cet ensemble est défini par une contrainte en inégalité sur la première composante et une contrainte d'égalité sur la seconde.

Sans ces contraintes, la solution serait le couple  $(0,0)$ , où  $f(x)$  atteint son minimum. Or, ce couple n'est pas dans l'espace des contraintes. Ici, la solution du problème d'optimisation sous contraintes donnée est  $x = (1, 1)$ , qui est le point où  $f(x)$  atteint la plus petite valeur possible tout en satisfaisant les deux contraintes.

2) Exemple de l'agriculteur

- Un agriculteur possède un certain nombre d'hectares ( $T$ ), d'engrais ( $E$ ) et d'insecticide ( $I$ )
- Possibilités de planter du maïs ( $x_1$ ) ou du blé ( $x_2$ )
- Les cultures requièrent des quantités différentes d'engrais et d'insecticide ( $E_1, I_1, E_2, I_2$ )
- Les cultures fournissent un revenu différent ( $S_1, S_2$ )
- Objectif : maximiser le revenu net

Maximiser  $S_1x_1 + S_2x_2$  (fonction objectif)

Soumis à des contraintes suivantes :

$$x_1 + x_2 \leq T \text{ (limite terrain)}$$

## CHAPITRE III

---

$$E_1x_1 + E_2x_2 \leq E \text{ (limite engrais)}$$

$$I_1x_1 + I_2x_2 \leq I \text{ (limite insecticide)}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \text{ (terrain positif)}$$

- 3) Finance : Il faut maximiser le profit espéré d'un ensemble d'investissements en respectant des limites budgétaires et des limites imposées sur le niveau de risque.
- 4) Logistique : Il faut visiter tous les clients une fois (sans répétition) d'une manière qui minimise la distance parcourue.
- 5) Productique/ordonnancement : affecter des tâches aux machines d'une manière que le temps maximum nécessaire pour une machine à terminer ses tâches soit minimisé.
- 6) Une université doit effectuer un certain nombre de cours à un certain nombre d'élèves, avec un certain nombre d'enseignants-chercheurs  
Contraintes de précédences de cours, salles, désidératas  
Objectif : trouver une solution

### 3.4 Type des problèmes d'optimisation

- Problèmes probabilistes.
- Problèmes déterministes.

#### 3.4.1 Problèmes probabilistes

En général le problème de dimensionnement probabiliste optimal peut être énoncé comme suit :

- Pour une structure à configuration, charges probables et variations des résistances connues.
- Trouver les résistances moyennes des éléments
- Telles que des niveaux de confiance spécifiés et des conditions d'économie déterminées soient satisfaits.

La confiance à ruine est définie comme la probabilité requise pour qu'une structure n'atteigne pas sa ruine plastique; la confiance à plasticité est la probabilité nécessaire

pour qu'une section de la structure ne soit pas la première à développer une rotule plastique.

### **3.4.3 Problèmes déterministes**

Soit une structure dont les charges, géométrie et dimensions des sections en béton sont fixées. Le problème de dimensionnement optimal consiste à déterminer les variables  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) qui optimisent une certaine fonction de mérite et satisfaisant également aux contraintes.

Par conséquent, le dimensionnement optimal est équivalente un problème d'optimisation d'une fonction non-linéaire sous des contraintes non ou linéaires. Ceci constitue un problème typique de programmation non linéaire pouvant être résolu par les techniques de programmation mathématique. [17]

### **3.5 Méthode et formulation général d'un problème d'optimisation déterministe**

#### **3.5.1 Contraintes**

Chaque groupe de valeur pour les variables de décision (ou de conception) représente une conception de la structure. Clairement, quelques conceptions sont des solutions utiles pour l'optimisation du problème, mais d'autres peuvent être inadéquates en terme de fonctions, comportement ou autre considération. Si une conception satisfait toutes les exigences ou condition imposées, elle sera dite "solution admissible" (ou solution faisable).

Les conditions (ou restrictions) qui doivent être satisfaites afin d'obtenir une conception sont dites les contraintes. Du point de vue physique on peut identifier deux sortes de contraintes :

1. Les contraintes imposées sur les variables de conception et qui limite leur champs pour des raisons que des considérations sont appelées contraintes de conception ou contrainte de bon côté.

Les contraintes qui sont explicitées en forme peuvent provenir de différente considération telle que la fonctionnalité, la fabrication ou l'esthétique. De cette façon une

## CHAPITRE III

---

contrainte de conception est une limitation spécifique ou imposée sur une variable de conception.

2. Les contraintes qui dérivent des exigences sur le comportement sont appelées les contraintes de comportement. Les limitations sur les contraintes maximales, déplacement flambement sont des exemples typiques de contraintes de comportement.

Des contraintes de comportement explicites ou implicites sont toutes deux rencontrées dans la conception pratique.

Les contraintes de comportement explicites sont souvent données par des formules présentées dans des cadres de conception ou des spécifications. Cependant, les contraintes de comportement sont généralement implicites.

D'un point de vue mathématique, les contraintes de conception et de comportement peuvent être usuellement exprimées comme un groupe d'inégalités.

$$g_j(\{x\}) \leq 0; \quad j = 1, \dots, m.$$

Où  $m$  est le nombre de contraintes d'inégalité et  $X$  le vecteur des variables qui peut comprendre les variables de décision et de comportement.

Souvent dans un problème de conception des structures, on a aussi à considérer les contraintes d'égalité de la forme générale :

$$h_j\{X\} = 0; \quad j = 1, \dots, k.$$

Où  $k$  est le nombre d'égalité.

Dans la plupart des cas. Les contraintes d'égalité peuvent être utilisées pour éliminer des variables des processus d'optimisation en réduisant leur nombre.

En général, les équations d'analyse d'un problème sous condition peuvent être exprimées en termes de variable de la forme de l'équation. Cependant, si nous choisissons les variables comme indépendantes alors ces équations peuvent calculés les variables de comportement pour chacun de conception donnés.

Cette procédure est avantageuse dans plusieurs cas, puisque nous avons à trouver les valeurs optimales d'un nombre moindre de variable, et le problème est dit avoir une dimension plus basse.

L'égalité peut présenter aussi différentes considérations de conception telle qu'un rapport désiré entre la longueur de section transversale et son épaisseur de telles simples et explicites contraintes peuvent facilement être utilisées pour réduire le nombre de variables indépendantes.

Cependant, dans certains cas la procédure d'élimination peut être complexe et consommation de temps et quelques contraintes d'égalité doivent être considérées [12].

### 3.5.2 Espace de conception

Nous pouvons voir chaque variable de décision comme une dimension dans un espace de conception, et chaque groupe particulier de ces variables comme un point de cette espace.

Dans le cas de deux variables, l'espace de conception se ramène à un plan.

Dans le cas général de  $n$  variable nous avons un hyperplan de dimension  $n$ .

Une conception qui satisfait toute ces contraintes  $g_j(\{X\}) \leq 0$  est une conception faisable. Le groupe des valeurs variables de conception qui satisfait l'équation  $g_j(\{X\}) = 0$  forme une surface dans l'espace de conception. C'est une surface dans le sens qu'elle coupe l'espace en deux régions, une région où  $g_j > 0$  et l'autre  $g_j < 0$

Le groupe de toutes les conceptions faisables forme la région faisable. Les parties des surfaces de contraintes respectives qui limitent la région faisable forment la surface de contraintes composées.

Les points à l'intérieur de la région faisable (c'est à dire où  $g_j < 0$  ;  $j = 1 \dots m$ ) sont appelés points libres, ou conception sans contrainte.

Les points sur la surface (les conceptions faisables pour lesquels  $g_j = 0$  sont appelées points limites.

Il est possible que la région faisable soit composée de deux ou plus de sous régions disjointes, mais ceci est rare dans les problèmes de conception où les éléments ne peuvent pas être éliminés.

Le sous espace où deux ou plusieurs contraintes  $g_j(\{X\})$  est appelé une intersection. Dans l'espace à deux dimensions, l'intersection de deux contraintes est un point.

La  $j^{\text{ème}}$  contrainte est dite être active en un point de conception si  $g_j(\{X\}) = 0$  et elle est dite passive si  $g_j(\{X\}) < 0$ . Si  $g_j(\{X\}) > 0$ , la contrainte est violée et la conception correspondante est infaisable.

Les contraintes d'égalité :

$$h_j(\{X\}) = 0 \quad j = 1, \dots, k.$$

Introduisent un couplage entre les variables ils peuvent être vues comme des surfaces dans l'espace de conception à  $n$  dimensions.

Les points de conception faisable doivent être localisés à l'intersection de ses surfaces.

Le nombre de contrainte d'égalité,  $k$  doit satisfaire  $k \leq T$ , où  $T$  est le nombre total des variables.

Dans le cas où  $k = T$ , les variables peuvent en principe être déterminées comme solutions des équations :  $h_j(\{X\}) = 0$  et il n'y pas de problème d'optimisations au sens propre.

### 3.5.3 Fonction objectif

Il existe habituellement un nombre infini de conception faisable. Pour obtenir la meilleure, il est nécessaire de former une fonction de variable à utiliser pour la comparaison des conceptions faisables.

La fonction objective appelée aussi coût, critère, ou fonction de mérite est la fonction à partir de laquelle la petite valeur est recherchée dans un problème d'optimisation. C'est une fonction de variable  $X$  et elle peut représenter le poids, le coût de la structure ou n'importe quel autre critère à partir duquel une conception possible est préférée aux autres.

## CHAPITRE III

---

Nous supposons toujours que la fonction objectif  $Z = F(\{X\})$  doit être minimisée ceci n'implique aucune diminution de la généralisation puisque le minimum de  $-F(\{X\})$  est obtenu lorsque  $F(\{X\})$  est maximum, c'est-à-dire  $\text{Max}(F\{X\}) = -\text{Min}(-F\{X\})$ .

Le choix d'une fonction objective peut être une des plus importantes décisions dans la procédure d'une conception optimale.

La formulation mathématique de la fonction objectif peut être une tâche très difficile, par exemple lorsque des valeurs esthétiques importantes sont influencés par les variables de décision. En général, la fonction objective représente la propriété simple la plus importante d'une conception mais elle peut représenter aussi la résultante d'un certain nombre de propriétés.

Des précautions doivent être prises pour optimiser par rapport à la fonction objective qui reflète au mieux, le véritable but des problèmes d'optimisation.

Le poids est la fonction objective la plus habituellement utilisées dû au fait qu'il est facilement quantifiable bien que la plupart des méthodes d'optimisation ne se limitent pas à la minimisation du poids. Le poids de la structure est souvent d'une importance critique, mais la minimisation du poids n'est pas toujours la plus facile.

Le coût est d'une importance pratique plus grande que celle du poids, mais il est souvent difficile d'obtenir suffisamment de données pour la construction d'une fonction réelle du coût.

Une fonction du coût général doit inclure le coût des matériaux, de la fabrication, du transport, ...etc. En plus du coût engendré par construction et la conception d'autres facteurs tels que mise en service, maintenance, réparation, assurance ...etc. Doivent être considérés.

Cependant, il n'est pas toujours désirable de considérer une fonction aussi large que possible. D'un point de vue pratique, il est demandé d'introduire une fonction objective qui est à la fois sensible aux variations des variables de décision et à la composante la plus importante du coût.

En général, la fonction objective est une fonction non linéaire des variables de décision.

***Chapitre 4: Méthodologie  
de calcul optimal des  
poutres rectangulaire  
simplement armée en BHP  
selon l'EC 2***

### **4.1 Introduction :**

Du point de vue économique, il est nécessaire d'intégrer les nombreux avantages de BHP en utilisant des éléments structuraux dans la procédure de conception optimale. En utilisant la technologie du BHP, les dimensions transversales des éléments sont considérablement réduites. Par conséquent, moins de béton et moins de coffrage sont nécessaires. Au même temps, la quantité d'acier d'armature peut être réduite d'une façon significative. Le résultat net est que la poutre peut être réalisée avec la section transversale optimale du béton et la section optimale d'armature avec un coût minimal

Ce travail porte sur la formulation du problème de conception optimale de moindre coût des poutres rectangulaire en béton à haute résistance (BHP) soumise à la flexion simple conformément aux Etats Limites Ultimes (ELU) en utilisant la dernière version de l'Eurocode2 (EC-2).

Pour le processus d'optimisation des coûts, le coût global des matériaux de construction, y compris les coûts de béton, d'acier et de coffrage, représente la fonction objectif et l'ensemble des contraintes comprend des restrictions sur les contraintes de comportement, les conditions relatives à la compatibilité de déformation dans l'acier et le béton, les dimensions transversales de la section rectangulaire fondées sur des règles pratiques de pré-dimensionnement et de bonne exécution en vigueur des méthodes de conception et de calculs actuelles.

Le poids propre de la poutre qui peut contribuer de manière substantielle à la détermination de la capacité de résistance flexionnelle ultime pour de longues portées est considéré comme variable à la fois dans la fonction objectif et les fonctions de contraintes.

### **4.2 États limites ultimes**

La conception fondée sur un compromis coût-sécurité d'une structure en béton armé soumise à des conditions de charge ultime dépend rarement d'une analyse théorique complexe. Elle peut être réalisée par un bon choix du site de construction, un meilleur choix de la structure porteuse et son système de contreventement et une attention particulière doit être accordée aux règles de pratique courante de pré-dimensionnement et de bonne exécution. Cependant, la réduction du coût global de la

## CHAPITRE IV

---

structure dépendra fortement d'un choix adéquat des matériaux de construction qui seront utilisés, y compris les coûts de main-d'œuvre, ainsi que de la conception optimale des différents éléments structurels (comme cela peut être le cas pour une utilisation à grande échelle des éléments préfabriqués en BHR). En outre, la conception optimale de ces composants doit être fondée sur le comportement non linéaire de BHR et de l'acier décrits dans les codes de conception et de calcul de béton armé en vigueur. [13]

Conformément à l'Eurocode2 (EC-2), les hypothèses retenues à l'ELU pour les distributions de contrainte et de déformation des poutres rectangulaire en BHP représentée dans la figure 4.1 sont respectivement illustrées dans cette figure. Les dimensions en béton armé à haute résistance de la section transversale sont définies par les paramètres suivants

b : largeur de la poutre

h : hauteur totale

Les paramètres d et  $A_s$  représentent respectivement:

d: hauteur utile

$A_s$  : section des aciers tendus

Dans le diagramme de déformation linéaire,  $\varepsilon_c$  et  $\varepsilon_s$  désignent respectivement les déformations du béton et de l'acier.

Le paramètre  $\alpha_u$  représente la profondeur relative de la zone comprimée du béton et de l'axe neutre à partir de la fibre supérieure la plus comprimée du béton à l'ELU. Dans le diagramme uniformément répartie des contraintes montré par la figure  $f_{cu} = \eta f_{cd} = 0.85f_{ck}/\gamma_c$  est la valeur de calcul de résistance à la compression du béton,  $\gamma_c$  le facteur de sécurité partiel pour le béton et  $f_{ck}$  est la résistance caractéristique du béton à 28 jours.

Conformément à l'EC-2, un diagramme rectangulaire simplifié est recommandé moyennant une adaptation pour les bétons de hautes résistances. Cela nécessite la mise en place d'un facteur  $\lambda$  de la profondeur de la zone de compression et un facteur de la résistance de calcul  $\eta$ .

$\lambda$  Et  $\eta$  sont deux facteurs à la fois linéairement dépendant de la résistance caractéristique  $f_{ck}$  et donnés par les deux équations qu'on a citées dans le chapitre 3.

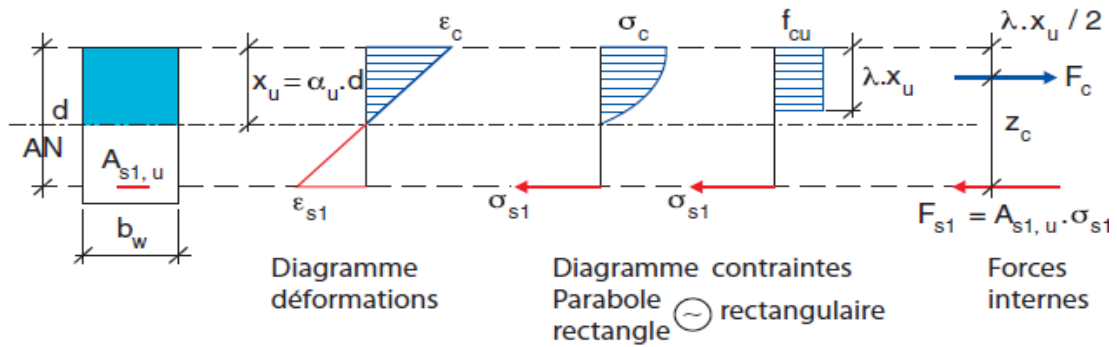


Figure 4.1 Diagramme contrainte-déformation poutre rectangulaire

### 4.3 Position du problème

Les variables de conception du modèle sont les dimensions géométriques ( $b$ ,  $d$ ) de la section transversale de la poutre rectangulaire, la section d'acier  $A_s$ , et la profondeur relative  $\alpha$  de la zone de compression du béton.

Trouver les variables de conception  $b$ ,  $d$ ,  $A_s$  et  $\alpha$  étant donné:

Portée de la poutre  $L$

Moment fléchissant ultime  $M_{Ed}$

Effort de cisaillement ultime  $V_{Ed}$

Résistance caractéristique à la compression sur cylindre de BHR à 28 jours  $f_{ck}$

Facteur de résistance de calcul  $\eta$

Facteur de profondeur de la zone de compression :  $\lambda$

Limite d'élasticité caractéristique pour acier :  $f_{yk}$

Module élastique :  $E_s$

Pourcentage minimal de l'acier :  $P_{\min}$

Pourcentage maximal de l'acier :  $p_{\max}$

Coût total par unité de longueur de la poutre rectangulaire en BHR :  $C$

Les variables de conception du modèle sont les dimensions géométriques ( $b$ ,  $d$ ) de

Coût unitaire de l'acier d'armature :  $C_s$

Coût unitaire du béton BHR :  $C_c$

Coût unitaire de coffrage :  $C_f$

### 4.4 Fonction objectif

Considérons maintenant une poutre à section rectangulaire en BHP et soit  $C$  la fonction objectif représentant le coût total de béton, de l'acier et du coffrage utilisés par unité de longueur de la poutre. Cette fonction peut être définie comme :

$$C = C_c b h + C_s A_s + 2C_f [b+h]$$

Où les coûts unitaires  $C_c$ ,  $C_s$  et  $C_f$  sont définis précédemment.

Les éléments de coût tels que les coffrages de béton et de façonnage de l'acier sont présentés implicitement et sont inclus dans la fonction objectif en termes de pourcentages appropriés des coûts unitaires de béton et d'acier, respectivement.

Il devrait être tout aussi important de noter que dans un problème d'optimisation de moindres coûts, les valeurs optimales des variables de conception sont affectées par les valeurs relatives des coûts de la fonction objectif seulement, mais pas par les valeurs absolues des coûts. En d'autres termes, les valeurs absolues de coût affectent la valeur finale de la fonction objectif, et non pas les valeurs optimales des variables de conception. Ainsi, la fonction objective à minimiser peut être écrite comme suit:

$$C/C_c \rightarrow \text{Min}$$

$$C/C_c = b h + (C_s/C_c) A_s + 2(C_f/C_c) [b+h]$$

La valeur du rapport coût  $C_s / C_c$  varie d'un pays à un autre, voire d'une région à une autre pour certains pays.

### 4.5 Formulation du problème

Comme mentionné précédemment, les contraintes de conception seront définies en conformité avec les spécifications de conception de l'Eurocode2 (EC-2). Ainsi, et sans perte de généralité, le problème de conception de moindre coût des poutres rectangulaire en béton armé sous charges ultimes peut être mathématiquement formulé comme suit:

## CHAPITRE IV

---

Trouver les variable de conception  $b$ ,  $h$ ,  $d$ ,  $A_s$  et  $\alpha$  telles que :

$$C/C_c = b h + (C_s/C_c) A_s + 2(C_f/C_c) [b+h] \rightarrow \text{Min} \quad (1)$$

Sous les contraintes suivants:

a) Contrainte de comportement:

(Moment externe incluant le poids propre < Moment résistant de la section)

$$M_{Ed} < M_{AB}$$

$$\Leftrightarrow M_{Ed} < b d^2 f_{cu} \lambda \alpha_{AB} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_{AB}\right)$$

$$\Leftrightarrow M_{Ed} < b d^2 \eta f_{cd} \lambda \alpha_{AB} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_{AB}\right) \quad (2)$$

Équilibre des forces interne

$$\alpha = (f_{yd} / f_{cd}) (A_s / \eta \lambda b d) \quad (3)$$

$$\text{pourcentage minimale d'acier } A_s / (b d) \geq p_{\min} \quad (4)$$

$$\text{pourcentage maximale d'acier } A_s / (b h) \leq p_{\max} \quad (5)$$

**Conditions de compatibilité de déformations dans l'acier et le béton:**

$$\text{Meilleure utilisation de l'acier } \epsilon_{cu2} ((1/\alpha)-1) \geq f_{yd}/E_s \quad (6)$$

$$\text{Ferrailage sans acier comprimé } \lambda \alpha (1-0.5\lambda \alpha) \leq \mu_{\text{limit}} \quad (7)$$

**Contrainte de l'effort tranchant**

$$V_{Ed} \leq V_{Rd, \max} = v_1 f_{cd} b z (\text{tg}(\theta) + \text{cotg}(\theta)) \quad (8)$$

Contraintes liées aux variables de conception y compris les règles de pratique courante de pré-dimensionnement et de bonne exécution:

$$L/12 \leq h \leq L/10 \quad (9)$$

$$d/h = 0.9 \quad (10)$$

$$0.2 \leq b/d \leq 0.4 \quad (11)$$

## CHAPITRE IV

---

$\mu_{limit}$  : valeur limite du moment réduit

$\theta$  : angle entre les bielles de compression de béton

$\nu_1$  : un coefficient adimensionnel  $\nu_1 = 0.6 (1 - f_{ck}/250)$

$z$  : bras de levier égale  $0.9 d$

$h_{min}$  : hauteur minimale de la table de compression du béton

Il convient de noter que les ratios de coûts unitaires et plus précisément le rapport coût  $C_s / C_c$  varie d'un pays à l'autre et peut éventuellement dépendre d'une région à l'autre pour certains pays. Les valeurs de ces ratios de coût peuvent être estimées sur la base des données fournies dans les livres de prix unitaires applicables de matériaux de construction.

Le programme doit fournir les résultats optimaux ou les moindres couts comme suit :

$$V = \begin{cases} b_{opt} \\ d_{opt} \\ A_{s\ opt} \\ \alpha_{opt} \end{cases}$$

Après l'établissement des équations on arrive à la phase de calcul par programmation mathématique (qui ne nous concerne pas pour cette thèse) et le programme doit fournir les résultats optimaux ou les moindres couts comme nous déjà mentionné.

### **Conclusion générale**

Ce travail porte sur le développement d'une méthodologie de calcul de moindre coût des poutres rectangulaire en béton à haute performance (BHP) soumise à la flexion simple conformément aux Etats Limites Ultimes (ELU) en utilisant la dernière version de l'Eurocode2 (EC-2). Il importe de souligner que bien que les travaux développés dans le présent document soient basés sur l'utilisation d'un code spécifique de conception et de calcul des structures en béton armé à savoir l'Eurocode2 (EC-2), la méthodologie peut être facilement étendue à des codes de conception et de calcul utilisés dans d'autres pays sans modifications majeures

Pour le processus d'optimisation des coûts, le coût global des matériaux de construction, y compris les coûts de béton, d'acier et de coffrage, représente la fonction objectif et l'ensemble des contraintes comprend des restrictions sur les contraintes de comportement, les conditions relatives à la compatibilité de déformation dans l'acier et le béton, les dimensions transversales de la section rectangulaire fondées sur des règles pratiques de pré-dimensionnement et de bonne exécution en vigueur. Le poids propre de la poutre rectangulaire qui peut contribuer de manière substantielle à la détermination de la capacité de résistance flexionnelle ultime pour de longues portées est considéré comme variable à la fois dans la fonction objectif et les fonctions de contraintes.

## Référence Bibliographique

---

### Référence bibliographique

- [1] **Pierre-Claude Aitcen** Béton haute performance, Edition Eyrolles.
- [2] Les bétons hautes performances, Caractéristiques, durabilités, applications, presse pont et chaussée,
- [3] **Hamrat Mustafa**. Béton à haute performance formulation, propriétés rhéologiques et mécanique. Thèse magistère. Université de Chlef, 1994.
- [4] **Dr, ir, G, De Schulter ir, arch. J, Apers** LE BÉTON À HAUTES PERFORMANCES. J, P, Jacobs 2007.
- [5] **Robert Le Roy**, Déformations instantanées et différées des bétons à hautes performances. Thèse doctorant, 19 septembre 1995.
- [6] **M, BOUCHABOUB** Comportement de poteaux élancés en béton armé soumis à un chargement excentré, Thèse de doctorat. 10 Avril 2013
- [7] **Jean Roux**, Pratique de l'euro code 2, Edition afnor.
- [8] **Jean Roux**, Maitrise de l'euro code 2, Edition afnor.
- [9] Document : Euro code 2 Calcul des structures en béton NF EN 1992-1-1. Afnor 2005
- [10] **S. Multon**, Béton armé euro code 2, INSA, Université Paul Sabatier, Toulouse France.
- [11] **Hajjat Adeli et Kamal C**, Cost optimization of structure, 2006
- [12] **F, Fedghouche**. Optimisation des éléments de structures en béton arme aux états limites. Thèse magistère. 20 juin 2001.
- [13] **F, Fedghouche**. Modèle de calcule de moindre cout des poutres en T en BA par optimisation non linéaire. Thèse doctorat. ENP Alger, 2013.
- [14] **F, Fedghouche and Tiliouine B**. Minimum cost design of reinforced concrete rectangular sections in bending under ultimate loads, the 5nd International Conference on Advances in Mechanics. ICAMEM2010, December18-20, Hmmamet, Tunisia, 2010.
- [15] **F, Fedghouche and Tiliouine, B**. Minimum cost design of reinforced concrete T-beams at ultimateloads using Eurocode2. Eng.Struct.. 42, 43- 50, 2012.

## Référence Bibliographique

---

- [16] **Tiliouine, B. and Fedghouche, F.** Economic design of reinforced HSC T – sections in flexure. International journal of modeling and optimization.vol3. N°2, April 2013.
- [17] **F, Yennoune.** Dimensionnement des murs de soutènement par optimisation multicritère. Thèse magistère, 14 juin 1998.
- [18] **M,Moussaoui .** L’analyse inverse des problèmes géotechniques applications des méthodes d’optimisations stochastiques. Thèse doctorant. Université de Skikda, 2013.
- [19] **Z, Moula.** Contribution à l’optimisation des réseaux d’alimentation en eau. Thèse Magistère. Université des sciences et technologie Houari Boumediene.2012 ;
- [20] **Oumesaad Hajji.** Contribution au développement de méthodes d'optimisation stochastiques. Application à la conception des dispositifs électrotechniques. Thèse doctorant. Université de Lille, 2003.
- [21] **O, Zerdeni.** L’optimisation non linéaire multiobjectif. Thèse de doctorat. Université Mouloud Mammri, Tizi-ouzou, 2013.