MODELISATION NUMERIQUE DES INTERFACES A COTE FROTTANT
Application aux Poutres Composites

Par
A. NOUNE et R.M COURTADE
Laboratoire Mécanique et Matériaux
Université Claude Bernard, Lyon I

Résumé

La présence d'interface dans les problèmes de poutres stratifiées est à l'origine de beaucoup de désordres que l'on observe physiquement : frottement, décollement. Pour prendre en compte cette singularité, on propose une modélisation par un élément fini triangulaire mixte de contact frottant, permettant à l'interface la continuité des déplacements, l'équilibre des contraintes et la prise en compte d'une loi de contact de type Coulomb. La méthodologie de formulation de l'élément et son application à un exemple sont présentées.

Mots clés : interface - poutre - élément fini - structure stratifiée - loi de frottement.

1 INTRODUCTION

Dans l'étude des assemblages collés, le calcul des contraintes aux interfaces présente un intérêt particulier, aussi leur évaluation par l'utilisation de méthodes analytiques résolvant de façon exacte les équations d'équilibre est difficile, voire infranchissable. Au contraire, les méthodes numériques fondées sur les théorèmes énergétiques s'adaptent parfaitement, parmi celles-ci les méthodes aux éléments finis.

Deux grandes familles d'éléments finis sont souvent utilisées : les éléments formulés en déplacements et ceux formulés en contraintes ; ces deux ensembles sont mal adaptés à la prise en compte des conditions de continuités cinématique et statique au passage d'un élément à l'autre. L'existence de cette discontinuité n'affecte pas sensiblement les résultats obtenus si le matériau est homogène et isotrope ; il n'en est pas de même dans le cas des matériaux anisotropes (stratifiés, composites, sandwiches, etc).

Dans un calcul par éléments finis, il y a donc lieu de prévoir des éléments finis spécifiques, susceptibles de prendre en compte cette singularité d'interface. Les travaux du professeur G. Verchery, du professeur R.M Courtade et de A.S Bajbouj sont à la base de l'élément développé et utilisé dans cette étude.

Dans le cadre du travail présenté ici, une amélioration du modèle adhérence parfaite est envisagée par l'introduction d'une loi de frottement de type Coulomb.

2 POSITION DU PROBLEME

S. Aivazzadeh (1984) a observé que lors de la déformation d'une structure stratifiée sous l'effet de charges extérieures, les conditions aux limites aux interfaces sont traduites en écrivant la continuité des variables cinématiques (**u**, **v**), et des variables du vecteur contrainte (**N**, **T**) caractérisant l'équilibre de l'interface et qui devront donc apparaître comme variables physiques aux noeuds de l'élément fini.

$$\overrightarrow{U_{p1}} = \overrightarrow{U_{p2}}$$

$$\overrightarrow{U} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$N_1 + N_2 = 0 \; ; T_1 + T_2 = 0$$

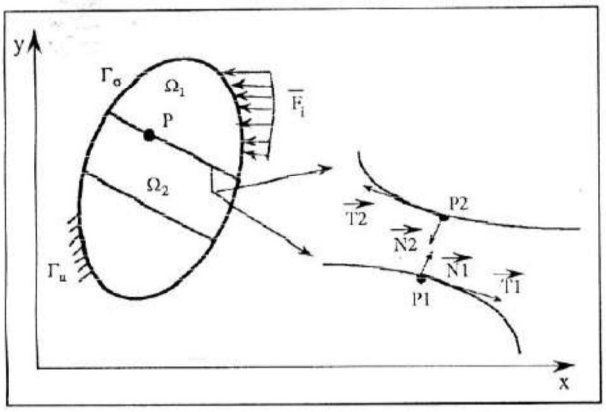


Figure 1 : Structure stratifiée.

3 METHODOLOGIE

Le cheminement emprunté pour la formulation de l'élément d'interface à côté frottant se fait à partir d'un élément mixte pur de Reissner que l'on modifie par deux méthodes développées par G. Verchery (1981) : la relocalisation et l'élimination. La première a été utilisée entre autre par A.S Bajbouj (1990) pour construire des éléments d'interface à adhésion parfaite. Nous avons utilisé la méthode d'élimination pour construire l'élément final et ne conserver que les degrès de liberté traduisant : la continuité des déplacements, l'équilibre local des contraintes au passage de l'interface et les conditions de frottement qui s'expriment par une loi de comportement de type Coulomb :

$$\sigma_T = \lambda_i \cdot \sigma_N$$

4 FORMULATION DE L'ELEMENT

Le modèle de Reissner appliqué à un élément triangulaire conduit à 15 degrès de liberté (5 d.d.l. par noeud : **u**, **v**, σ_x, σ_y, σ_{xy}). Le passage à l'élément d'interface intermédiaire se fait par relocalisation des variables en contraintes aux noeuds milieux des côtés. Le passage à l'élément d'interface de contact frottant se fait par élimination de la variable (**T**) sur l'un des côtés du triangle. La démarche de calcul est discutée dans le travail de A.Noune (1993) [7].

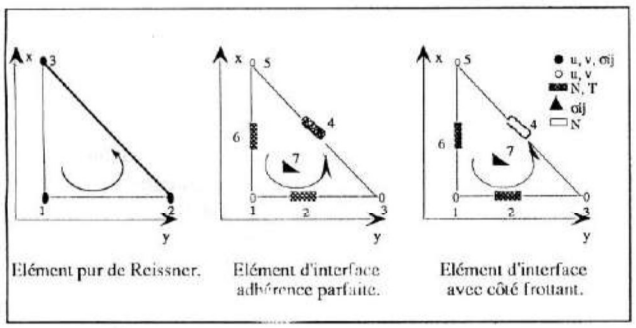


Figure 2 : Construction d'un élément d'interface à côté frottant.

Nous aboutissons respectivement à l'approximation des déplacements et des contraintes de l'élément intermédiaire et de l'élément final :

$$\begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{\sigma\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N] & o \\ o & [M]^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_e\} \\ \{\tau_e\}^* \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{\sigma\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N] & o \\ o & [M]^{**} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_e\} \\ \{\tau_e\}^{**} \end{Bmatrix}$$

avec :

$$\{\delta_e\}^T = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3\}$$
$$\{\tau_e\}^{*T} = \{N_2, T_2, N_4, T_4, N_6, T_6, \sigma_x^7, \sigma_y^7, \sigma_{xy}^7\}$$
$$\{\tau_e\}^{**T} = \{N_2, T_2, N_4, N_6, T_6, \sigma_x^7, \sigma_y^7, \sigma_{xy}^7\}$$

(N), (M)*, (M)**, sont les matrices d'interpolation respectivement des déplacements et des contraintes. Ici (M)*, (M)** résultent respectivement de la relocalisation des variables en contraintes et de l'élimination ensuite de la variable (T).

Tous nos calculs seront basés sur la fonctionnelle de Reissner qui, s'écrit sous la forme suivante :

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega \{\sigma\}[S]\{\sigma\} d\Omega - \int_\Omega \{\varepsilon\}\{\sigma\} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \overline{T_i}\ U_i\, d\Gamma$$

Le calcul de la matrice de rigidité-souplesse élémentaire de l'élément développé dérive de la stationnarité de la fonctionnelle "Π".

Le système d'équations à résoudre est le suivant :

$$[K_g] \begin{Bmatrix} \{\delta_g\} \\ \{\tau_g\} \end{Bmatrix} = \{F_g\}$$

$[K_g]$: matrice de raideur globale.
$[F_g]$: vecteur force global.

5 APPLICATION AUX PROBLEMES DE POUTRES

Cette application a pour but d'étudier le comportement mécanique sous sollicitation de flexion d'une poutre bicouche. L'interface entre les deux couches de matériaux différents sera dans un premier temps modélisée avec des éléments à adhérence parfaite, puis avec des éléments avec côté frottant.

Nous allons tracer la répartition des contraintes normales (qui sont bien les valeurs critiques à observer le long de l'interface) dans le cas de l'adhérence parfaite et dans le cas du contact avec frottement, obtenues respectivement pour un coefficient de frottement valant 1.0, 0.8, 0.4, 0.2, puis 0.0.

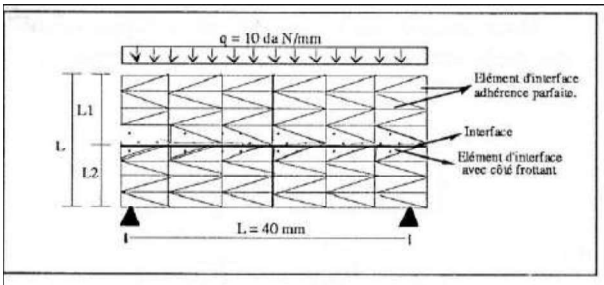
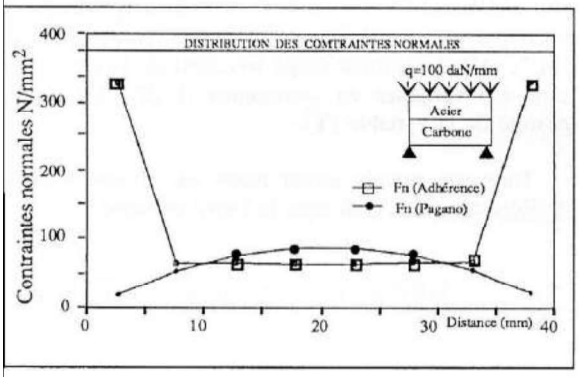
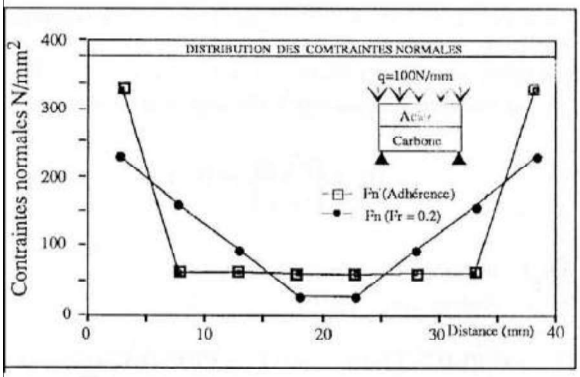
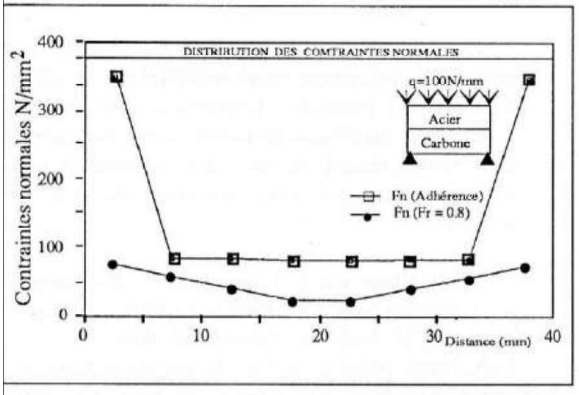


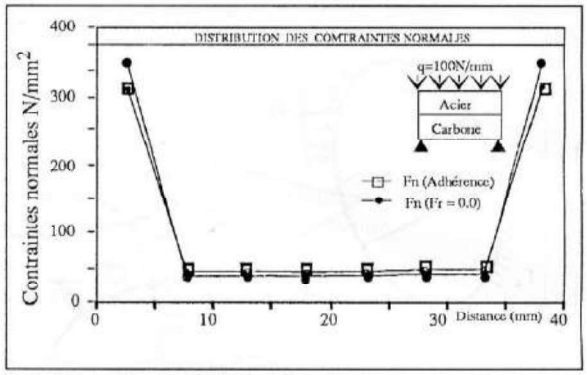
Figure 3 : Maillage de la poutre.

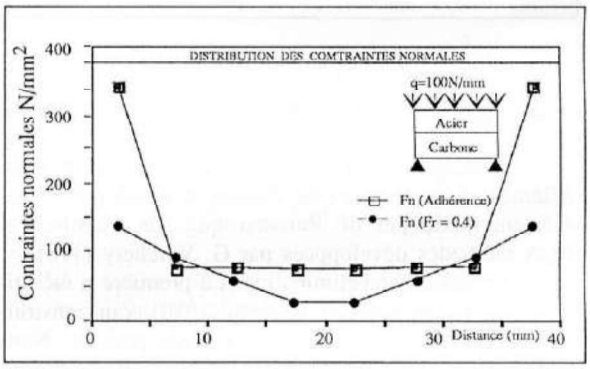
La courbe relative à la solution analytique (Pagano, 1969) obtenue dans le cas de l'adhérence parfaite servira ici de base de comparaison ; sa programmation a été faite à l'I.N.S.A. de Lyon par R.M. Courtade & al (1979).











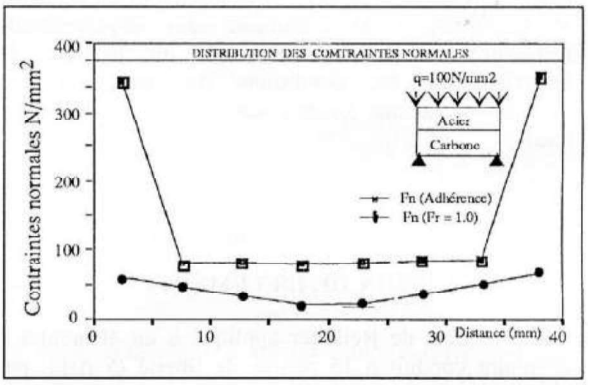


Figure 4 : Distribution des contraintes normales le long de l'interface obtenue :
- numériquement pour différentes valeurs du coefficient de frottement,
- analytiquement (solution de Pagano).

6 CONCLUSION

Dans l'étude des matériaux composites, la surface commune à deux corps peut dans un premier temps être considérée comme une interface parfaitement adhérente. Une amélioration de ce modèle est présentée dans cette étude par l'introduction d'une loi de contact frottant. Son champ d'application privilégié dans le domaine du génie civil est l'étude des renforcements d'ouvrages par placage de matériaux composites.

Il est important de souligner quelques remarques au terme de cette étude :

1- La distribution des contraintes et des déplacements est continue au passage des interfaces (en tout point pour les déplacements, aux noeuds pour le vecteur contrainte).

2- Les conditions de bord libre ne sont pas respectées, les maillages pris sont grossiers : cependant nous pensons qu'un maillage très fin dans le sens de la hauteur pourra combler ces lacunes.

3- Le coefficient de frottement est introduit explicitement dans la formulation même de l'élément ; il peut en outre être différent d'un élément à un autre.

4- Il sera donc intéressant de modéliser le comportement évolutif de ces interfaces ; un tel travail est en cours ❻

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Aivazzadeh : "*Eléments finis d'interfaces. Application aux assemblages collés et structures stratifiées*". Thèse de docteur-ingénieur, Université de Technologie de Compiegne, 1984.

[2] S. Aivazzadeh & G. Verchery : "*Stress analysis at the interface in adhesive joint by special finite elements*". International Journal of Adhesion and Adhesive. Vol. 6, N°. 4, pp. 185-188, 1986.

[3] M. Bichara : "*Formulation d'éléments finis d'interface. Application aux assemblages collés*". Thèse de Docteur- ingénieur, Université de Paris, 1990.

[4] R.M Courtade, P. Hamelin, A.S Bajbouj & G. Verchery : "*Modélisation des interfaces entre fibres et ciment par éléments finis*". Greco Géocomposite, groupe fibres-ciment, 1991.

[5] R.M Courtade, A. Noune & P. Mailler : "*Modélisation de l'interface fibre-matrice cimentaire : Elément fini d'interface avec côté frottant*". Greco Géocomposite, groupe fibres-ciment, 1993.

[6] A. Loredo : "*Réanalyse des structures discrétisées et application aux problèmes de contact élastique et d'incompressibilité*". Thèse de Docteur-ingénieur, Université Claude Bernard-Lyon I, 1993.

[7] A. Noune : "*Eléments finis d'interface. Application aux poutres composites*". D.E.A, Génie Civil, Laboratoire Mécanique et Matériaux, Université Claude Bernard Lyon I, 1993.

[8] A.S Bajbouj : "*Eléments finis d'interface pour le calcul des structures hétérogènes*". Thèse de Docteur-ingénieur, Université Claude Bernard-Lyon I, 1990.

[9] K. Washizu : "*Variationnal method in elasticity and plasticity*". Pergman, New york, 1982.

