LE CALCUL DE LA RIGIDITE DE TORSION EN ELASTICITE NON LINEAIRE

Par
Naceur Eddine HANNACHI
Docteur ès Sciences
Maître de Conférences à l'Université de Tizi-Ouzou

Résumé

Plusieurs auteurs présentent des méthodes d'évaluation de la rigidité de torsion en élasticité non linéaire basées le plus souvent sur des hypothèses issues de l'élasticité linéaire.

Nous developpons dans cet article une méthode plus rigoureuse d'évaluation de cette rigidité basée sur l'introduction d'un module fictif de déformation transversale.

Mots clés : élasticité non linéaire - torsion - rigidité.

1 INTRODUCTION

En élasticité linéaire, le module de déformation transversale G_o est toujours supposé constant dans la section droite, et lié au module de déformation longitudinale par l'expression : $G_o = E_o/2(1+\nu_o)$, comme la rigidité de torsion est donnée par le produit de ce module G_o par l'inertie de torsion K_o.

Après fissuration de flexion, comme ce module de déformation G(x,y) est variable dans une même section droite, il n'est plus possible de calculer par la théorie classique cette rigidité de torsion.

2 ANALOGIE DE LA MEMBRANE

Si l'on considère une membrane homogène, d'épaisseur constante, uniformément tendue sur le contour d'une section (S) avec une tension q par unité de longueur et soumise à une pression transversale non uniforme p(x,y), l'équation d'équilibre d'un petit élément est :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{p(x,y)}{q}$$

w(x,y) étant la flèche de la membrane déformée, supposée petite.

L'analogie de la membrane pour les problèmes de torsion en élasticité linéaire conduit à remplacer -p/q par $2G \frac{d\theta}{dz}$ (p étant ici une pression uniforme). On en déduit que :

- ✔ les contraintes de cisaillement $\vec{\tau}$ sont portées par les tangentes aux lignes de niveau de la membrane,
- ✔ leur grandeur est la pente maximale de la membrane au point considéré,
- ✔ le couple de torsion résultant a pour valeur le double du volume limité par la membrane déformée et le plan initial de la section :

$$C = 2 \iint_{(s)} w\,(x,y)\,.\,dS$$

En élasticité non linéaire, si l'on admet l'existence d'un module sécant de déformation transversale G(x,y), l'analogie de la membrane subsiste à condition de considérer une pression non-uniforme p(x,y) proportionnelle au module G (Figure 1).

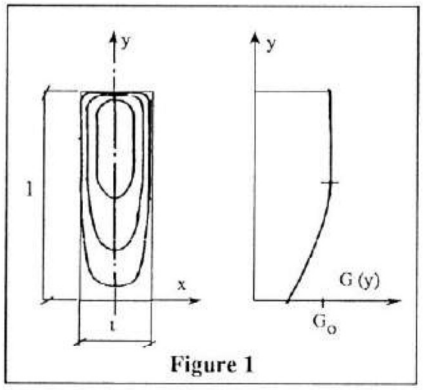


Figure 1

3 SECTION RECTANGULAIRE MINCE

3.1 Formulation sécante

On considère une section de longueur 1 parallèlement à l'axe y, d'épaisseur t très petite devant 1, et l'on admet que le module G(y) ne varie qu'avec l'ordonnée y. La section de la membrane déformée par un plan perpendiculaire à l'axe y est un arc de parabole, la flèche maximale w_{max} (y) étant proportionnelle, avec un facteur k, au module G(y) :

$$w(x,y) = w_{max}(y) \cdot \left[1 - \left(\frac{2x}{t}\right)^2\right]$$

avec $\quad w_{max}(y) = k.\,G(y)$

Le couple de torsion, calculé d'après le volume sous la membrane, est alors :

$$C = \frac{4t}{3}\, k \int_o^l G(y).dy$$

En faisant apparaître l'expression du module moyen

$$\overline{G} = \frac{1}{l}\int_o^l G(y).dy$$

et en posant $\quad \lambda = \dfrac{3}{4\, l\, t\, \overline{G}}$

on peut exprimer le facteur de proportionnalité en fonction du couple : $k = \lambda.C$.

Les composantes de la contrainte de cisaillement s'écrivent alors :

$$\tau_{zx} = \frac{\partial w}{\partial y} = \lambda \cdot C \cdot \left[1 - \left(\frac{2x}{t}\right)^2\right] \frac{dG}{dy}$$

$$\left|\tau_{yz}\right| = \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| = \frac{8\,\lambda \cdot C}{t^2} \cdot G(y).x$$

d'où $\quad \tau\,(x,y) = (\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2)^{1/2}$

Remarque : en élasticité linéaire, le module G est constant, donc τ_{zx} est nulle sauf au voisinage immédiat des extrémités du rectangle où la membrane n'est plus un cylindre parabolique à génératrices parallèles à l'axe y.

Pour calculer la rigidité de torsion globale $\overline{GK}$, on exprime que le travail du couple C dans la rotation de torsion dθ entre deux sections distantes de dz, est égal à la somme des travaux des contraintes τ dans les distorsions $\gamma(x, y) = \tau(x, y)/G(y)$:

$$W = \int_o^{d\theta} C(\xi) \cdot d\xi = -\,dz \iint_{(s)} \left[\int_o^{\gamma} \tau\,(x,y,\eta) \cdot d\eta\right] dS$$

dη exprimant la variation de distorsion, le module de déformation transversale étant lui-même fonction de η : G(y, η), de même que le couple C est fonction de la rotation ξ.

Cette équation ne permet pas d'obtenir une expression explicite de la rigidité :

$$\overline{GK} = \frac{C}{d\theta/dz}$$

3.2 Formulation tangente

Dans l'analogie de la membrane, on remplace :

$$\frac{-p(y)}{q} \quad \text{par} \quad 2\,G(y)\,\frac{d\theta}{dz}$$

et la flèche maximale w_{max} (y) est proportionnelle au module sécant G(y), donc à p(y). Si on raisonne maintenant en petits accroissements de pression δp et de rotation δ(dθ /dz), on remplace :

$$\frac{-\delta p(y)}{q} \quad \text{par} \quad 2\,G_t(y) \cdot \delta\left(\frac{d\theta}{dz}\right)$$

G_t étant le module tangent de déformation transversale. L'accroissement de flèche de la membrane déformée sera alors :

$$\delta w\,(x,y) = \delta w_{max}(y) \cdot \left[1 - \left(\frac{2x}{t}\right)^2\right]$$

avec $\quad \delta w_{max}(y) = k_t \cdot G_t(y)$

L'accroissement de couple est alors :

$$\delta C = \frac{4\,t}{3}\, k_t \int_o^l G_t(y).dy$$

En faisant apparaître le module tangent moyen ;

$$\overline{G}_t = \frac{1}{l}\int_o^l G_t(y) \cdot dy$$

et en posant $\quad \lambda_t = \dfrac{3}{4\, l\, t\, \overline{G}_t}$

on exprime le facteur de proportionnalité de l'accroissement de flèche au module tangent : $k_t = \lambda_t \cdot \delta C$.

Les composantes de la variation de contrainte s'écrivent alors :

$$\delta\tau_{zx} = \frac{\partial(\delta w)}{\partial y} = \lambda_t \cdot \delta C \cdot \left[1 - \left(\frac{2x}{t}\right)^2\right] \cdot \frac{dG_t}{dy}$$

$$\left|\delta\tau_{yz}\right| = \left|\frac{\partial\,(\delta w)}{\partial x}\right| = \frac{8\,\lambda_t \cdot \delta C}{t^2} \cdot G_t(y) \cdot x$$

D'où : $\quad \delta\tau = \left|\delta\tau_{zx}^2 + \delta\tau_{yz}^2\right|^{1/2}$

En utilisant le théorème des travaux virtuels, on écrit que le travail du couple C dans un accroissement de rotation $\delta(d\theta/dz)$ doit être égal au travail des contraintes τ dans les accroissements de distorsion $\delta\gamma = \delta\tau/G_t$:

$$C.\delta\left(\frac{d\theta}{dx}\right) = \iint_{(s)} \tau.\delta\gamma \; . \; dS$$

Soit, en introduisant la rigidité tangente globale $\overline{G_tK}$ et en remplaçant τ et $\delta\gamma$ par leurs expressions :

$$C.\frac{\delta C}{\overline{G_tK}} = \lambda.C.\lambda_t.\delta C \iint_{(s)} (\ldots)dS$$

d'où :

$$\overline{G_tK} = \left(\frac{4\,lt}{3}\right)^2 . \frac{\overline{G} \; . \; \overline{G_t}}{\iint_{(s)} (\ldots)dS}$$

On peut admettre en première approximation que les termes provenant de la composante τ_{zx} de cisaillement seront négligeables. En posant donc $\tau_{zx} = \delta\tau_{zx} = 0$, l'intégrale ci-dessus s'écrit :

$$\iint_{(s)} (\ldots)\, dS = \left(\frac{8}{t^2}\right)^2 \int_{-t/2}^{t/2} x^2\, dx \int_0^1 G(y) \; . \; dy$$

$$= \left(\frac{8}{t^2}\right)^2 \frac{t^3}{12}\, l\, \overline{G}$$

D'où :

$$\overline{G_tK} = \overline{G_t}\,\frac{lt^3}{3} = \overline{G}_t \; . \; K$$

La rigidité tangente est approximativement égale au module tangent moyen multiplié par l'inertie de torsion.

3.3 Expression des contraintes de cisaillement et des torsions maximales

Ces grandeurs sont maximales aux bords de la section ($x = \pm t/2$). La contrainte s'y réduit à τ_{yz} dont la valeur maximale est :

$$\tau_{max}\,(y) = \frac{3C}{lt^3}\,\frac{G(y)}{\overline{G}}\,t = \frac{C \; . \; t}{\overline{K}}\,\frac{G(y)}{\overline{G}}$$

On retrouve l'expression de l'élasticité linéaire multipliée par le rapport du module local G(y) au module moyen $\overline{G}$. La distorsion maximale correspondante est indépendante de y :

$$\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}\,(y)}{G(y)} = \frac{C.t}{\overline{G}.K}$$

En variation de contrainte et de distorsion, on a des expressions analogues avec le module tangent :

$$\delta\tau_{max}\,(y) = \frac{\delta C.t}{K}\,\frac{G_t(y)}{\overline{G}_t}$$

et

$$\delta\gamma_{max} = \frac{\delta C.\,t}{\overline{G}_t.\,K}$$

Cette dernière expression peut s'écrire aussi

$$\delta\gamma_{max} = \frac{\delta C.t}{\overline{G_t} \; . \; K} = t.\;\delta\left(\frac{d\theta}{dz}\right)$$

De même qu'en élasticité linéaire on a

$$\gamma_{max} = \frac{C \; . \; t}{G_o \; . \; K} = t.\,\frac{d\theta}{dz}$$

On peut alors admettre que la même forme d'expression est conservée dans la formulation sécante de l'élasticité non linéaire, c'est-à-dire

$$\gamma_{max} = \frac{C \; . \; t}{\overline{G} \; . \; K} \cong \frac{C \; . \; t}{\overline{GK}} = t \; . \; \frac{d\theta}{dz}$$

Par analogie avec la rigidité tangente, la rigidité sécante serait alors le produit du module sécant moyen $\overline{G}$ par l'inertie de torsion K de l'élasticité linéaire :

$$\overline{GK} \cong \overline{G} \; . \; K = \overline{G} \; . \; \frac{lt^3}{3}$$

4 SECTION A PROFIL MINCE OUVERT

4. 1 Rigidité

Si la section est un élément mince d'épaisseur t(s) faiblement variable avec l'abscisse curviligne s le long du profil, l'inertie s'écrit :

$$K = \frac{1}{3}\int_o^l t(s)^3\, ds$$

et le module sécant moyen est

$$\overline{G} = \frac{\int_o^l G(s) \; . \; t(s) \; . \; ds}{\int_o^l t(s) \; . \; ds} = \frac{1}{A}\int_o^l G(s) \; . \; t(s) \; . \; ds$$

A étant l'aire de la section de l'élément. La rigidité est alors $\overline{GK} = \overline{G}.\,K$.

Si la section est composée d'un assemblage de plusieurs éléments minces l'inertie sera

$$K = \sum_k k_k = \frac{1}{3}\sum_k \int_o^{l_k} t_k\,(s)^3 \; . \; ds$$

Chaque élément, de rigidité propre $\overline{GK_k}$ équilibre une part C_k du couple de torsion C. La rotation unitaire $d\theta/dz$ étant la même pour tous les éléments, on doit avoir

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{C_k}{\overline{GK}_k} = \frac{C}{\overline{GK}_k} \quad \text{et} \quad \sum_k C_k = C,$$

$\overline{GK}$ étant la rigidité globale. On en déduit

$$\overline{GK} = \sum_k \overline{GK}_k \cong \sum_k \overline{G}_k \, . \, K_k$$

Donc, sous sa forme la plus générale, la rigidité s'écrit :

$$\overline{GK} \cong \frac{1}{3} \sum_k \left[\overline{G}_k \, . \int_o^{l_k} t_k(s)^3 \, . \right] ds$$

avec

$$\overline{G}_k = \frac{1}{A_k} \int_o^{l_k} G(s) \, . \, t(s) \, . \, ds$$

4.2 Contraintes et déformations maximales

Par analogie aux expressions écrites en 3.3, la contrainte de cisaillement maximale dans un élément quelconque k s'écrira :

$$\tau_{k,max}(s) = \frac{C_k \, . \, t_k(s)}{K_k} \, \frac{G_k(s)}{\overline{G}_k}$$

$$\cong \frac{C_k \, . \, t_k(s)}{\overline{GK}_k} \, G_k(s)$$

$$= \frac{C \, . \, t_k(s)}{\overline{GK}} \, . \, G_k(s) \qquad k$$

La distorsion maximale correspondante est

$$\gamma_{k,max}(s) = \frac{\tau_{k,max}(s)}{G_k(s)} = \frac{C \, . \, t_k(s)}{\overline{GK}}$$

5 SECTION A ELEMENTS NON MINCES

On ne peut plus admettre que le module G ne varie qu'avec l'abscisse le long du profil, il faut aussi considérer sa variation dans l'épaisseur. On pourrait reprendre le raisonnement au départ avec un module G(x, y) supposé connu en tout point. La solution du problème est très complexe et ne peut être que numérique, à commencer par l'établissement de l'équation de la membrane déformée sous l'action d'une pression quelconque p(x,y) puis l'expression de l'égalité des travaux du couple C et des contraintes de cisaillement τ en considérant les deux composantes de celles-ci.

A titre de première approximation, on pourrait admettre

$$\overline{GK} = \sum_k \overline{G}_k \, . \, K_k$$

avec

$$\overline{G}_k = \frac{1}{A_k} \iint_{(s_k)} G_k(x,y) \, . \, dx \, . \, dy$$

et en tenant compte de la variation éventuelle d'épaisseur, des effets d'extrémités (négligeables lorsque l'élément est très mince) et, le cas échéant, des effets de pénétration des éléments les uns dans les autres (voir l'exemple traité à l'annexe ci-après).

6 CONCLUSION

On montre qu'il est possible de calculer la rigidité de torsion en élasticité non linéaire comme le produit de l'inertie de torsion corrigée (*) par un module de déformation moyen G calculé sur la section droite.

Un prochain article développera une méthode exhaustive de calcul de ce module de déformation moyen, méthode basée sur des résultats d'essais [1], [2].

(*) En prenant impérativement en compte les points développés en annexe (effet de bord,...) ❷

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Hannachi : "*Rigidités de gauchissement et de torsion des poutres à profil mince ouvert, après fissuration de flexion*". Thèse de Doctorat d'Etat, Ecole Polytechnique d'Alger, Octobre 1989.

[2] B. Foure et M. Kavyrchine : "*Déformabilité du béton en compression et cisaillement combinés : étude expérimentale*". Fév. 83, publication interne du C. E. B. T. P.

A N N E X E

INERTIE DE TORSION PURE D'UNE SECTION NON MINCE A EPAISSEUR VARIABLE

(Cas particulier d'un profil en double Té)

Pour un rectangle mince d'épaisseur t faible devant sa longueur l, l'inertie est donnée par l'expression :

$$K_o = \frac{l t^3}{3} \qquad (a)$$

La section en double-té peut être décomposée en trois éléments (Figure 2) :

- l'âme de longueur (h - e') et d'épaisseur c',
- les deux ailes de longueur b et d'épaisseur moyenne $\overline{e} = \frac{1}{2}(e + e')$.

En première approximation, son inertie est alors :

$$K_o = \sum_i \frac{l_i \, t_i^3}{3} = \frac{1}{3} \left[(h - \overline{e}) \, e'^3 + 2b \, \overline{e}^3 \right] \qquad (b)$$

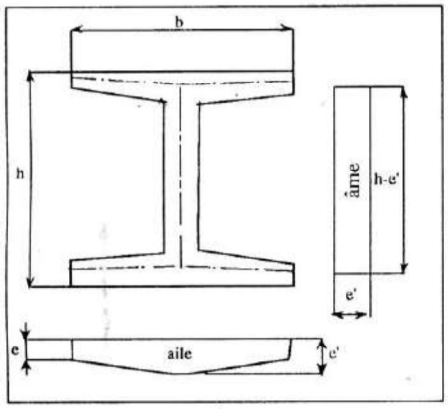


Figure 2 : Décomposition de la section pour le calcul de l'inertie de torsion.

EFFET DE LA VARIATION D'EPAISSEUR DES AILES

L'inertie d'un rectangle mince mais d'épaisseur t(s) faiblement variable peut se calculer par

$$K'_o = \frac{1}{3} \int_o^l t(s)^3 \, . \, ds$$

Dans le cas d'une variation linéaire de t(s) entre e et e' sur la longueur b, on obtient :

$$K'_o = \frac{b}{12} \left[e^3 + e'^3 + e.e'.(e + e') \right] \qquad (c)$$

valeur très peu différente de celle obtenue en prenant directement t égal à l'épaisseur moyenne e dans l'expression (a).

EFFET D'EXTREMITE SUR UN RECTANGLE D'EPAISSEUR CONSTANTE

D'après l'analogie classique, les formules précédentes supposent que la membrane déformée tendue sur le contour de la section rectangulaire d'épaisseur constante est un cylindre à génératrices parallèles aux grands côtés et à directrice parabolique constante sur toute la longueur (Figure 3a). Ceci est évidemment faux le long des petits côtés. La perturbation due à l'effet d'extrémité est sans importance pour un rectangle mince (l/t grand). Il n'en est plus de même si le rectangle n'est pas mince, mais alors les traités de Résistance des Matériaux donnent la solution exacte à partir de la théorie de Saint-Venant :

$$K = k \, . \, K_o$$

Une très bonne approximation du facteur k est donnée par les formules suivantes (à moins de 1% près)

$$l/t \leq 2 : \qquad k = 1.086 - \frac{1}{0.505 + l/t}$$

$$l/t \geq 2 : \qquad k = 1 - 0.63 \, \frac{t}{l}$$

a) Effet de bord

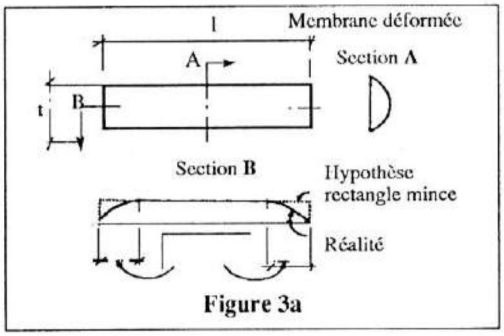


Figure 3a

b) Effet de bord + variation d'épaisseur

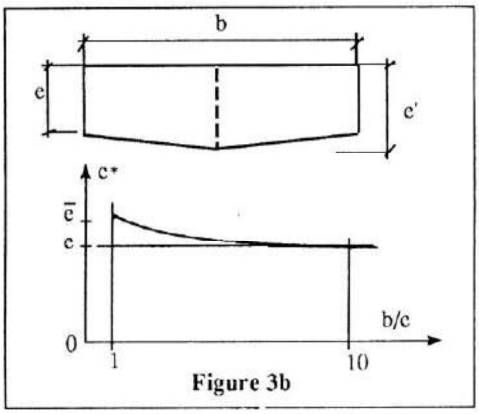


Figure 3b

EFFET D'EXTREMITE SUR UN ELEMENT D'EPAISSEUR VARIABLE

Pour les ailes d'épaisseur variable, il faut considérer dans l'effet d'extrémité une épaisseur e* légèrement supérieure à e ; l'inertie s'écrit alors :

$$K = \left[1 - 0.63 \, \frac{e^*}{b} \right] \, . \, K'_o \qquad (d)$$

Pour une section dont la longueur serait sensiblement égale à l'épaisseur e, l'effet d'extrémité influe sur toute la longueur et on peut admettre que la correction doit être calculée avec l'épaisseur moyenne, soit e* = e. Au contraire, pour une longueur assez grande, admettons égale à 10.e, l'effet de bord n'existera plus que sur une distance e, donc e* = e. On fait l'hypothèse d'une variation hyperbolique entre les deux cas précédents (Figure 3b), ce qui conduit à l'expression suivante de l'épaisseur e* à introduire dans la correction :

$$e^* = \frac{1}{9} \left[10e - \bar{e} + 10 \left(\bar{e} - e \right) \frac{e}{b} \right] \qquad (e)$$

EFFET DE PENETRATION DE DEUX ELEMENTS

L'inertie de torsion étant toujours supposée proportionnelle au volume limité par la membrane déformée, quand on évalue séparément les inerties des ailes et de l'âme, on surévalue l'inertie totale en comptant deux fois

une partie du volume correspondant à la pénétration de l'âme dans les ailes (Figure 4a). Par contre, compte tenu du raccordement des deux membranes, il n'est pas nécessaire de tenir compte d'un effet d'extrémité pour l'âme dont l'inertie peut donc être calculée par la formule valable pour un rectangle mince déjà introduite dans l'expression (b). Il ne reste plus qu'à effectuer la correction relative à l'effet de pénétration. Le volume total sous la membrane relative à l'âme est :

$$V = 2\,(h - e')\,w_{max} \int_0^{e'/2} \left[1 - \left(\frac{2x}{c'}\right)^2\right] dx$$

Le volume commun à l'âme et aux deux ailes est égal à huit fois le volume situé sous le secteur triangulaire (S) de la figure 4b, soit :

$$V = 8 \iint_{(s)} w(x,y)\,.\,dx\,.\,dy = \frac{c'^2}{2}\,.\,w_{max}$$

L'inertie corrigée de l'âme est alors :

$$\left[1 - \frac{\Delta V}{V}\right].K_o = \left[1 - \frac{3e'}{4\,(h - e')}\right].\frac{1}{3}\,(h - e')\,e'^3 \qquad (f)$$

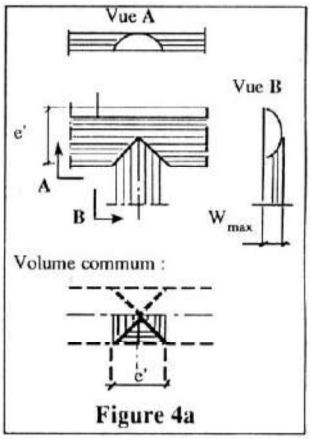


Figure 4a

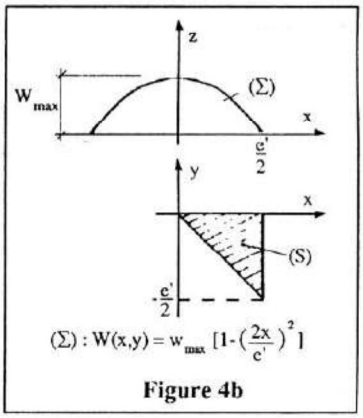


Figure 4b

DANS LE PROCHAIN NUMERO,

"CONTRIBUTION DES ARMATURES A LA RIGIDITE DE TORSION D'UNE SECTION EN BETON ARME"

Par :

B. FOURE
N.E. Hannachi