

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'EQUIPEMENT ET DE L'AMENAGEMENT
DU TERRITOIRE

ECOLE NATIONALE DES TRAVAUX PUBLICS
DEPARTEMENT DE LA RECHERCHE
ET DE LA POST-GRADUATION

THESE DE MAGISTER

Présentée par :

Abdelatif HAFSI

**CONTRIBUTION A LA MODELISATION NUMERIQUE
ET EXPERIMENTALE DU GONFLEMENT DES
ARGILES NON SATUREES
APPLICATION AUX ARGILES D'IN-AMENAS
ET DE TOUGGOURT**

Soutenue publiquement le 1er Juillet 1996 devant le Jury composé de :

MM	B. TILIOUINE	Professeur	ENP	Président
MM	T. K. KARALIS	Professeur	DUT	Direct. Thèse
MM	M. K. BERRAH	Maître de Conférences	ENP	Examineur
MM	S. BELKACEMI	Maître de Conférences	ENP	Examineur
Melle	Z. DERRICHE	Maître de Conférences	USTHB	Examinatrice
MM	H. AFRA	Chargé de Recherche	CGS	Examineur
MM	F. BELABDELOUAHAB	Chargé de Cours	ENTP	Examineur
MM	B. GUETTACHE	Chargé de Cours	ENTP	Examineur
MM	A. SOULEM	PDG du LTPSud		Membre Invité

JUILLET 1996

Remerciements

Je tiens fortement à remercier tous ceux qui ont apporté leur contribution à la réalisation de ce présent travail, et je citerais en particulier :

- Le Laboratoire des Travaux Publics du Sud pour son support financier;*
- L'Ecole Nationale des Travaux Publics pour son support Pédagogique et social;*
- Le Professeur Theodoros K. Karalis pour sa bonne direction de mon travail;*
- Le Professeur B. Tiliouine, pour ses conseils et encouragements;*
- Les membres du jury pour leurs contributions dans l'amélioration de mon travail;*
- Le Dr. M. T. Messafer pour sa contribution dans mes premiers travaux;*
- Mes enseignants de la première année théorique;*
- Mme H.F. Hamed et Mlle F. Mekideche pour leurs contributions au niveau des tâches informatiques au centre de calcul;*
- Le Dr. D. Sais pour ses diverses contributions.*

SOMMAIRE

Résumé	5
Présentation par T.K. Karalis	7
Introduction générale	8

PREMIERE PARTIE

THEORIES ET MECANISMES DU GONFLEMENT DES ARGILES

Introduction	10
--------------	----

CHAPITRE 1

GONFLEMENT PAR LA THEORIE DE LA DOUBLE COUCHE

1-1 Introduction	11
1-2 Minéralogie des Argiles	11
1-3 Capacité d'échange cationique	15
1-4 Formation de la double couche	16
1-5 Les forces de liaison interparticulaires	18
1-6 Théorie de Gouy et Chapman	22
1-7 Gonflement par la théorie de la double couche	30
1-8 Conclusion	33

CHAPITRE 2

GONFLEMENT PAR HYDRATATION

2-1 Introduction	34
2-2 Hydratation des surfaces	34
2-3 hydratation des ions	34
2-4 Conclusion	35

CHAPITRE 3

CONTRIBUTION MECANIQUE AU GONFLEMENT DES ARGILES

3-1 Introduction	36
3-2 Théorie de Terzaghi	36
3-3 Autre approche de mise en évidence de la contribution mécanique	37
3-4 Conclusion	37

DEUXIEME PARTIE

ANALYSE THERMODYNAMIQUE DU GONFLEMENT DES ARGILES NON SATUREES

1- Introduction	39
2- Objectifs de la thermodynamique	39
3- Définition du système	40
4- Définition des paramètres	40
5- Equations thermodynamiques du processus	41
6- Détermination pratique de la pression de gonflement	44
7- Conclusion	45
Conclusion sur les deux premières parties	46

TROISIEME PARTIE

MODELISATION NUMERIQUE ET EXPERIMENTALE DU GONFLEMENT DES ARGILES NON SATUREES ET APPLICATIONS

Introduction	47
--------------	----

CHAPITRE 1

EQUATIONS GENERALES DE L'ECOULEMENT

1-1 Introduction	48
1-2 Hypothèses	49
1-3 Système de coordonnées	49
1-4 Formulation pour un milieu non déformable	50
1-5 Caractérisation des sols gonflants	56
1-6 Formulation pour un milieu gonflant	56

CHAPITRE 2

FORMULATION EN ELEMENTS FINIS DES EQUATIONS D'ECOULEMENT

2-1 Introduction	62
2-2 Equation différentielle régissant l'étude de l'écoulement	63
2-3 Conditions aux limites	63
2-4 Formulation en éléments finis et résolution	65
2-5 Conclusion	104

CHAPITRE 3

PRESENTATION DU CODE DE CALCUL

3-1 Introduction	105
3-2 Description générale du code de calcul	105
3-3 Description des sous-programmes	105
3-4 Description des variables en fichier de données	107
3-5 Exemple numérique	109
3-6 Validation	113
3-7 Influence du gonflement sur l'écoulement	114
3-8 Conclusion	114

CHAPITRE 4

VALIDATION EXPERIMENTALE DU NSS MODEL

4-1 Introduction	115
4-2 Description du dispositif expérimental	115
4-3 Procédure expérimentale	117
4-4 Résultats des tests et comparaisons	120
4-5 Conclusion	128

Conclusion générale	129
---------------------	-----

Références bibliographiques	130
-----------------------------	-----

Annexe (Listing du code de calcul)

Imprimée à part

ملخص

لقد تناول مشروع بحثنا هذا إحدى المشاكل التي تعاني منها عدة بلدان من العالم وخاصة منها الواقعة في المناطق الجافة و الشبه الجافة , بحيث أن المباني و الطرقات المؤسسة فوق الأراضي الطينية الغير مشبعة, معرضة باستمرار إلى التصدع و الانهيار بسبب انتفاخ و انكماش الطين, و المتسبب فيه هي التغيرات التي تحصل في نسبة المياه داخل الطين , إما بالزيادة فتؤدي إلى انتفاخ أو بالنقصان فتؤدي إلى انكماش , وهذا حسب المناخ.

و لمواجهة هذه المسألة العويصة والشيقة في نفس الوقت بشكل منسجم و فعال, اعتمدنا أساسا على الطريقة العلمية الحديثة المتمثلة في بناء نماذج نظرية تسمح لنا بتصنع الظاهرة و تؤدي شيئا فشيئا إلى الوصول إلى القانون العام بعد عدة نماذج متطورة.

لهذا الغرض عملنا أولا على فهم الظاهرة الفيزيائية فهما عميقا من خلال الدراسات و الأبحاث السابقة, ثم قمنا ببناء نموذج نظري مرتكزين في ذلك على فرضيات مستوحاة من التجربة و التأمل , و تم إعداد برنامج للحساب الآلي للمتغيرات الأكثر تأثيرا في الظاهرة . بعد الحصول على النتائج النظرية من خلال البرنامج الآلي تمت مقارنتها بنتائج التجارب المخبرية التي قمنا بها و هذا بعد إعداد المنشأة التجريبية. فكانت المطابقة مقبولة إلى حد ما, لكن يبقى عمل كثير أمام الوصول إلى القانون العام الذي سيسمح لنا بالتحكم في الظاهرة , غير أن أسس الأبحاث المستقبلية في هذا الميدان قد تم تشخيصها و إعدادها من خلال هذه الرسالة المتواضعة .

Résumé

La présente contribution a porté sur l'étude d'un phénomène qui actuellement et depuis longtemps pose beaucoup de problèmes et dans plusieurs pays du monde, surtout, ceux situés en zones arides ou semi-arides. Les bâtiments, les routes, et toutes autres constructions fondées sur les argiles non saturées de ces zones subissent des endommagements en continu, ils sont provoqués par le gonflement et / ou le retrait de ces argiles à cause des variations saisonnières des profils des teneurs en eau. Notre approche pour ce problème très complexe se base sur la méthode moderne de recherche des lois des phénomènes naturels, qui est la *Modélisation*.

Dans un premier temps, nous avons étudié le phénomène physique du gonflement à partir des théories existantes, nous avons ensuite construit un modèle théorique de simulation, en se basant sur des hypothèses qui émanent de l'observation et de l'expérimentation, suivi du développement d'un code de calcul utilisant la méthode des éléments finis couplée à un algorithme implicite d'intégration dans le temps, celui-ci a permis la détermination d'une variable ayant une importante influence sur le phénomène, il s'agit de la teneur en eau. Les résultats théoriques ont été validés numériquement et par l'expérimentation après avoir conçu un dispositif expérimental adéquat. Quoiqu'il reste beaucoup à faire encore, on estime que les bases des prochaines recherches dans ce domaine ont été définies à travers cette thèse.

Abstract

This contribution has been concerned with one of complex and formidable geotechnical problem which occurs mainly in the arid and semi-arid climatic regions of the world. In such regions the soils dry and shrink during the arid weather and then expand when moisture becomes available. Consequently, residential and industrial buildings, pavements, and other constructions founded on this soils may be subjected to undesirable cracking resulting from differential swelling and/or shrinking of the soil. Our approach to this problem is based on the *principle of modelling*. A simulation models must be built, and improved until approaching a general law that govern the phenomenon.

We have proceeded firstly by studying the physical phenomenon of swelling through the available theories, thereafter, we have built a model on the basis of some assumptions which emanate from observations and experiments. A computer program has been developed using the finite element method coupled to an implicit algorithm for time integration to compute the most important variable that influence swelling, which is the moisture content. To validate a theoretical results, an experimental procedure has been performed after the conception of a special and adequate setup. The agreement between theory and experiment was reasonably good, nevertheless, further research must be undertaken in order to reach the general law.

PRESENTATION

Mr. Abdelatif Hafsi ingénieur des Travaux Publics a fait un travail considérable sur un domaine qui n'a pas été développé. Il a essayé d'introduire la méthode des éléments finis pour résoudre l'équation de la diffusivité d'une phase aqueuse à travers un milieu gonflant non saturé.

Il est bien entendu que c'est le début mais ce démarrage est nécessaire pour qu'il puisse par la suite résoudre des phénomènes plus compliqués qui touchent le développement des contraintes de gonflement et de retrait (dessiccation).

Son travail est divisé en trois parties: (i) La première partie concerne une dissertation bibliographique sur les théories et les mécanismes du gonflement des argiles. (ii) La seconde concerne une simple analyse thermodynamique du gonflement et la (iii) troisième partie est consacrée à la solution de l'équation de la diffusivité en deux dimension avec la méthode des éléments finis. Un dispositif expérimental a été aussi développé par Mr. Hafsi pour qu'il puisse maître en évidence ses calculs théoriques et la réalité physique .

Theodoros K Karalis

Professeur et Directeur de la division géotechnique
Democritos University of Thrace
Xanthi, Grèce

INTRODUCTION GENERALE

Il est plus que certain que tous les phénomènes physiques dans notre univers obéissent à des lois fixes et bien définies, et que seul notre Dieu Allah le Tout Puissant connaît avec une parfaite exactitude les différentes variables composant ces lois, ainsi que leurs modes d'évolution dans le temps. Cependant, et depuis toujours, l'être humain a voulu mettre cet univers à sa disposition afin de mener une vie pleine de bonheur. Mais, et malheureusement, ceci ne lui est pas tout à fait possible, car la maîtrise de cet univers passe nécessairement par la connaissance plus ou moins parfaite des lois qui le régissent. Devant cette situation, l'intelligence humaine a fourni beaucoup d'efforts en la recherche de ces lois, tantôt en utilisant la démonstration scientifique, et tantôt en se basant carrément sur l'intuition. Le résultat est qu'un très grand nombre de lois ont été déterminées, et dans différentes disciplines de la science (physique, chimie, mécanique, science de la vie, etc.), mais beaucoup d'autres lois restent encore à découvrir, et ceci constitue actuellement un grand défi devant l'intelligence humaine.

Parmi les phénomènes physiques non maîtrisés encore dans le domaine de la mécanique, celui du changement de volume de certains corps, ou milieux soumis à des conditions particulières, notamment celui du Gonflement-Retraît des argiles non saturées, ce phénomène constitue actuellement une des premières préoccupation des mécaniciens de sols, surtout ceux confrontés aux problèmes de fondations de structures en zones semi-arides, arides, et hyper-arides, là, où les sols sont généralement dans un état de non saturation. Ces zones occupent presque le tiers de la surface terrestre.

En Algérie, la zone aride représente près de 95 % du territoire national dont 80 % dans le domaine hyperaride. (Halitim, 1988)

Et du fait que ce problème est posé un peu partout dans le monde, plusieurs tentatives ont été menées depuis longtemps en utilisant différentes approches afin de le maîtriser, mais sa complexité, ainsi que sa propriété d'évolution dans le temps, n'ont pas permis sa maîtrise totale.

Actuellement, et avec la disponibilité des moyens très avancés en calcul numérique, l'approche cohérente d'attaque de ce problème est la " Modélisation ", celle-ci constitue le moyen moderne de recherche des lois des phénomènes complexes. La construction de modèle de simulation, basé sur des hypothèses émanant de l'observation, traduites en équations aux dérivées partielles, suivie d'une analyse théorique, puis numérique, suivie à son tour de la confrontation à l'expérience, est devenue une " Démarche de Base " de résolution de la plupart des problèmes de la physique mathématique.

C'est cette démarche que nous avons prise dans notre présent travail de recherche. Pour ce faire, notre contribution à porté sur l'étude du phénomène physique proprement dit du gonflement des argiles non saturées, la construction d'un modèle théorique de simulation, ainsi que sa validation expérimentale. Ces trois points ont été développés en trois parties :

- La première consiste en l'étude bibliographique des théories et des mécanismes de gonflement des argiles non saturées, elle évoque la théorie de la double couche électrique, les phénomènes d'hydratation des surfaces des particules argileuses, ainsi que la théorie mécanique de Terzaghi. On note que cette partie porte seulement sur une analyse microscopique qui ne met en évidence que l'aspect qualitatif du phénomène.

- La deuxième partie consiste en une analyse macroscopique du phénomène en utilisant une approche thermodynamique simple, ici l'aspect quantitatif est mis en évidence.

- La troisième partie porte sur la construction d'un modèle de simulation, qui décrit à travers une équation aux dérivées partielles le comportement de notre milieu déformable;

La résolution numérique des équations par la méthode des éléments finis couplée à un algorithme implicite élément par élément;

La validation expérimentale du modèle par un dispositif expérimental spécialement conçu.

PREMIERE PARTIE

THEORIES ET MECANISMES DU GONFLEMENT DES ARGILES

INTRODUCTION

Il est bien connu que certains sols gonflent lorsqu'ils sont exposés à une imbibition d'eau et exercent de très fortes pressions en cas de confinement. L'endommagement des structures dû au gonflement du sol de fondation a été constaté à travers le monde.

Les facteurs responsables du gonflement, les méthodes de leurs mesures ainsi que les moyens permettant de les prédire ont été étudiés d'une manière très détaillée par de nombreux chercheurs, et par conséquent, différentes approches et théories ont été développées.

Les minéralogistes attribuent le gonflement des argiles à la présence de minéraux gonflants tels que la montmorillonite ; dans ce cas, le phénomène est provoqué après imbibition d'eau dans les espaces interfeuilletés et interparticules de l'argile par l'hydratation des cations échangeables et des surfaces des particules, suivi par la formation des doubles couches électriques. L'interpénétration des doubles couches provoque le déclenchement du processus osmotique.

Le concept osmotique, basé sur la théorie de la double couche est le plus considéré dans la compréhension du gonflement et dans le calcul des pressions de gonflement.

La théorie de Terzaghi (1931) sur le gonflement se base essentiellement sur des considérations élastiques et néglige toute influence d'effets physico-chimiques sur le phénomène.

Des études expérimentales ont indiqué que la théorie de la double couche, incorporant l'hydratation des particules argileuses et des cations échangeables, doit être combinée avec la théorie de Terzaghi pour pouvoir donner une explication satisfaisante et plausible du processus de gonflement.

L'étude détaillée de ces théories et approches constitue l'objet de cette première partie.

CHAPITRE 1

GONFLEMENT PAR LA THEORIE DE LA DOUBLE COUCHE

1.1. INTRODUCTION

La théorie la plus connue donnant une explication satisfaisante du mécanisme de gonflement à l'échelle microscopique, et dont plusieurs études expérimentales [Mitchell, 1973] ont démontré sa validité, est la théorie de la double couche électrique.

L'existence et la formation de cette double couche est liée principalement à la charge de la particule argileuse qui est généralement négative ; celle-ci lie rigidement sur sa surface une première couche d'ions dite couche fixe. Au delà, les forces de liaison se relâchent et la particule s'entoure d'une atmosphère d'ions dite diffuse, l'ensemble constitue ce qu'on appelle une double couche.

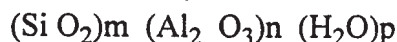
La description théorique de la double couche diffuse a été initialement proposée par Gouy (1910) et Chapman (1913), et plus tard modifiée par Stern (1924). Des développements détaillés de la théorie ont été fournis par Mitchell (1976) et Van Olphen (1977).

Les propriétés de cette double couche diffuse engendrent plusieurs phénomènes et dont l'un est celui des pressions osmotiques qui est à la base du gonflement des argiles.

La bonne compréhension de cette théorie passe nécessairement par la connaissance de la minéralogie des argiles, objet du prochain paragraphe.

1.2. MINERALOGIE DES ARGILES

Les minéraux argileux sont des silicates d'alumine hydratés provenant de la décomposition des feldspaths et des micas, leur formule chimique est de la forme :



Ils sont composés de particules de forme aplatis et de dimensions très petites (inférieure à 2 μm), ceci leur confère une très grande surface spécifique.

Les éléments structuraux sont le tétraèdre de silice et l'octaèdre d'alumine où éventuellement Mg^{2+} peut remplacer Al^{3+} .

Les particules d'argile sont formées d'un empilement de feuillets qui sont constitués par l'association de deux unités structurales de base (Fig. 1.1).

a) Unité tétraédrique :

Elle est formée d'un tétraèdre au sommet duquel quatre ions d'oxygène (O^{2-}) enserrent un ion de silicium (Si^{4+}), équidistant à chacun d'eux. Ces tétraèdres se combinent entre eux pour former une couche. Les ions d'oxygène situés dans le plan de base sont communs à deux tétraèdres.

b) Unité octaédrique :

Elle est formée d'un octaèdre au centre duquel un ion d'aluminium (Al^{3+}) ou de magnésium (Mg^{2+}) est équidistant aux six hydroxydes (OH^-) des sommets.

Ces octaèdres se combinent pour former des couches planes dites couches octaédriques, et la liaison avec la couche tétraédrique se fait au niveau des oxygènes.

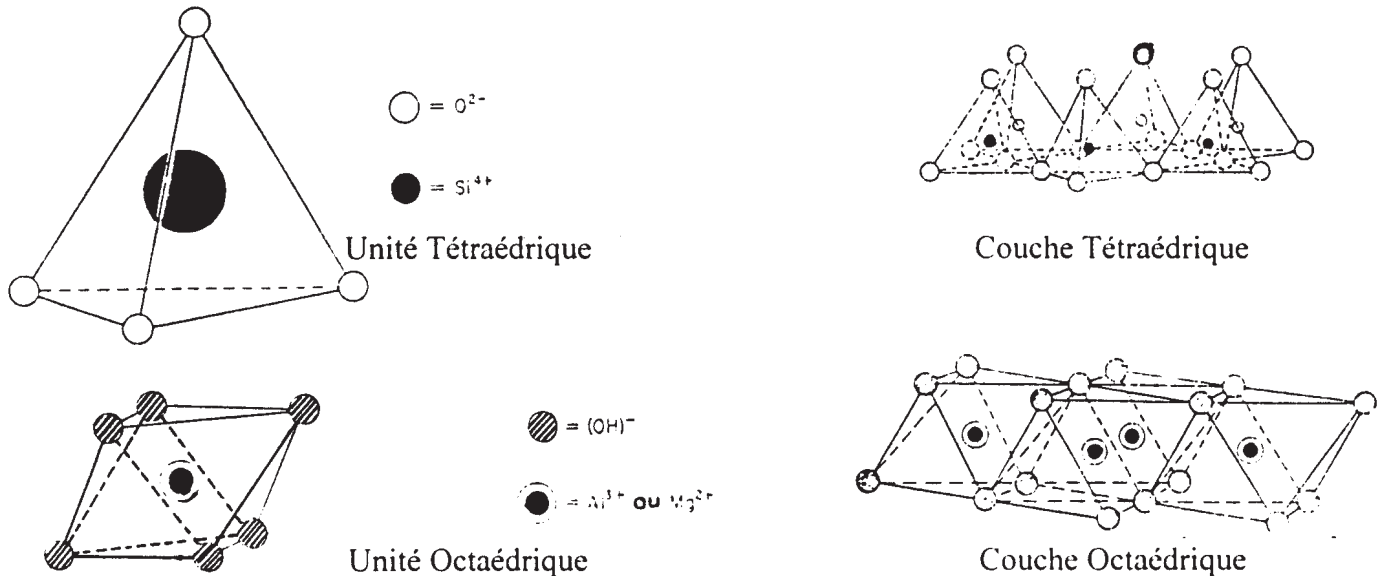


Fig. 1.1: Eléments Structuraux de l'argile

Le feuillet élémentaire d'une argile est constitué de deux ou trois de ces couches suivant le groupe d'argile. La liaison entre feuillets est plus ou moins forte suivant le type d'argile.

Ainsi, si on appelle particule "le plus petit empilement typique de feuillets que l'on peut isoler en laboratoire" (Runacher, 1970). Cela représentera un empilement variable de feuillets :

— A une particule de kaolinite, \varnothing 1 μm et d'épaisseur 0.08 μm , correspondra un nombre de 115 feuillets.

— A une particule d'illite, \varnothing 0.3 μm et d'épaisseur 0.01 μm , correspondra un nombre de 10 feuillets.

— A une particule de montmorillonite, \varnothing 0.1 μm et d'épaisseur 0.01 μm , correspondra un nombre de 8 feuillets.

Précisons à présent les propriétés principales des trois grandes familles (ou groupes) d'argile :

1-2-1 Les Argiles du Groupe de la Kaolinite :

a) Structure de base :

L'espacement de base entre les ions d'oxygène dans l'unité tétraédrique et les ions hydroxydes dans l'unité octaédrique est presque identique, de ce fait les couches tétraédriques et octaédriques peuvent s'associer et former ainsi le feuillet de kaolinite avec formule générale :



Voir figure ci-dessous :

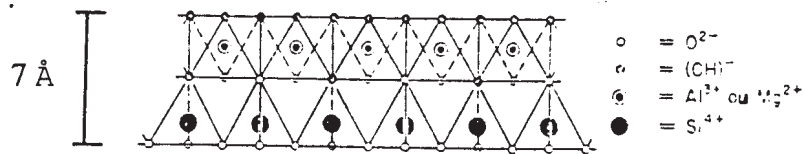


Fig. 1.2 : Structure de la Kaolinite

Notons que l'épaisseur du feuillet élémentaire est d'environ 7 Å mais les dimensions dans les deux autres directions sont indéfinies.

b) Empilement des feuillets :

Lorsque deux feuillets de kaolinite s'associent entre eux, des liaisons de type hydrogène se forment entre les ions d'oxygène (O^{2-}) dans la couche tétraédrique du premier feuillet avec les ions hydroxydes (OH^-) de la couche octaédrique du second feuillet.

Il y a une exacte conformité entre les ions des deux feuillets, ceci conduit à un empilement régulier.

La particule de kaolinite est constituée d'un plus grand nombre de feuillets (souvent 100 ou plus), régulièrement empilés et difficilement dissociable du fait des liaisons fortes.

Le minéraux est donc stable et l'eau ne peut pénétrer entre les feuillets pour provoquer un gonflement (ou un retrait).

La dimension des particules de kaolinite varie sensiblement : leur diamètre équivalent est compris entre 0.04 μm et 10 μm , leur épaisseur entre 100 et 2000 Å.

c) Substitutions isomorphiques et adsorption d'ions :

Souvent les ions de Silicium et d'Aluminium sont remplacés dans le cristal par d'autres ions, ainsi la structure du cristal demeure inchangée pourvue que l'ion de remplacement soit de même valence (Exemple : Al^{3+} remplacé par Fe^{3+}).

Si maintenant le remplacement se fait par un ion de valence inférieure (e.g : Al^{3+} remplace Si^{4+} dans les couches tétraédriques), dans ce cas le cristal est laissé avec une charge négative, alors un nombre équivalent d'ions de charge positive (cations) est attiré à la surface du cristal pour assurer l'équilibre à l'intérieur du réseau cristallin. Ces cations compensateurs (ou échangeables) proviennent de l'eau du sol.

En fait, la kaolinite ne présente que peu de substitutions isomorphiques, de ce fait les minéraux de ce groupe sont donc presque inertes.

L'origine donc des charges négatives à la surface du cristal est principalement provoquée par la dissociation d'ions hydroxydes et la perte d'ions hydrogène en présence d'eau.

1-2-2 Les Argiles du Groupe des Micas (les illites) :

La structure du feuillet est en forme de "Sandwich", composée d'une couche octaédrique comprise entre deux couches tétraédriques (Fig. 1.3).

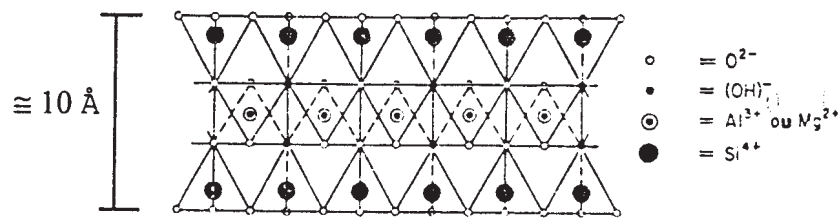


Fig. 1.3 : Structure des Micas

Puisque les ions dans les deux faces du feuillet sont de type oxygène (O^{2-}), aucune liaison de type hydrogène ne s'opère entre les différents feuillets, cependant un ion Si^{4+} sur quatre est remplacé par un ion Al^{3+} , le déficit de valence est comblé par l'adsorption d'ions potassium (K^+) assurant la liaison entre les feuillets, (cas de la muscovite).

Comme les ions de potassium possèdent une forme leur permettant un bon positionnement dans les espaces hexagonales des couches tétraédriques, ils assurent alors une forte liaison entre les feuillets. (Fig. 1.4).

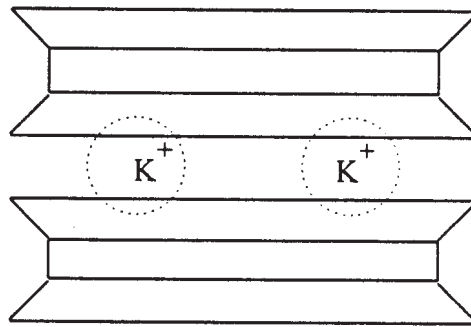


Fig . 1.4 : Liaisons dans les Micas

Pour la famille des illites, la substitution au niveau de la couche tétraédrique est moins importante moins d'un Si^{4+} sur quatre est remplacé par un Al^{3+} . La liaison entre les feuillets sera donc moins importante que dans le cas de la muscovite. Aussi les propriétés des illites seront différentes.

Les illites sont des particules de dimension plus petites que la kaolinite de diamètre équivalent moyen de 0,3 μm , et d'une épaisseur de 100 Å.

1 -2- 3 Les Argiles du Groupe des Smectites :

Ce sont des argiles du même type que les micas (une couche octaédrique entre deux couches tétraédriques), mais les liaisons entre feuillets sont plus faibles.

Les substitutions isomorphiques sont principalement localisées en couches octaédriques.

Les smectites possèdent ainsi des propriétés de gonflement qui se produit surtout en présence d'eau et peut provoquer la dissociation complète des feuillets.

Les smectites (par exemple la montmorillonite) se caractérisent par l'existence entre deux feuillets d'un certain nombre de couches d'eau contenant des cations échangeables (libres) généralement des cations sodiques et calciques, ce qui entraîne un écartement des feuillets variables suivant les conditions du milieu (Fig. 1.5).

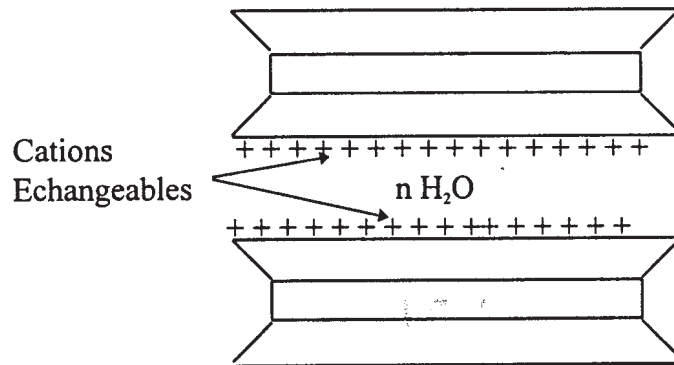
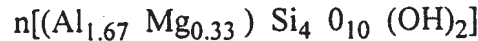


Fig. 1.5: Structure de la Montmorillonite

Dans la montmorillonite, il y a un remplacement partiel de l'aluminium des octaèdres par du magnésium (presque un sur six), le déficit de charge est compensé par des cations généralement Na^+ ou Ca^{2+} situés entre les feuillets et qui sont échangeables (ou compensateurs), ainsi la montmorillonite peut se présenter par la formule suivante :



Les feuillets sont empilés l'un sur l'autre comme les feuilles d'un livre, et les liaisons sont assurées par les attractions mutuelles des cations échangeables plus les faibles forces de Van Der Waals, aussi ces liaisons sont plus ou moins fortes suivant la nature des cations échangeables, ce qui explique la différence de comportement entre différentes argiles.

Un sol contenant un pourcentage élevé de montmorillonite est susceptible de gonfler provoquant ainsi l'endommagement des fondations superficielles et des structures.

1.3. CAPACITE D'ECHANGE CATIONIQUE

Il est évident que les liaisons entre les particules de sols formant le minéraux argileux sont largement influencées par la magnitude de la charge négative résiduelle des minéraux (due aux substitutions isomorphiques dans le réseau cristallin), du type, de la concentration et de la distribution des cations disponibles pour équilibrer cette charge.

La capacité d'échange représente donc la charge (sous forme de cations attirés à la surface de la particule argileuse) nécessaire pour arriver à l'électroneutralité.

La capacité d'échange s'exprime en général en milli-équivalents par 100 g (meq/100 g), sa détermination doit se faire dans des conditions bien déterminées.

Plusieurs expérimentations avec la montmorillonite (Van Olphen, 1951) et avec la kaolinite (Schofield et Samson, 1954 ; Laudelout, 1957) ont indiqué que la capacité d'échange varie en fonction du pH (acidité relative) de l'eau du sol.

Pour une valeur du pH égale à 7 (solution neutre), la capacité d'échange relative à différentes familles d'argile est approximativement la suivante :

<u>Groupe d'argile</u>	<u>Capacité d'échange (meq/100g)</u>
Kaolinites	3 à 8
Illites	$\cong 40$
Montmorillonite	$\cong 80$

Pour une valeur du pH inférieur à 7 (solution acide), plusieurs sites à charge positive se forment par l'adsorption d'ions hydrogène (H^+) dans les bords exposés de la couche octaédrique des feuillets, ceci conduit non seulement à une réduction dans la capacité d'échange mais rend aussi le minéral (particule) bipolaire, c'est à dire ces faces étant chargées négativement due aux substitutions isomorphiques dans le réseau cristallin tandis que les bords seront chargés positivement du fait de l'adsorption des ions hydrogènes (H^+).

L'effet de la bipolarité est relativement plus important pour les kaolins car les densités de charge sur les faces et sur les bords de la particule sont du même ordre de grandeur. Tandis que pour la montmorillonite la densité de charge sur les bords représente moins de 5 % que celle des faces.

Suivant donc la nature de l'argile, l'effet de la bipolarité a une importante influence dans l'orientation des particules et sur les forces de liaisons interparticulaires, puisque les bords positifs seront attirés vers les faces négatives.

Maintenant, pour une valeur du pH supérieur à 7 (solution alcaline), les ions hydrogène (H^+) vont se dissocier des hydroxydes (OH^-) dans les couches octaédriques, conduisent ainsi à une charge négative sur les bords d'où une croissance de la capacité d'échange.

1.4. FORMATION DE LA DOUBLE COUCHE

Les particules argileuses en suspension dans des solutions aqueuses présentent une charge superficielle qui est dans les conditions naturelles globalement négative, les particules vont donc s'entourer d'un certain nombre d'ions de signe opposé, se répartissant selon une double couche de manière à respecter l'électroneutralité du système.

Précisons ceci en détail :

Sachant que les ions sur les couches de surface des particules sont des O^{2-} ou des (OH^-), l'eau est retenue contre cette surface par des liaisons hydrogène et des moments dipolaires (adsorption), l'arrangement exacte de l'eau retenue est disputé mais il est certain que les molécules contre cette surface sont fortement retenues, et d'une manière parfaitement régulière. Plus loin de la surface, les liaisons deviennent faibles, l'arrangement moins régulier, et l'eau de plus en plus fluide.

De plus, on note la présence des cations, lesquels sont attirés tout en portant avec eux leur propre molécule d'eau (cations hydratés).

Ces ions sont attirés vers la face du cristal (particule), pour une partie à cause de la charge négative de la surface (résultant des substitutions isomorphiques), mais aussi parce que les surfaces des couches du cristal sont formées par les ions négatifs O^{2-} ou des $(OH)^-$.

La couche positivement ionisée possède sa grande concentration, près de la surface (première couche fixe), mais elle décroît presque exponentiellement en s'éloignant de la surface (Fig. 1.6).

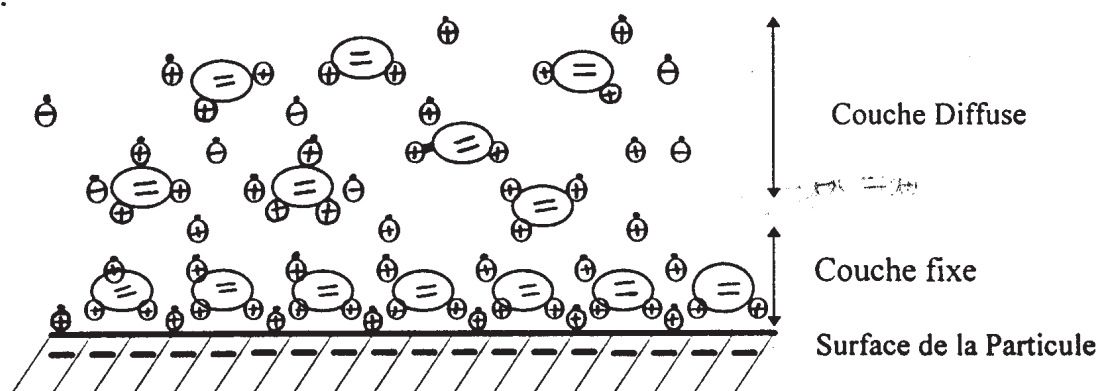


Fig. 1.6: Adsorption des Cations et des molécules d'eau à la surface de la particule

De plus, les cations hydratés vont soit relever le degré d'arrangement au niveau de la surface de la particule ou produire des ruptures au niveau de cet arrangement, ceci dépend de la perfection de leur propre géométrie.

Au-delà de la première couche fixe les forces de liaison se relâchent et la particule s'entoure d'une atmosphère d'ions dite diffuse (deuxième couche). L'ensemble constitue ce qu'on appelle la double couche. Donnons à présent une description simple de la double couche.

La première couche comprend :

- La particule argileuse (charge négative en surface).
- Couche mince de cations (couche de stern).
- Des molécules d'eau.

Notons que la couche mince de cations ainsi que les molécules d'eau sont fortement retenues contre la surface, formant ainsi une couche adsorbée possédant encore une charge globale négative.

La deuxième couche comprend :

- Couche diffuse de contre-ions (cations hydratés et anions).
- Des molécules d'eau.

Cette deuxième couche possède une charge globale positive.

D'autre part l'épaisseur de la double couche dépend de deux facteurs :

a) *La concentration en ions de l'eau du sol :*

Une augmentation de la concentration implique une augmentation du nombre de cations sur la surface, et donc réduit l'épaisseur de la couche devant neutraliser les ions négatifs à la face du cristal.

b) *Le type de cation dans la couche :*

Des cations monovalent (e.g. Na^+) conduisent à une épaisseur plus grande que les cations divalent (e.g. Ca^{2+}), puisque pour neutraliser deux charges négatives il faut un cation divalent mais deux cations monovalents.

De plus, le cation sodium hydraté possède un plus grand diamètre.

1.5. LES FORCES DE LIAISON INTERPARTICULAIRES

Deux types de force sont à considérer lors de l'interaction de deux particules argileuses, les forces répulsives et les forces d'attraction, leur influence s'exerce sur des rayons d'action plus ou moins long selon leur origines.

Dans cette partie nous aborderons en détail les forces (de répulsion et d'attraction) à long rayon d'action, puisque seul ce type de force sera pris en considération pour la suite de l'étude (théorie de Gouy et Chapman), néanmoins on donnera une simple définition des forces à faible rayon d'action.

1.5.1. Forces de Répulsion :

a) *Forces à long rayon d'action ($> 20 \text{ \AA}$) :*

Ces forces de répulsion sont dues à la présence de la double couche autour des particules, donc deux particules d'un sol argileux que l'on rapproche l'une de l'autre vont se repousser car les extrémités des doubles couches associées à ces particules ont la même charge électrique nette (généralement positive), le rayon d'action et l'efficacité des forces de répulsion entre les particules sont contrôlés par l'épaisseur des doubles couches, qui est en général de l'ordre de 30 à 500 \AA .

Par le biais de la pression osmotique (Runacher, 1970), rend compte de l'interaction des doubles couches.

La pression de répulsion peut se mettre sous la forme (pour deux plaques parallèles et infinies) :

$$P = P_1 - P_2 = (2 \sigma^2 / \epsilon) e^{-2kd} \quad (\text{Cittonnova, 1970})$$

Avec :

P_1 = Pression de répulsion dans le plan équidistant aux deux plaques.

P_2 = Pression hydrostatique dans le liquide éloigné des particules.

σ = Charge de la particule.

ϵ = Constante diélectrique du milieu liquide.

$2d$ = Distance entre les particules.

$1/k$ = Epaisseur de la double couche.

Van't Hoff donne une équation similaire pour cette pression :

$$P = P_m - P_o = KT \sum (N_{im} - N_{io})$$

Avec :

P_m : Pression dans le plan à mi-distance des deux particules.

P_o : pression dans la solution extérieure loin de la particule.

N_{io} : Concentration ionique dans la solution extérieure loin de la particule.

N_{im} : Concentration ionique à mi-distance entre les particules.

K : Constante de Boltzman.

T : Température absolue.

b) *Forces à faible rayon d'action* ($< 20 \text{ \AA}$) :

- Répulsion de Born (Rayon d'action 1 à 2 \AA) :

Si deux particules déjà très proches l'une de l'autre sont pressées l'une contre l'autre par des forces nouvelles, une réaction appelée répulsion de Born se développe, réaction qui empêche l'interpénétration de la matière.

- Répulsion osmotique (rayon d'action 10 à 20 \AA) :

On considère généralement que 30 \AA représente la distance minimale exigée pour le développement complet de la double couche.

Pour des distances interparticulaires de 10 à 20 \AA , se développe une pression osmotique.

L'estimation de cette pression de répulsion reste encore difficile.

- Hydratation de la surface des particules par des molécules d'eau :

L'hydratation de surface peut résulter de liaisons hydrogènes, de forces de Van Der Waals et d'attractions électrostatiques entre les particules d'argiles et les molécules d'eau. Ladd (1961) estime que des pressions de l'ordre de 5×10^8 à 6×10^8 Pascals seraient nécessaires pour éliminer les dernières couches d'eau adsorbées entre les particules parallèles d'une argile humide, il existe donc des forces de répulsion dues à l'existence de ces pressions hydrostatiques élevées dans le milieu liquide séparant les particules.

- Hydratation des ions :

La répulsion de particules très proches l'une de l'autre pourrait être associée aussi aux énergies d'hydratation des ions qui se trouvent dans la région de contact, cependant ce phénomène est encore mal connu.

- Orientation des molécules d'eau dans un champ électrique :

Si nous considérons le champ électrique entre le bord positif et la face négative de deux particules, la pression de répulsion entre ces particules due à l'orientation des molécules d'eau dans cette zone a été évaluée par Ladd (1961).

La pression de répulsion est de la forme :

$$P = b E^2 / V_0$$

Avec :

b : une fonction de la température du liquide.

E : champ électrique.

V_0 : volume molaire partiel du liquide interstitiel.

1.5.2. Forces d'Attraction :

a) Force à long rayon d'action ($> 20 \text{ \AA}$) :

Les forces d'attraction sont constituées par les forces de Van Der Waals ou liaisons moléculaires.

Elles sont causées par le champ généré par la rotation des électrons entourant le noyau atomique, de telles forces sont considérables à des distances du même ordre que la taille de l'atome.

Ces forces agissant entre deux molécules sont dues à la présence de moments électriques dans ces molécules.

Si dans un système électrique, le centre d'action des charges positives coïncide avec le centre d'action des charges négatives, le système n'a pas de moment dipolaire. Par exemple, la Fig. 1.7a n'a pas de moment dipolaire et est appelée système non polaire.

Par contre, le système de la Fig. 1.7b a un moment dipolaire égale à d :

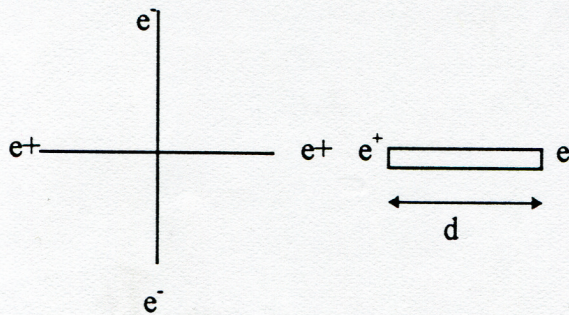


Fig. 1.7a : Système Non Polaire .

Fig. 1. 7b : Système Polaire.
(Dipôle)

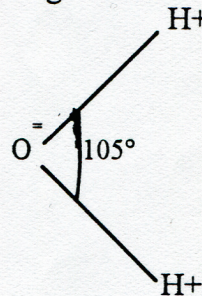


Fig. 1.7c : Molécule d'Eau
(Polaire)

Il y a trois effets qui contribuent aux forces de Van Der Waals, ce sont :

- Effet d'orientation :

Il consiste en une attraction entre les bords de dipôles permanents portant des charges opposées comme le montre la figure suivante :

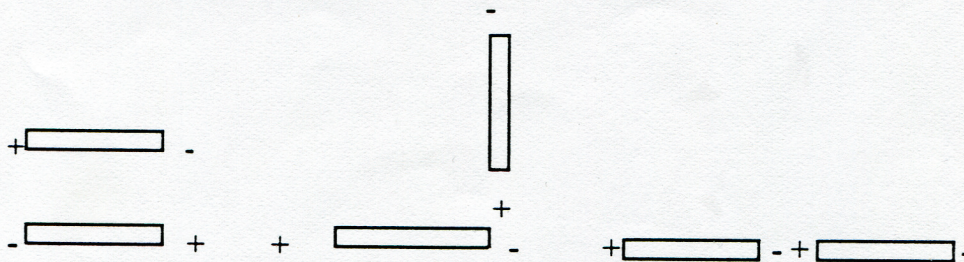


Fig. 1.8 : Possibilités d'Orientation de Dipôles.

Etant donné que l'agitation thermique a tendance à détruire l'alignement des dipôles, l'effet d'orientation dépend de la température.

- Effet d'induction :

Beaucoup de molécules non polaires deviennent polaires lorsqu'elles sont placées dans un champ électrique, car le champ a pour effet de déplacer légèrement les électrons et les noyaux, puisque le mouvement est induit, ce phénomène est appelé effet d'induction. Il est peu dépendant de la température.

- Effet de dispersion :

Etant donné que tous les électrons vibrent constamment, il se produit dans les molécules des déplacements relatifs entre les électrons et les noyaux. Ces déplacements entraînent la formation de dipôles temporaires qui rendent possible les forces attractives intermoléculaires, l'effet de dispersion est commun à toutes les molécules et est indépendant de la température.

Des trois effets composant les forces de Van Der Waals, seul l'effet de dispersion est généralement pris en considération.

La relation théorique donnant la pression d'attraction P_a entre deux plaques infinies parallèles séparées d'une distance de $2d$ est :

$$P_a = A' / 48 \pi [1/d^3 + 1/(d+\delta)^3 - 2/(d+0,5\delta)^3] \quad (\text{Van Olphen, 1963})$$

Avec : δ = épaisseur d'une plaque (particule)

A' = constante donnée .

b) Forces à faible rayon d'action :

- Forces de Van Der Waals :

Les forces de Van Der Waals agissent même à des distances interparticulaires inférieures à 20 Å .

- Forces de Coulomb :

Il y a attraction électrostatique entre la face négativement chargée et le bord positivement chargé de deux particules d'argiles (cas des argiles type Kaolinite).

- Liaisons chimiques primaires :

Ce sont ces forces d'attraction entre atomes qui conduisent à la formation des molécules (liaisons ioniques entre atomes).

- Attraction cationique de structure :

Les cations situés entre les faces d'une particule argileuse peuvent former un réseau cristallin rectangulaire, cette attraction n'agit qu'entre des particules parallèles et à des espacements inférieurs à 10 Å.

1.5.3. Interaction des Forces entre Deux Particules Parallèles :

Pour une faible distance entre particules, les forces de Van Der Waals sont toujours les plus grandes, cependant elles décroissent lorsque la distance interparticulaire augmente.

Si maintenant, on est en présence d'une double couche épaisse, les forces de répulsion (dues à la présence de la double couche) sont supérieures aux forces de Van Der Waals à une même distance de la surface de la particule, il y a donc une nette force de répulsion interparticulaire.

D'autre part, pour une faible épaisseur de la double couche, les forces de répulsion sont pratiquement nulles à n'importe quelle distance interparticulaire.

On remarque de ce qui précède que le mécanisme d'interaction des forces interparticulaires dépend de la distance entre particules et de l'épaisseur de la double couche ; donc de la concentration ionique de l'eau du sol.

Dans le graphe suivant, on donne la variation des forces d'attraction et de répulsion en fonction de la distance interparticulaire et de la concentration ionique du milieu liquide (eau du sol).

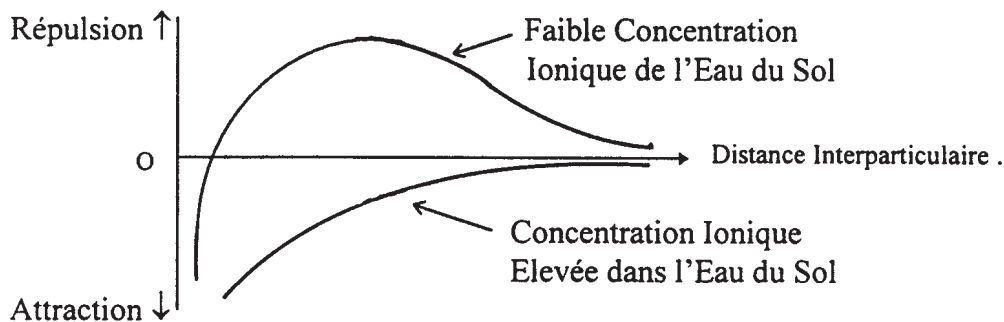


Fig.1.9 : Force entre deux Particules en Suspension.

Bailey (1965) et Mitchell (1976) ont indiqué que dans la plupart des cas la force la plus dominante est celle due à la répulsion des doubles couches.

1-6 THEORIE DE GOUY ET CHAPMAN

Il a été indiqué précédemment que les faces des minéraux argileux (particules) ont une nette charge négative due principalement à la dissociation d'ions hydroxydes (kaolins) et aux substitutions isomorphiques dans le réseau cristallin (illites et montmorillonites).

Par contre les bords des minéraux argileux possèdent soit une charge positive (adsorption d'ions hydrogènes pour les solutions acides) ou une charge négative (dissociation d'ions hydroxydes des bords de la couche octaédrique pour les solutions alcalines).

Les déficits de charges sont compensés par l'attraction de cations (et anions) de l'eau entourant la particule.

Ainsi, le champ de force qui se développe entre les particules chargées du minéraux, l'eau entourant la particule et les ions associés ont une très grande influence sur les propriétés du sol.

Les propriétés peuvent subir de très grandes variations en fonction des changements qui peuvent s'opérer au niveau des ions et de leur concentration, de la température, et de la nature et la quantité de l'eau interstitielle.

Pour ces raisons, et parce que les effets de chacun des facteurs ne peuvent être isolé expérimentalement la théorie se rapportant à ces facteurs et leur variations ainsi qu'à la résultante du champ de force est d'une très grande importance.

Une telle théorie a été développée par Gouy (1910) et Chapman (1913) et est généralement connue sous le nom de la théorie de Gouy-Chapman.

Puisque cette théorie est largement utilisée pour expliquer les phénomènes dans le sol (compressibilité-gonflement), il paraît indispensable de discuter les bases de sa démonstration.

La démonstration suivante a été faite par Low (1959) : d'après Leonards(1962)

1.6.1. Equation Fondamentale de la Théorie :

a) Expression du potentiel électrique :

Soit : q = l'unité de charge électrostatique.

Q = une charge électrostatique.

Alors, la force agissante entre les charges est :

$$F = \frac{Qq}{Dr^2} \quad (\text{Loi de Coulomb}) \quad (1)$$

où : r = distance entre les charges.

D = constante diélectrique du milieu (égale à 1 dans le vide).

L'intensité du champ électrique E , en un point est la force agissant par unité de charge électrostatique en ce point, ainsi l'intensité du champ à une distance r de la charge Q est donnée par l'Eq. 1.

$$E = \frac{F}{q} = \frac{Q}{Dr^2} \quad (2)$$

L'utile convention est de représenter la valeur numérique de l'intensité du champ par le même nombre de ligne de force traversant perpendiculairement une surface de 1 cm^2 dans le vide.

A partir de l'équation (2), la valeur de l'intensité du champ dans le vide est égale à Q/r^2 , et pour un autre milieu elle est égale à $E.D$.

Ainsi, le flux électrique est le nombre de lignes de force par centimètre carrée est égale :

$$ED = \frac{Q}{r^2} \quad (3)$$

Le nombre total de lignes de force émanant à partir de la charge Q est égale au flux électrique fois la surface.

Considérons la charge Q comme un point, la surface de la sphère de rayon r à partir de Q est $4\pi r^2$.

A partir de l'équation (3), le nombre de ligne de force par unité de surface est égale à Q/r^2 donc le nombre total de lignes émanant de la charge Q est égal à :

$$\frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi Q \quad (4)$$

Ainsi 4π lignes de force émanent d'une unité de charge électrostatiques.

Le potentiel électrique ϕ en un point est le travail effectué en transportant une charge électrostatique unité de l'infini jusqu'à ce point. Comme le travail est égal à la force fois la distance, le taux de variation du travail avec la distance en un point est égale à la force en ce point.

Donc (par analogie), le taux de variation du potentiel ϕ avec la distance est égal à l'intensité du champ E.

Pour un champ de force unidirectionnel, on a :

$$-\frac{d\phi}{dx} = E \quad (5)$$

(Le signe négatif résulte du fait que le potentiel décroît avec la distance).

Considérons la particule de sol par sa forme aplatie (Fig.1.10) ayant une distribution uniforme de la charge de surface, si la partie plate est grande par rapport à la surface considérée par le flux, alors un champ de force unidirectionnel doit être considéré comme émanant de la partie plate.

Le parallélépipède de surface unité et de longueur dx (épaisseur) donc de volume dx contient des cations échangeables dont ils sont considérés comme des charges ponctuelles .

Si ρ est la densité de charge (charge par unité de volume). La charge totale dans le parallélépipède est égale à ρdx , et comme la charge unité émane 4π lignes de force (Eq. (4)), la différence entre le nombre de lignes de force qui entre et qui quitte le parallélépipède est égale à $4\pi \rho dx$.

Cette différence dans le nombre de lignes de force est égale à la variation de l'intensité du champ (E) fois la constante diélectrique [Eq. 3 et 4], la variation de l'intensité du champ sur une distance dx est égale au taux de variation de l'intensité du champ avec la distance correspondante x fois dx, c'est à dire :

$$\frac{dE}{dx} \cdot dx = \text{variation de l'intensité du champ.}$$

donc

$$D \cdot \frac{dE}{dx} \cdot dx = 4 \pi \rho dx$$

d'où

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi\rho}{D} \quad (6)$$

De l'équation (5), on tire :

$$\frac{dE}{dx} = - \frac{d^2\phi}{dx^2} \quad (7)$$

En combinant les équations (6) et (7) on obtient :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = - \frac{4\pi\rho}{D} \quad (8)$$

L'équation (8) est connue sous le nom de l'équation de poisson.

Il est utile à cette étape de rappeler les différentes hypothèses de la théorie :

- 1- Les particules sont supposées être des plans infinis.
- 2- La charge électrique nette se trouve répartie en surface et sa répartition est uniforme, se qui permet de définir une densité de charge superficielle σ caractéristique d'un type de minéral et invariante quelle que soit la nature de la solution.
- 3- La constante diélectrique D de la phase liquide a une valeur constante.
- 4- Les ions compensateurs (ou échangeables) se comportent comme des charges ponctuelles.

distribution uniforme de la charge de surface

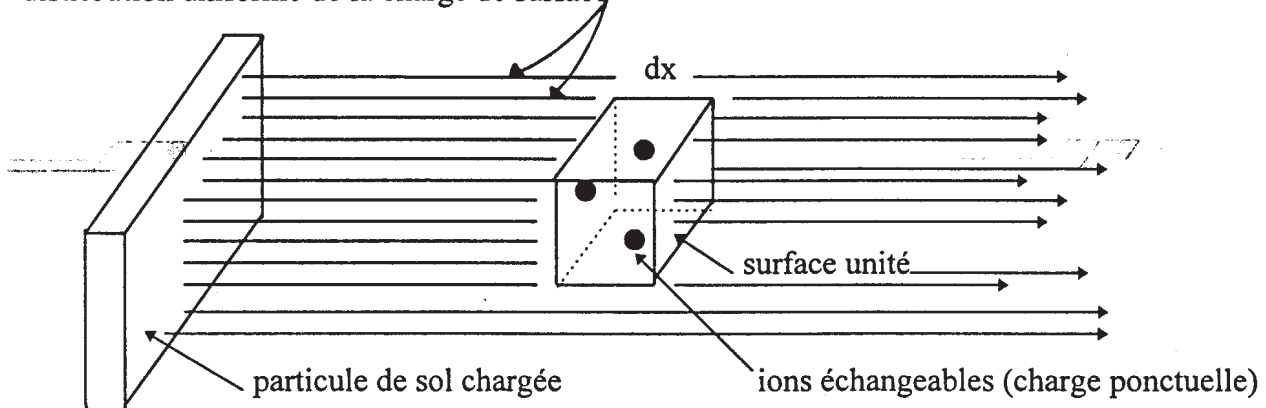


Fig. 1.10: Hypothèses de l'équation de poisson

L'équation de Poisson représente la première équation fondamentale dans la théorie de la double couche (théorie de Gouy et Chapman), définissant en chaque point de l'espace interparticulaire le potentiel électrique φ .

b) Expression des concentrations ioniques :

La distribution de n'importe quelle espèce de particule (ions, molécule... etc) dans un champ de force est telle que la probabilité de cette distribution soit maximum, pour un grand nombre de particule, la distribution est donnée par l'équation de Boltzman :

$$\frac{n_i}{n_o} = \exp \frac{EP_o - EP_i}{KT} \quad (9)$$

Avec :

n_i = concentration de l'ion i en un point de potentiel φ .

n_o = concentration de l'ion i en un point de la solution non influencée par la présence de particule ($\varphi = 0$), (concentration initiale).

EP_i = Energie potentiel de l'ion i en un point de potentiel φ .

EP_o = Energie potentiel de l'ion i en un point de la solution non influencé par la présence de particule ($\varphi = 0$).

T = température absolue.

K = constante de Boltzman.

Quand l'équation (9) est appliquée au champ de forces de particules et leur ions échangeable associés schématisés dans la figure 1.10, EP_o est prise à partir d'une distance infinie de la particule et on lui attribue la valeur zéro, si ε est la charge électrique de l'ion et Z_i sa valence, alors la charge totale de l'ion est $Z_i \varepsilon$.

Comme le potentiel électrique φ est l'énergie exigée pour déplacer la charge unité jusqu'au point i, alors $EP_i = Z_i \varepsilon \varphi$.

Donc l'équation (9) devient :

$$\frac{n_i}{n_o} = \exp \frac{-Z_i \varepsilon \varphi}{KT} \Rightarrow n_i = n_o \exp \frac{-Z_i \varepsilon \varphi}{KT} \quad (10)$$

c) Equation différentielle de base :

La densité de charge pour un ion i est ρ_i , elle est égale à la charge de l'ion fois le nombre d'ion par unité de volume (ou concentration n_i) .

Ainsi :

$$\rho_i = Z_i \varepsilon n_i \quad (11)$$

La densité de charge totale ρ est égale à la somme des densités de charge ρ_i .

Alors :

$$\rho = \sum \rho_i = \epsilon \sum Z_i n_i \quad (12)$$

Substituant l'équation (12) dans l'équation (8) et utilisant la valeur de n_i donnée par l'équation (10). On aura :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{4\pi\epsilon}{D} \sum Z_i n_o \exp \frac{-Z_i \epsilon \phi}{KT} \quad (13)$$

L'équation (13) est l'équation différentielle de base de la théorie de Gouy - Chapman .

La détermination du potentiel ϕ , de la concentration ionique n_i , en un point est obtenue par une double intégration en considérant le cas d'une solution électrolytique "symétrique" c'est à dire renfermant des ions de même valence.

d) Application de l'équation différentielle :

Nous présentons les principaux résultats que l'on peut obtenir à partir des équations fondamentales .

— Détermination du potentiel électrique en fonction de la distance à la particule :

De l'équation (13), on peut en déduire :

$$\frac{d\phi}{dx} = \left(\frac{8\pi n_o KT}{D} \right)^{1/2} \left[\exp \left(\frac{-Z_i \epsilon \phi}{2KT} \right) - \exp \left(\frac{Z_i \epsilon \phi}{2KT} \right) \right]$$

Avec aux conditions limites :

pour $x \longrightarrow \infty$
on a $\phi \longrightarrow 0$ et $\frac{d\phi}{dx} \longrightarrow 0$
(très loin de la particule)

et à $x = 0$

$\phi = \phi_o$ = potentiel de surface (à la surface de la particule)

Finalement on obtient :

$$\exp \left(\frac{Z_i \epsilon \phi}{2KT} \right) = \frac{\exp \left(\frac{Z_i \epsilon \phi_o}{2KT} \right) + 1 + \left(\exp \frac{Z_i \epsilon \phi_o}{2KT} - 1 \right) \exp(-Rx)}{\exp \left(\frac{Z_i \epsilon \phi_o}{2KT} \right) + 1 - \left(\exp \frac{Z_i \epsilon \phi_o}{2KT} - 1 \right) \exp(-Rx)}$$

Où, $R = \left(\frac{8\pi n_0 \varepsilon^2 Z_i^2}{DKT} \right)^{1/2} = \text{Constante de Debye-Huckel}$

Dans le cas où $\frac{Z_i \varepsilon \phi}{KT} \ll 1$

Cette équation peut se simplifier et admettre pour solution :

$$\phi = \phi_0 \exp(-Rx)$$

Cette simplification est très fréquente dans les applications pratiques de la théorie de la double couche. Elle conduit à des formules relativement simples et à des valeurs numériques qui peuvent donner l'ordre de grandeur de certains paramètres.

Cette approximation n'est satisfaite que dans le cas où :

$$\phi \ll \frac{KT}{Z_i \varepsilon}$$

Soit pour $T = 300^\circ$ absolus

$$KT = 4 \cdot 10^{-14}$$

$$\varepsilon = 4.8 \cdot 10^{-10} \text{ U.E.S (charge d'électron)}$$

En présence de l'électrolyte monovalent :

$$Z_i = 1 : \phi < 8.33 \cdot 10^{-5} \text{ soit } \phi < 25 \text{ mV}$$

En présence de l'électrolyte bivalent :

$$Z_i = 2 : \phi < 4.16 \cdot 10^{-5} \text{ soit } \phi < 12,5 \text{ mV}$$

— Evolution du potentiel électrique :

* En fonction de la distance : le potentiel décroît exponentiellement en fonction de la distance.

Dans le cas de l'interaction entre deux particules parallèles, les doubles couches s'interpénètrent, on obtient ainsi une courbe de potentiel en fonction de la distance qui présente un minimum à l'abscisse de la demi-distance séparant les deux plans (face des particules).

* En fonction de la concentration en électrolyte (C) : La diminution du potentiel est plus rapide lorsque la concentration en électrolyte s'accroît.

* En fonction de valence de l'électrolyte : La diminution du potentiel est plus rapide lorsque la valence de l'électrolyte augmente.

* En fonction de la constante diélectrique du milieu liquide : Plus la constante diélectrique est faible plus le potentiel décroît rapidement.

* En fonction de la température : Plus la température est faible plus le potentiel décroît rapidement.

— Evolution des concentrations ioniques à l'interface solide-liquide :

L'allure générale de la distribution ionique à l'interface est la suivante :

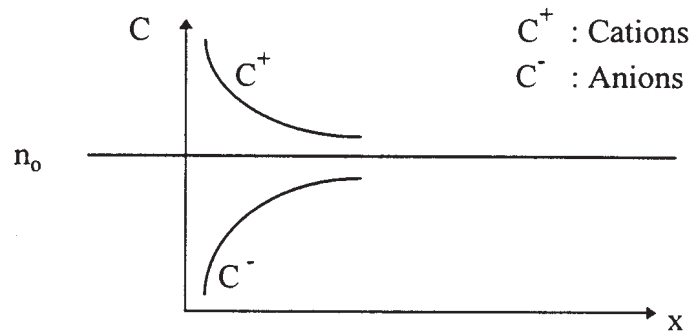


Fig. 1.11 : Distribution Ionique à l'Interface .

Ainsi, la charge négative des particules d'argiles en suspension conduit à un déficit dans la concentration anionique près de la surface des particules en comparaison à la concentration dans le liquide interparticulaire.

D'autre part ce déficit relatif est d'autant plus important que la concentration en électrolyte est faible, alors que la concentration cationique s'accroît jusqu'à la même valeur.

L'adsorption négative des anions étant faible devant l'adsorption positive des cations la charge des particules peut être évaluée par une simple mesure de la capacité d'échange de cation, dans la mesure où on peut considérer la répartition des charges de ces particules uniforme.

— Définition d'une épaisseur théorique de la double couche :

L'équation $\varphi = \varphi_0 \exp(-Rx)$ permet de définir une valeur χ de l'épaisseur de la double couche telle qu'à cette distance le potentiel électrique φ est égal à φ_0/e

e = base logarithme népérien $\approx 2,72$

$$\Rightarrow Rx = 1 \text{ et } x = 1/R$$

on pose $1/R = \chi$ = épaisseur de la double couche.

Remarquons que cette définition est purement conventionnelle.

L'épaisseur de la double couche est donnée par :

$$\frac{1}{R} = \left(\frac{DKT}{8\pi\epsilon^2 Z_i^2 n_0} \right)^{1/2}$$

Elle varie donc suivant les conditions du milieu :

On a une diminution :

- Lorsque la concentration ionique du milieu s'accroît.
- Lorsque la valence de l'électrolyte du milieu s'accroît.
- Lorsque la température du milieu diminue.
- Lorsque la constante diélectrique du milieu diminue.

L'épaisseur de la double couche est fonction de la force ionique du milieu.

Dans les conditions normales ($t=20^{\circ}\text{C}$ et $D=80$).

On obtient pour quelques solutions les épaisseurs suivantes :

<u>Solutions</u>	<u>Epaisseur de la double couche $1/R$ (Å)</u>	
Eau distillée	9000	($\approx 1\mu$)
10^{-4} M NaCl	310	
10^{-4} M Mg_2SO_4	150	
Eau de mer	4	

Remarques :

On a vu que l'intensité des forces de répulsion entre les particules était fonction de l'épaisseur de la double couche.

De ce fait, plus la double couche sera comprimée (plus $1/R$ est faible), plus l'agglomération des particules sera importante.

L'agglomération des particules se fait en général par des associations face-face (cas des smectites), ce cas ne s'applique cependant pas aux kaolinites qui présentent des faces basales et des faces de bordures de charge contraires, elles se caractérisent alors par des associations bord-face, ceci explique les différences de comportement de la kaolinite par rapport aux smectites.

1-7 GONFLEMENT A PARTIR DE LA THEORIE DE LA DOUBLE COUCHE

Après avoir étudié la structure minéralogique des argiles, ainsi que les propriétés spécifiques pour chacune des principales familles (kaolinites, smectites, illites), et d'avoir donné une description détaillée sur la théorie de la double couches initiée par Gouy et Chapman, il est possible à présent de relier le phénomène de gonflement de certaines argiles (montmorillonite) aux propriétés des doubles couches électriques et ceci par le biais du phénomène d'osmose.

Ce phénomène physico-chimique engendre des pressions osmotiques répulsives importantes entre les particules et entre les feuillets d'argile, conduisant ainsi à une augmentation du volumes de l'argile.

L'étude de ce phénomène ainsi que les équations le régissant fera l'objet de cette partie.

1.7.1. Phénomène d'Osmose :

L'osmose est le terme utilisé pour décrire le phénomène pour lequel un solvant (eau) passe d'une solution de faible concentration en solute à travers une membrane semi-perméable dans une solution à forte concentration en solute, la membrane est décrite comme semi-perméable car elle permet le passage du solvant mais pas du solute.

Si le courant d'eau (solvant) s'est stabilisé une pression d'équilibre égale à la différence des pressions osmotiques entre les deux solutions doit être présente.

La pression osmotique peut être déterminée à partir des principes thermodynamiques (Robinson et Stokes, 1968), comme elle peut être approximée par l'équation de Van't Hoff (Metten, 1966) :

$$P = RTC$$

avec :

P = Pression osmotique (kpa).

R = Constante universelle des gaz = 8,32(L.kpa/k mol)

T = Température absolue (K).

C = Somme des concentrations molaires dans la solution (mol/L) .

1.7.2. Interaction des Doubles Couches et Pression d'Osmose :

Soit, deux particules d'argile immergées dans l'eau et poussées l'une vers l'autre jusqu'à une distance $2d$ par une contrainte effective σ' . (Fig. 1.12).

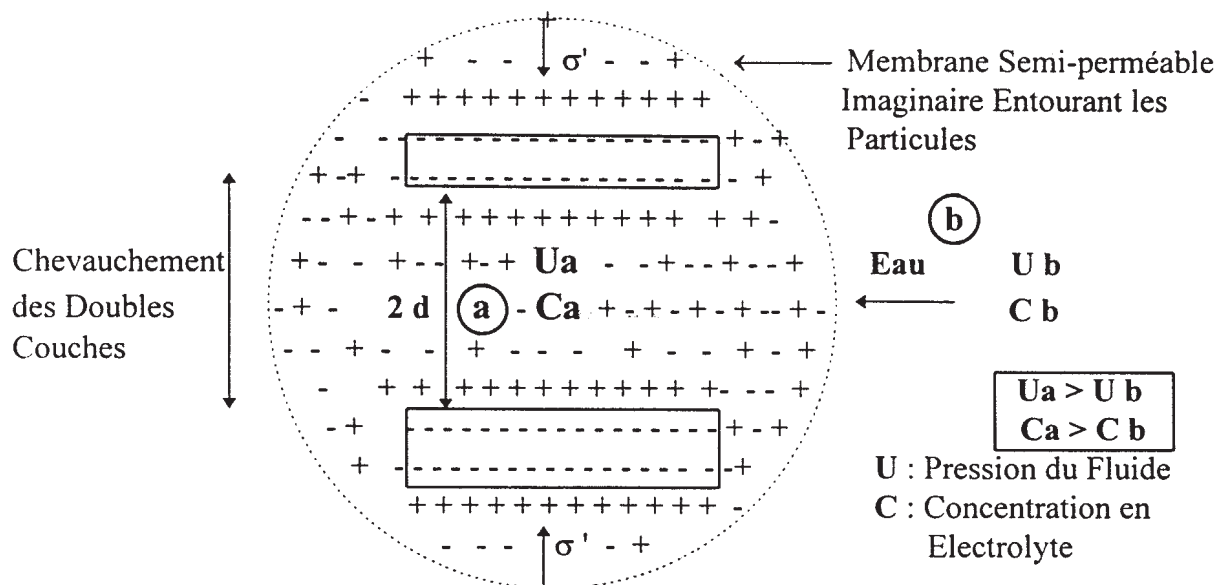


Fig. 1.12: Illustration du Concept de Pression Osmotique

Les deux doubles couches se chevauchent, les cations étant attirés par la surface des particules, la concentration en ions de l'eau à l'intérieur des double couches est plus grande que celle de l'eau "libre", les cations sont attirés à la surface des particules par le champ électrique dû à la charge négative des particules.

Donc, le champ électrique agit comme une membrane semi-perméable en ce qu'il laisse l'eau entrer à l'intérieur des doubles couches, mais il ne permet pas aux cations de sortir, la ligne en pointillée de la figure représente cette membrane semi-perméable, on peut voir que du fait de la différence de concentration entre les points tels que **a** et **b**, l'eau va couler de **b** vers **a** (osmose) et que pour empêcher la distance entre particules d'augmenter ce qui correspondrait à un gonflement, il faut exercer une pression effective σ' qui contre balance la pression de répulsion.

Cette pression de répulsion entre particules est donc équivalente à la différence des pressions osmotiques entre le fluide interstitiel (eau) loin des parois des particules et le fluide dans le plan équidistant des deux parois.

1.7.3. Expression de la Pression de Gonflement :

La différence des pressions osmotiques vue précédemment est une mesure approximative de la pression de gonflement des argiles, elle est donnée par l'équation de Van't Hoff :

$$P = RTCo (Cc/Co + Co/Cc - 2) \quad (1)$$

ou par l'équation de Langmuir (1938)

$$P = 2n KT (\cosh u - 1) \quad (2)$$

Avec :

P = Pression de gonflement.

Co = Concentration des cations dans la solution extérieur (loin des particules).

Cc = Concentration des cations dans le plan médian des deux particules.

et

n = Concentration molaire des ions dans le fluide interstitiel loin des parois.

K = Constante de Boltzman.

u = Potentiel électrique dans le plan médian entre les particules.

En fait, les équations de Van't Hoff (1) et de Langmuir (2) sont équivalentes car l'équation de Boltzman donne la relation entre Co et Cc .

on a :

$$Cc = Co e^{Z_e \phi / KT} = Co e^u$$

$$\Rightarrow Cc / Co = e^u \text{ et } Co / Cc = e^{-u}.$$

si N est le nombre d'Avogadro :

$$\Rightarrow R = k.N$$

$$n = N Co$$

substituant ces valeurs dans l'équation (2) et sachant que :

$\cosh u = (e^u + e^{-u})/2$, on obtient l'équation (1).

La détermination de la valeur de la pression de gonflement à partir de l'une des deux équations soit, par exemple l'équation (2) de Langmuir, revient à déterminer T , n et u .

La concentration ionique n dans le fluide interstitiel de l'échantillon gonflant ainsi que la température peuvent être facilement mesurées.

Mais, le potentiel électrique u dans le plan des deux parois ne peut être mesuré directement, mais doit être calculé à partir de la théorie de la double couche.

1.8. CONCLUSION

Les facteurs minéralogiques tels que le type et la quantité du minéraux argileux ont une très grande influence sur le gonflement et la pression de gonflement puisque c'est eux qui déterminent la dimension et la forme des particules, la charge de surface, ainsi que les liaisons interfeuillet.

D'autre part, plusieurs études expérimentales ont montré la validité du concept osmotique basé sur la théorie de la double couche pour déterminer les pressions de gonflement des argiles.

Cette validité est surtout confirmée dans le cas des argiles homo-ioniques, c'est à dire renfermant une seule espèce de cations. e.g. : argile homo-ionique sodique ou argile homo-ionique calcique (argiles montmorillonitiques).

Cependant, la théorie de la double couche et le concept de pression osmotique, considérés comme des modèles conceptuels microscopiques, ne constituent qu'une description qualitative du gonflement des argiles ; de ce fait, il n'est pas tout à fait correct d'appliquer ces théories d'une manière quantitative dans les conceptions géotechniques.

CHAPITRE 2

GONFLEMENT PAR HYDRATATION

2-1 INTRODUCTION

Parmi les phénomènes physico-chimiques contribuant au gonflement de certaines argiles en plus du concept osmotique (basé sur la théorie de la double couche), sont les hydratations des surfaces des particules argileuses et des cations mobiles, ce phénomène qui intervient lors de l'imbibition de l'argile par l'eau, celle-ci pénètre dans les espaces interfeuillets et interparticulaire, l'eau dans un premier temps se fixe à la surface de l'argile ou à l'intérieur des feuillets de manière quasi cristalline, ceci correspond en général à des énergies relativement élevées du fait de la forte adsorption.

Si le volume d'eau imbibé est important, les cations mobiles de l'espace interfeuillet d'argile, qui ont une grande affinité pour l'eau, vont s'hydrater à leur tour et se séparer des parois pour former une couche diffuse loin de la paroi.

Cette double hydratation engendre des pressions de répulsion qui conduisent à l'écartement des feuillets et par conséquent au gonflement de l'argile.

2-2 HYDRATATION DES SURFACES

Ce phénomène s'opère lors de la pénétration des premières couches d'eau dans les espaces interfeuillets et interparticulaires, il se produit une adsorption des molécules d'eau contre les surfaces d'argile.

Cette adsorption est assurée par des liaisons hydrogène, des forces de Van Der Waals, et d'attraction électrostatique entre les particules d'argile et les molécules d'eau.

Van Olphen (1963) a mis en évidence l'existence de forces de répulsion dans le milieu liquide séparant les particules dues à l'existence de pressions hydrostatiques élevées.

L'ensemble de ces forces de répulsion induisent un écartement des feuillets, donc une augmentation de volume.

2-3 HYDRATATION DES IONS

Ce type d'hydratation se produit surtout dans les espaces interfeuillets des argiles lors de l'imprégnation de celles-ci par des molécules d'eau.

La pénétration des molécules d'eau dans ces espaces est généralement favorisée par les faibles liaisons entre feuillets des argiles gonflantes.

Dans le cas par exemple de la montmorillonite, une certaine quantité d'eau se trouve dans les espaces interfeuillets, cette eau contient un type prédominant d'ions, généralement des cations sodiques, calciques, de potassium ou de magnésium et, dans la plupart des cas, un mélange de ces cations, d'où les nominations de montmorillonites sodiques ou calciques ...etc.

Une partie de ces cations participe à la neutralisation locale des charges négatives à la surface des feuillets et se trouvent fixer sur celles-ci.

La deuxième partie de ces cations est libre et mobile près de la surface.

Donc, lors de la pénétration des molécules d'eau dans ces espaces, les cations mobiles vont s'hydrater et ceci du fait de la grande affinité que présentent les molécules d'eau à ce type d'ions.

Cette hydratation cationique provoque l'écartement des feuillets par l'augmentation des diamètres des molécules (cation hydraté) et aussi par les énergies engendrées par cette hydratation.(Fig. 2.1)

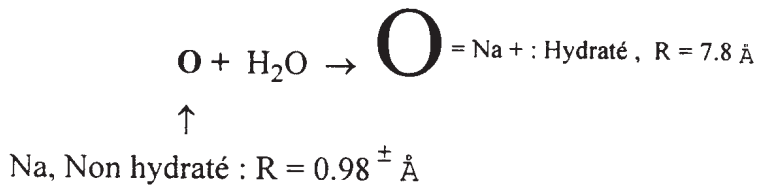


Fig. 2.1 : Hydratation de l'ion Sodium

2-4 CONCLUSION :

L'hydratation des surfaces des particules et des feuillets d'argile ainsi que des ions mobiles contribuent énormément dans le processus de gonflement.

Cette contribution s'opère en deux étapes : la première est que cette double hydratation provoque un gonflement primaire qui consiste en l'écartement des feuillets et au rapprochement des particules argileuses (J.P. Troalen, M. Aboushook et J.P. Tisot, 1985).

La deuxième étape est que lors du rapprochement des particules argileuses, il se produit le phénomène d'interpénétration (ou chevauchement) des doubles couches existantes et la formation des membranes autour des particules qui font amorcer le processus d'osmose.

D'un autre côté, l'hydratation des cations mobiles participe à la création de nouvelles doubles couches dans les espaces interfeuillets, donc de nouvelles pressions de gonflement dues aux pressions osmotiques.

Des expériences ont été réalisées avec des argiles calciques et des argiles sodiques [J. Briant, 1968] en présence respectivement d'eau contenant du chlorure de calcium ou d'eau additionnée de chlorure de sodium.

Les mesures réalisées montrent que les pressions de gonflement de l'argile calcique sont plus élevées au départ, ceci est dû au fait que l'énergie d'hydratation des ions calcium est plus importante que l'énergie d'hydratation des ions sodium, mais cela ne s'oppose pas au fait bien connu que les argiles sodiques gonflent plus.

Il faut en effet distinguer entre le gonflement de l'argile dû à l'hydratation des ions au moment de l'imprégnation par l'eau, et celui dû à la "pression osmotique" de ces ions, le premier est plus élevé pour l'argile calcique, le second est plus important pour l'argile sodique, parce que les forces électriques de rappel dues aux charges électriques sont plus faibles pour les ions monovalents.

Mais, on pense que le gonflement par hydratation est limité après l'adsorption des quelques premières couches d'eau, la teneur en eau en place, et l'eau naturelle de l'argile sont probablement très suffisants pour son hydratation [J.K. Mitchell, 1973].

Ainsi, le gonflement osmotique demeure le premier à considérer dans la compréhension du mécanisme de gonflement des sols expansifs.

CHAPITRE 3

CONTRIBUTION MECANIQUE AU GONFLEMENT DES ARGILES

3.1 INTRODUCTION

Dans les deux précédents chapitres 1 et 2, une description détaillée des aspects minéralogiques et physico-chimiques du gonflement a été présentée.

Quoique les facteurs minéralogiques et physico-chimiques peuvent expliquer le phénomène de gonflement pour plusieurs systèmes, argile-eau-électrolyte, d'autres considérations doivent aussi être données aux facteurs mécaniques dont l'influence ne peut être négligée pour certains sols.

Pour l'influence des facteurs mécaniques, on doit considérer la forme des grains, leur arrangement, l'histoire de contrainte et les conditions sous lesquelles le gonflement peut se produire.

En 1931, Terzaghi a démontré dans un article que les facteurs mécaniques doivent être considérés pour une bonne compréhension du phénomène de gonflement des sols. C'est ce point de vue qu'on va développer dans cette partie.

3.2 THEORIE DE TERZAGHI

Dans son article, peu obscure, Terzaghi (1931) a démontré son remarquable point de vue sur le comportement des sols gonflants en indiquant que la principale cause du gonflement est due à une insuffisance de la pression d'eau dans le sol.

Selon ce point de vue, les réactions physico-chimiques, s'opérant à l'intérieur du système, influent sur le gonflement seulement si elles changent les propriétés élastiques dans le système par la modification de l'adhésion aux points de contact où la rigidité des liens moléculaires ou en générant une tension supplémentaire dans la phase liquide par l'effet de la pression osmotique.

Pour chaque système à deux phases, capable de gonfler, contient une phase solide soumise à une pression égale à la tension dans la phase liquide.

La présence de cette pression est la condition essentielle pour le gonflement.

En 1931, Terzaghi a présenté les résultats d'une série d'expériences où il montre jusqu'où les facteurs mécaniques peuvent générer les pressions responsables du gonflement.

Aussi, pour montrer que la contribution mécanique aux pressions de gonflement ne peut être négligée, Terzaghi a réalisé des expériences portant sur la variation du pourcentage du vide en fonction de la pression.

L'expérience est réalisée sur deux argiles de même concentration, l'une a exercée une grande pression de gonflement tandis que pour l'autre, la pression est presque nulle et ceci pour un même pourcentage de vide. Cette situation est illustrée sur la fig. 3.1 pour lequel $e_A = e_B$.

Il est raisonnable de conclure que la différence entre les pressions, P_A et P_B , est due principalement à l'arrangement des différentes particules des deux échantillons, quoiqu'il peut y avoir une différence des forces d'interactions physico-chimiques résultant des différents arrangements.

Terzaghi a conclut son article en disant que "l'énergie d'un système à deux phases (solide, liquide), pour une concentration donnée, est composée de deux parties : une énergie mécanique et une énergie physico-chimique.

La première représente l'équivalent d'une compression mécanique de la phase solide et elle peut être comparée avec l'énergie emmagasinée dans un ressort spiral comprimé.

La deuxième est l'énergie équivalente à l'interaction physico-chimique des phases solide et liquide.

Terzaghi (1956) réaffirme dans une discussion adressée à Bolt, l'importance de la contribution mécanique dans la pression de gonflement et au changement de volume.

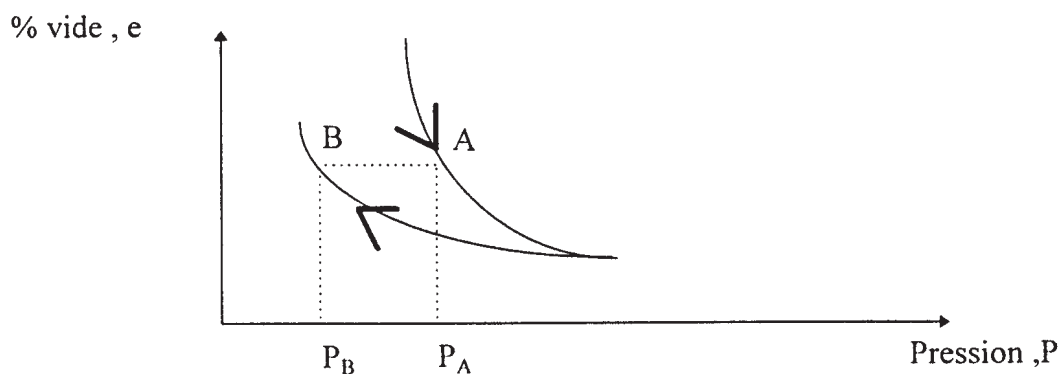


Fig. 3.1: Cas de deux échantillons à même pourcentage de vide présentant des pressions de gonflement différentes .

3.3 AUTRE APPROCHE DE MISE EN EVIDENCE DE LA CONTRIBUTION MECANIQUE :

Une autre approche de détermination de l'importance relative des effets mécaniques sur le gonflement des argiles est de réaliser des essais de gonflement sur des échantillons identiques dans l'eau et dans des fluides ayant pour effet la suppression des forces physico-chimiques tels que des solutions à forte concentration en électrolyte.

Les résultats des essais sont interprétés pour mettre en évidence, pour le premier cas (eau), l'effet combiné des forces physico-chimiques et mécaniques ; et pour le deuxième cas (solution concentrée en électrolyte), l'effet mécanique sur le gonflement et la pression de gonflement (potentiel de gonflement).

3.4 CONCLUSION

Plusieurs travaux expérimentaux ont montré l'influence et la contribution des facteurs mécaniques dans le gonflement des argiles.

En effet, le comportement élastique du sol, sous l'effet des forces extérieures, ne peut être négligé.

Mais, l'approche de Terzaghi, basée purement sur des considérations élastiques, tout en excluant les effets physico-chimiques, est insuffisante car il est impossible d'expulser toute l'eau se trouvant dans les espaces interparticulaires et interfeuillet, cette eau étant largement responsable du gonflement physico-chimique de l'argile. [d'après Gubta et al. 1969]

Ainsi, le gonflement et la pression de gonflement sont générés par des tensions dans la phase liquide, lesquelles ont pour origine les effets physico-chimiques et mécaniques.

D'autre part, la contribution mécanique au gonflement augmente surtout avec l'énergie emmagasinée en forme de distorsion et de plis des particules.

Cette contribution peut être égale ou supérieure à celle due aux effets physico-chimiques et ceci dans les systèmes composés principalement de particules en forme aplatie.

DEUXIEME PARTIE

ANALYSE THERMODYNAMIQUE DU GONFLEMENT DES ARGILES NON SATUREES

1. INTRODUCTION

Le phénomène de gonflement des argiles non saturées en présence d'eau a reçu une très grande attention dans les trois dernières décennies par les géotechniciens soucieux de résoudre un ensemble de problèmes générés par ce phénomène .

Généralement, c'est l'approche physico-chimique du gonflement des argiles qui était la plus utilisée, celle-ci impose la description des paramètres internes (microscopiques tels que, la surface spécifique, la nature et la distribution des cations échangeables et les propriétés de l'eau adsorbée) et leurs relations aux quantités macroscopiques observables telle que la pression de gonflement .

Ces relations sont liées par la théorie de la double couche de Gouy et Chapman et la pression de gonflement dans ce cas est égale à la pression osmotique de la solution retenue entre les feuillets d'argile .

Les résultats expérimentaux existants ont indiqué que cette approche a un certain mérite, mais ne peut fournir qu'une description qualitative du phénomène de gonflement.

Une autre approche du problème de gonflement est celle basée sur les équilibres thermodynamiques, cette méthode n'exige pas la connaissance des paramètres internes du système argile-eau-air, mais dépend seulement des états observables du système à l'équilibre .

Dans cette présente étude on essaiera de décrire les équations thermodynamiques régissant le phénomène de gonflement du système argile-eau-air et de déterminer la pression de gonflement en terme de variables d'état macroscopiques .

2. OBJECTIFS DE LA THERMODYNAMIQUE

La thermodynamique est la discipline scientifique ayant le mérite de fournir les méthodes les plus générales et les plus efficaces pour étudier et comprendre les phénomènes physiques complexes .

Les propriétés atomiques détectables par des méthodes élaborées, ne sont pas les caractéristiques les plus accessibles du monde physique, mais par contre, on peut mesurer avec un appareillage simple les propriétés grossières de la matière dans son ensemble, et non celles des molécules individuelles.

Ces propriétés de la matière, si évidentes, sont appelées propriétés macroscopiques, ce sont naturellement les premières caractéristiques que nous utilisons pour décrire une transformation physique.

La thermodynamique s'intéresse uniquement à des propriétés macroscopiques et le concept de molécule n'offre aucune utilité dans le raisonnement thermodynamique.

La grande force de la thermodynamique, en effet, est de ne faire aucun usage des théories ingénieuses, et souvent fragiles de la structure moléculaire. En thermodynamique, les seuls concepts utilisés sont les propriétés macroscopiques de la matière, propriétés mesurables expérimentalement.

La thermodynamique est le cadre qui permet de systématiser, de discuter ou de relier entre elles ces propriétés, c'est une des raisons pour lesquelles cette discipline est si importante pour la compréhension du monde physique.

Il est évident que l'examen des seules propriétés macroscopiques ne peut satisfaire totalement le scientifique habitué aux notions et aux théories microscopiques relatives à la structure moléculaire, celui-ci essaie toujours d'expliquer ces observations sur les propriétés macroscopiques de la matière d'après ses connaissances sur la structure moléculaire, *or la thermodynamique n'est pas une théorie moléculaire, elle ne fait que simplifier la compréhension des phénomènes physiques liés aux propriétés moléculaires.*

3 . DEFINITION DU SYSTEME

Pour une argile non saturée, un échantillon représentatif est composé d'un système à trois phases en mixture :

- Phase solide (particules solides sèches).
- Phase liquide (eau liée à l'argile).
- Phase gazeuse (air).

Ce système initialement en équilibre est influencé par la présence d'un milieu extérieur (entourage) représenté par l'eau additionnelle (ou d'imbibition).

En contact avec l'entourage, le système subit une série de transformations évoluant vers un nouveau état d'équilibre.

4 . DEFINITION DES PARAMETRES

Le problème fondamental dans une analyse thermodynamique d'un système hétérogène est la spécification des paramètres ou variables d'état, ces quantités doivent être macroscopiques (c'est à dire directement accessibles à des mesures ou contrôles de laboratoire) et mutuellement indépendantes.

Pour notre système on choisit les variables d'état suivantes :

a) Phase solide : Argile

m_c = Masse de l'argile (c : clay) .

μ_c = Potentiel chimique¹ de l'argile .

b) Phase liquide : Eau liée à l'argile .

m_{wc} = Masse de l'eau liée à l'argile (w : water) .

μ_{wc} = Potentiel chimique de l'eau liée à l'argile .

¹ Potentiel Chimique : Il représente pour un constituant la variation de l'énergie libre de Gibbs (ou enthalpie libre) G, par rapport à sa concentration lorsque toutes les concentrations des autres constituants sont fixées. Il est proportionnel à la concentration du constituant. (La concentration d'un constituant représente sa fraction molaire dans le milieu considéré)

c) Phase gazeuse : Air

m_a = Masse de l'air .

μ_a = Potentiel chimique de l'air .

d) Milieu extérieur : Eau libre .

m_w = Masse de l'eau libre (eau d'imbibition) .

μ_w = Potentiel chimique de l'eau libre .

Avec :

T = Température absolue à l'équilibre thermique .

P = Pression dans le système à l'équilibre mécanique .

V = Volume du système à l'équilibre (saturation) .

On doit noter pour notre présente analyse que la masse de l'air ne sera pas incluse dans le système, car cette quantité est faible et n'aura qu'une faible et négligeable influence sur le gonflement, donc seul le potentiel chimique peut caractériser la phase air .

5. EQUATIONS THERMODYNAMIQUES DU PROCESSUS

Avant d'établir les différentes équations on doit décrire notre système et son entourage :

On considère notre système composé d'un mélange de trois phases solide, liquide et air, enfermé dans une cellule, celle-ci étant semi-perméable car elle permettra à l'eau d'entrer ou de sortir sans que l'argile puisse le faire .

La cellule est commutée à un appareil de mesure de pression (anneau dynamométrique p.e.) par le biais d'un piston, et elle est aussi reliée à un réservoir d'eau sous la pression atmosphérique, cette eau est destinée à l'imprégnation de l'échantillon (système) .

L'ensemble étant sous une température constante, on peut alors schématiser notre cellule comme suit : (Figure 1.1) .

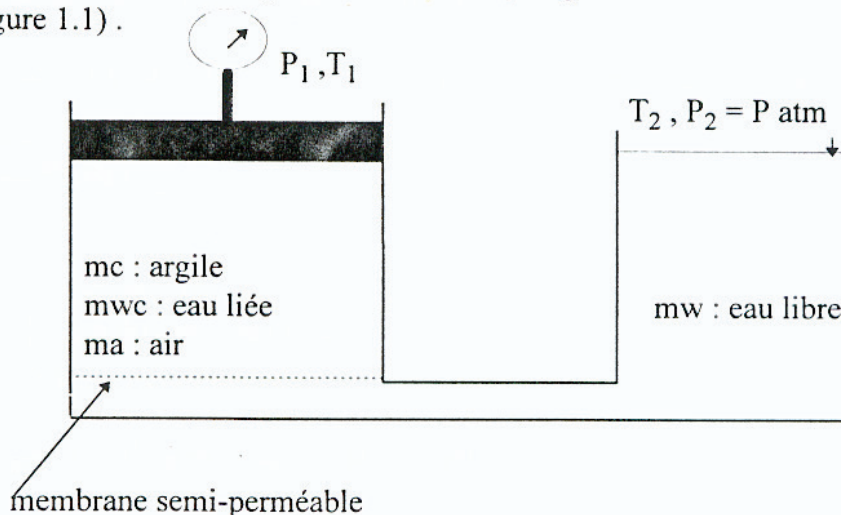


Figure 1.1: Cellule d'argile non saturée commutée au réservoir d'eau

Le processus de gonflement se déclenche lors de la mise en contact de l'eau libre avec le système (échantillon) initialement en équilibre .

L'eau passe de l'extérieur de la cellule où elle est à la pression atmosphérique vers l'intérieur où elle se trouve fixée à l'argile, mais à une pression supérieure, ce passage se fait tant que le potentiel chimique de l'eau fixée à l'argile est moindre que celui de l'eau extérieure .

La pression d'équilibre s'établit lorsque les potentiels chimiques de l'eau sont les mêmes à l'extérieur et à l'intérieur de la cellule .

A un instant donné se trouve à l'intérieur de la cellule :

m_c gramme d'argile .

m_{wc} gramme d'eau liée à l'argile

m_a gramme d'air (ou un volume V_a)

Au même instant se trouve à l'extérieur m_w gramme d'eau .

La masse totale d'eau : $m = m_{wc} + m_w$ est constante .

Nous appellerons P_1 la pression à l'intérieur de la cellule (à l'équilibre P_1 est la pression de gonflement) et P_2 la pression à l'extérieur de la cellule (pression de l'eau libre égale à la pression atmosphérique).

La température de la cellule (intérieure et extérieure) à l'équilibre est évidemment celle du milieu ambiant, puisqu'il n'y a aucune sorte d'échange de chaleur avec l'extérieur .

Lorsque le processus de gonflement se stabilise, la pression de gonflement est atteinte et nous pouvons écrire :

$$T_1 = T_2 = T \quad \text{équilibre thermique .}$$

$$\mu_{wc} = \mu_w \quad \text{équilibre des potentiels chimiques .}$$

A température et pression constante, m_w est constant .

En utilisant l'énergie libre de Gibbs comme potentiel thermodynamique, on peut caractériser l'état d'équilibre de notre système évoluant d'une manière quasi-statique par :

$$G = G_1 + G_2 \quad (1)$$

où :

G_1 = Energie libre de Gibbs dans la cellule .

G_2 = Energie libre de Gibbs dans le réservoir d'eau.

Et sachant que l'énergie libre de Gibbs pour un système à plusieurs constituants (phases) est égale à :

$$G = \sum m_k \mu_k .$$

Avec :

k : Constituant (solide, eau, air) .

m_k : Masse du constituant k .

μ_k : Potentiel chimique du constituant k .

A l'équilibre l'énergie libre dans la cellule est égale :

$$G_1 = m_c \mu_c + m_{wc} \mu_{wc} \quad (2)$$

(à la saturation, la phase air n'existe plus)

Et dans le réservoir d'eau libre :

$$G_2 = m_w \mu_w \quad (3)$$

d'où :

$$G = m_c \mu_c + m_{wc} \mu_{wc} + m_w \mu_w \quad (4)$$

d'autre part on a :

$$dG = VdP - SdT + \sum \mu_k dm_k$$

Alors pour la cellule :

$$dG_1 = V_1 dP_1 - S_1 dT_1 + \mu_c dm_c + \mu_{wc} dm_{wc} \quad (5)$$

et pour le réservoir d'eau libre :

$$dG_2 = V_2 dP_2 - S_2 dT_2 + \mu_w dm_w \quad (6)$$

d'où :

$$\begin{aligned} dG &= dG_1 + dG_2 \\ &= V_1 dP_1 + V_2 dP_2 - S_1 dT_1 - S_2 dT_2 + \mu_c dm_c + \mu_{wc} dm_{wc} + \mu_w dm_w \end{aligned} \quad (7)$$

Dérivons l'expression (4) et égalisons là à l'expression (7) on obtient la relation de **Gibbs-Duhem** :

$$m_c d\mu_c + m_{wc} d\mu_{wc} + m_w d\mu_w = V_1 dP_1 + V_2 dP_2 - S_1 dT_1 - S_2 dT_2 \quad (8)$$

où :

V_1 : Volume de l'argile hydratée (intérieur de la cellule) .

S_1 : Entropie² de l'eau (intérieur de la cellule) .

V_2 : Volume de l'eau libre (extérieur de la cellule) .

Les conditions d'équilibre thermique et de potentiels chimiques permettent d'écrire :

$$dT_1 = dT_2 = 0 \quad (\text{Température constante}) .$$

$$\mu_{wc} = \mu_w = \text{constante}$$

$$\implies d\mu_{wc} = d\mu_w = 0$$

d'autre part :

$$P_2 = P_{atm} = \text{constante}$$

$$\implies dP_2 = 0$$

Finalement, l'équation de Gibbs-Duhem se réduit à l'équilibre à l'expression :

$$V_1 dP_1 = m_c d\mu_c \quad (9)$$

² l'Entropie S d'un système représente la variation de la chaleur par rapport à la température dans une transformation réversible, physiquement elle représente en quelque sorte une mesure du désordre régnant à l'échelle moléculaire .

d'où la valeur de la pression de gonflement P_1 :

$$dP_1 = \frac{m_c}{V_1} d\mu_c \quad (10)$$

$$P_1 = P_{10} + \frac{m_c}{V_1} \int_{\mu_{c0}}^{\mu_c} d\mu_c \quad (11)$$

$$P_1 = \frac{m_c}{V_1} (\mu_c - \mu_{c0}) \quad (12)$$

car $P_{10} = 0$.

Avec :

P_{10} = Pression à l'intérieur de la cellule avant la mise en contact avec l'eau libre.

μ_{c0} = Potentiel chimique initial de l'argile avant sa mise en contact avec l'eau libre (argile partiellement hydratée).

μ_c = Potentiel chimique de l'argile complètement hydratée (saturée) à la pression P_1 .

6. DETERMINATION PRATIQUE DE LA PRESSION DE GONFLEMENT

La pression de gonflement théorique déterminée précédemment par des considérations thermodynamiques n'est fonction que du volume d'argile hydratée V_1 , de la masse d'argile sèche (initiale) m_c , et de la différence du potentiel chimique initial et final de l'argile $\mu_c - \mu_{c0}$.

Les valeurs de V_1 et de m_c sont directement mesurables, mais la détermination des potentiels chimiques de l'argile hydratée revient à déterminer les potentiels chimiques de l'eau fixée à celle-ci avant et après l'expérience, tout en sachant qu'à l'équilibre le potentiel chimique de l'eau est le même à la surface de l'argile et dans la vapeur qui la surmonte.

Or, il est aisé de mesurer le potentiel chimique de la vapeur par l'équation :

$$\mu = \mu_0 + RT \log \frac{P}{P_0} \quad (13)$$

où :

μ_0 : Potentiel chimique du liquide pur, et de la vapeur en équilibre avec lui ;

P_0 : Tension (ou pression) de vapeur en équilibre avec le liquide pur ;

μ : Potentiel chimique d'une vapeur dont la tension de vapeur est : P ;

R : Constante des gaz parfaits ;

T : Température absolue .

Dans cette équation la vapeur est assimilée à un gaz parfait, ce qui est une approximation en général suffisante, surtout pour les faibles tensions de vapeur .

Si on considère une argile hydratée et que l'on mesure sa tension de vapeur (voir appareillage :Karalis, 1990), on peut par la connaissance de la tension de vapeur de l'eau pure à

la même température et par référence au potentiel chimique de l'eau pure, déterminer le potentiel chimique de l'eau fixée à l'argile suivant l'équation (11) .(Briant, 1969;d'après Barshad).

Ces déterminations conduisent directement à la valeur de la pression de gonflement .

7. CONCLUSION

Par un appareillage convenable permettant la mesure simultanée des tensions de vapeur et des pressions de gonflement d'échantillons d'argile non saturée, on peut comparer les valeurs des pressions de gonflement théoriques et expérimentales.

Une vérification des résultats permettra une meilleure connaissance du comportement macroscopique des argiles gonflantes non saturées et par conséquent une meilleure maîtrise du processus de gonflement, ainsi qu' à une utilisation de cette pression d'une manière quantitative dans les conceptions géotechniques.

CONCLUSION SUR LES DEUX PREMIERES PARTIES

Il a été procédé dans la première partie à la compréhension du phénomène du gonflement des argiles non saturées à l'échelle microscopique en se basant sur l'étude des phénomènes d'hydratation des surfaces des particules argileuses, ainsi que l'hydratation des cations échangeables, et cette double hydratation est à la base du développement de la double couche électrique autour du feuillet et de la particule d'argile. Dans ce contexte, le gonflement

physico-chimique est induit par le déclenchement du processus d'Osmose. Aussi, Dans cette première partie, la contribution mécanique au gonflement a été mise en évidence par la théorie de Terzaghi.

La deuxième partie a concerné l'étude macroscopique du phénomène de gonflement en utilisant la thermodynamique, celle ci a permis la simplification de la formulation des équations ayant pour objet la quantification du potentiel de gonflement.

Il est important de noter que la partie microscopique offre seulement les éléments de compréhension du phénomène physique, et qu'il est très difficile de réaliser une quantification du phénomène par des paramètres microscopiques, car ceci nécessite des techniques très élaborées, coûteuses, et souvent fragiles.

Il est certain que l'apport des deux premières parties à la modélisation du phénomène est évident, même si, on doit utiliser une autre formulation n'ayant pas les mêmes paramètres utilisés dans les deux premières parties. La seule condition à respecter, est de réaliser une formulation par des paramètres macroscopiques.

Aussi, il est important de noter que chaque comportement de la masse à l'échelle macroscopique, doit avoir son explication à l'échelle microscopique et phénoménologique, d'où l'intérêt d'une étude approfondie du phénomène physique à l'échelle microscopique. Ceci, peut être expliqué à travers l'exemple suivant : l'expérimentation a montré que le gonflement des argiles réduit l'infiltration d'eau au sein de ces argiles. Cette affirmation ne peut être acceptée par celui qui n'a que des informations superficielles sur la théorie de la double couche. Car selon lui, lors du gonflement, il ya augmentation de volume, liée à l'ouverture des feuillets par formation de la double couche, donc un espace supplémentaire pour l'écoulement d'eau, d'où, une augmentation de l'infiltration. Mais, il ignore que les espaces où la double couche s'est formée ne permettent pas le passage à l'eau libre, d'où, la réduction de l'infiltration.

Dans la troisième partie de notre travail, on traitera le problème d'écoulement d'eau dans un sol gonflant, et son couplage à la déformation de gonflement, et beaucoup des résultats qui vont être trouvés auront sûrement leurs explications dans les deux premières parties.

TROISIEME PARTIE

MODELISATION NUMERIQUE ET EXPERIMENTALE DU GONFLEMENT DES ARGILES NON SATUREES ET APPLICATIONS

INTRODUCTION

De nombreux travaux de recherche ont été réalisés ces dernières années dans le but d'étudier et de comprendre les phénomènes liés à la non saturation des sols et spécialement ceux développant un gonflement ou un retrait important. Parmi ces phénomènes, celui de l'écoulement d'eau sous des conditions transitoires, celui-ci est important pour le domaine du génie civil ainsi que pour la science des sols.

Le géotechnicien s'intéresse à l'écoulement d'eau lorsqu'il est confronté aux problèmes pratiques, tel que la conception des fondations superficielles, des routes et autoroutes et des chaussées d'aérodrome.

La prédiction des variations des teneurs en eau en fonction du climat et de la topographie du site, implique plusieurs variables complexes, telles que, les propriétés du sol, le type des couches supérieures et des nappes d'eau, la vitesse des vents, les radiations solaires et les conditions atmosphériques. Alors du fait de la nature complexe du problème, les travaux de recherche dans ce domaine demeurent encore semi-empiriques avec de sérieuses approximations. Pour cela la formulation et la solution des problèmes d'écoulement en milieux non saturés et déformables exigent très souvent l'utilisation de méthodes indirectes d'analyse, basées sur les techniques numériques d'approximation.

En effet, le mouvement de l'eau et la déformation du sol (élastique) sont deux phénomènes couplés, mais notre présente approche est basée sur le fait que la variation entre la déformation de gonflement et la teneur en eau volumique est presque linéaire (Karalis, 1990), donc l'hypothèse de linéarité est acceptable.

Cette présente partie traitant la construction du modèle se subdivise en quatre chapitres, le premier concerne la formulation des équations régissant le phénomène (modèle mathématique) dans un système de coordonnées cartésiennes, le deuxième traite la formulation en éléments finis des équations (Méthode des résidus pondérés de Galerkin), le troisième chapitre présente la structure du code de calcul ainsi que quelques exemples de validation numérique, et, enfin, le quatrième chapitre présente la procédure expérimentale de validation du modèle.

CHAPITRE 1

EQUATIONS GENERALES DE L'ECOULEMENT

1.1 INTRODUCTION

Les premiers fondements du traitement de l'écoulement d'eau en milieux poreux non saturés et isothermiques ont été données par Buckingham (1907) . Ce dernier a proposé le concept du potentiel capillaire, et a montré sa relation fonctionnelle à la teneur en eau volumique. Richards (1931) a combiné le potentiel capillaire avec le potentiel gravitationnel et a montré que la loi de Darcy initialement proposée pour les milieux poreux saturés était également valable dans les zones partiellement saturées.

L'écoulement d'eau dans les sols est provoqué par une force motrice résultante d'un gradient de potentiel effectif, cet écoulement s'opère dans la direction à potentiel décroissant, et que le taux d'écoulement (flux) est proportionnel au gradient de potentiel et il est affecté par les propriétés géométriques des pores.

L'eau dans les sols non saturés est soumise à une pression sub-atmosphérique ou succion, et le gradient de cette succion constitue la force motrice. La matrice de succion est due à l'affinité physique de l'eau aux surfaces des particules et aux pores capillaires . Ainsi l'eau tend à couler des zones à faible succion vers les zones à forte succion.

Ce présent chapitre a pour but la formulation des équations générales gouvernant la distribution spatiale des teneurs en eau volumiques à partir d'une source dans un milieu gonflant non saturé.

1.2 HYPOTHESES

- a) L'écoulement est considéré comme isothermique.
- b) L'influence de l'écoulement de la phase air sur la phase eau est ignorée.
- c) L'effet de l'hystérésis est ignoré en considérant que la dépendance fonctionnelle de la succion à la teneur en eau volumique est unique et connue pour le sol analysé.
- d) L'influence de la gravité sur l'écoulement est négligée.
- e) Le milieu est considéré comme homogène et isotrope.
- f) La variation est linéaire entre la déformation de gonflement et la teneur en eau volumique.
- g) Le sol derrière le "front" d'humidité (ou dans la zone de transmission) est considéré totalement saturé, il possède alors une perméabilité constante.

1.3 SYSTEME DE COORDONNEES

Pour la formulation des équations régissant le phénomène d'écoulement en milieu gonflant non saturé, deux approches sont utilisées, elles sont distinctes mais équivalentes, la première est Eulerienne en coordonnées physiques spatiales (Philip, 1968; Bear et al., 1968; Nakano et al., 1986) et la deuxième est Lagrangienne en coordonnées matérielles (Smiles et Rosenthal, 1968).

Pour Euler, les variables indépendantes sont la position courante x de la particule X et le temps t par rapport à un repère fixe dans l'espace (repère rigide), et avec cette description on s'intéresse à ce qui se passe dans une région fixe de l'espace lorsque le temps varie.

Pour Lagrange en coordonnées matérielles, les variables indépendantes sont la particule, ou un point-corps X et le temps t , ainsi le repère est lié à la particule en mouvement (repère déformable) . Donc la particule est au repos par rapport au repère.

L'avantage de la description spatiale d'Euler est qu'elle permet une connaissance directe de la signification physique de la solution tandis que la description matérielle permet parfois la simplification de la formulation et par conséquent la résolution.

Des deux descriptions, celle d'Euler est plus utilisée et adaptée aux applications en élément finis. Pour notre approche, le volume de référence est un volume élémentaire de

dimensions constantes et fixes dans l'espace, contenant une phase solide et deux phase fluides, eau et air (figure 1).

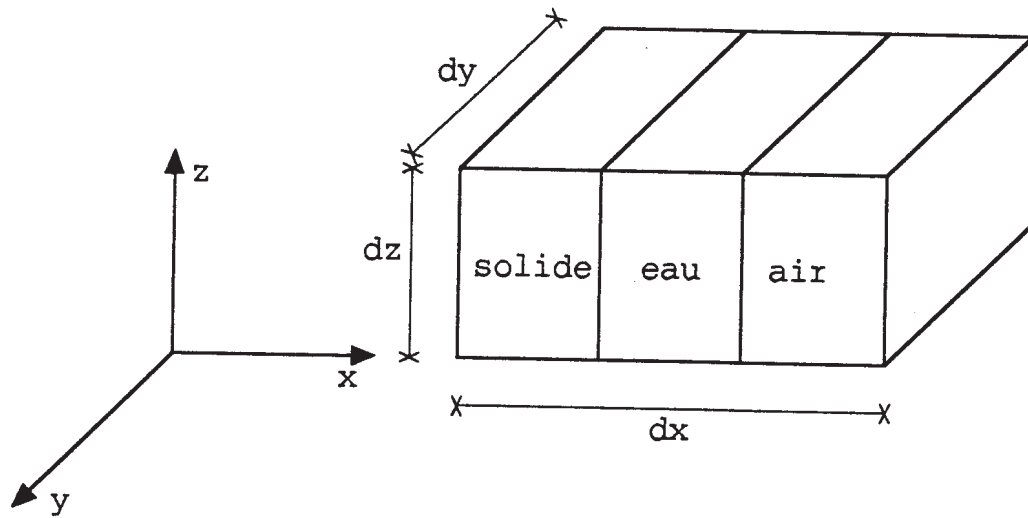


Figure 1: Volume de référence

1.4 FORMULATION POUR UN MILIEU NON DEFORMABLE

Dans cette section on formulera pour des raisons de simplicité les équations en une seule dimension, et pour un sol non déformable, on choisira un écoulement horizontal. Pour le cas bidimensionnel et dans un milieu déformable (gonflant), il sera traité dans la section (6).

1.4.1 Equation générale

La loi de Darcy initialement conçue pour des écoulements en milieux saturés seulement, a été étendue par Richards (1931) aux écoulements en milieux non saturés, avec pour laquelle la conductivité hydraulique (K) est maintenant une fonction de la succion [c.à.d, $K=K(\Psi)$]:

$$q = -K(\Psi) \nabla H \quad (1)$$

avec:

q : Flux (ou vitesse d'écoulement) d'eau ($L.T^{-1}$)

K : Conductivité hydraulique ($L.T^{-1}$)

∇H : Gradient de la charge hydraulique ($L.L^{-1}$) composé des termes de succion (Ψ) et de gravité ($-Z$). [$H = \Psi - Z$]

(-): Le signe négatif dans l'équation (1) indique que l'écoulement d'eau est opposé à la direction de charge hydraulique croissante.

L'équation (1) peut être écrite sous la forme :

$$q = -k(\theta) \nabla H \quad (2)$$

Car pour un sol non saturé la conductivité et la succion sont fonction de la teneur en eau, et sont affecté par le phénomène d'hystérésis, celui-ci est lié aux courbes d'humidification et de dessiccation qui sont différentes pour un même sol. La raison est que pour une succion donnée , le sol en dessiccation contient, plus d'eau qu'en humidification. Cependant le degré d'hystérésis est moindre dans le cas de la relation conductivité - teneur en eau ($K-\theta$).

Pour obtenir L'équation générale de l'écoulement transitoire, nous devons introduire L'équation de continuité basée sur le principe de la conservation de la masse du fluide en écoulement. Celle-ci est obtenue en écrivant que la variation de la masse du fluide contenu dans un parallélépipède (élément de volume) au cours d'un intervalle de temps est égale à la somme algébrique des entrées et des sorties de fluide par les différentes faces, cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot q = -\text{div} q \quad (3)$$

ainsi:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\Psi) \nabla H] \quad (4)$$

En remplaçant dans L'équation (4) la charge hydraulique H par sa valeur qui est la somme de la charge de succion et la charge gravitationnelle (ou élévation) Z , on peut écrire :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\Psi) \nabla (\Psi - Z)] \quad (5)$$

Et comme on traite un écoulement horizontal, ∇Z est nulle (pas d'effet de gravité). On verra en section (6) que même pour un écoulement vertical l'effet du gradient de potentiel de gravité est négligeable devant l'effet du gradient de succion et surtout dans les premières phases d'infiltration (Philip and Smiles, 1969).

Alors:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\Psi) \nabla \Psi] \quad (6)$$

Ou, pour un système unidimensionnel horizontal,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] \quad (7)$$

1.4.2 La Diffusivité

Pour simplifier le traitement mathématique et expérimental du processus d'écoulement en milieu non saturé, il est souvent avantageux de ramener l'équation d'écoulement à une forme analogue aux équations de diffusion et de transfert de chaleur, dont des solutions existent déjà.

Pour transformer l'équation d'écoulement, il est possible de relier le flux au gradient de teneur en eau plutôt qu'au gradient de succion.

Le gradient de succion $\partial \Psi / \partial x$ peut être étendu par la règle des chaînes comme suit :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (8)$$

Où $\partial \theta / \partial x$ est le gradient de teneur en eau et $\partial \Psi / \partial \theta$ est l'inverse de la capacité spécifique de l'eau ou coefficient d'emmagasinement d'eau $C(\theta)$:

$$C(\theta) = \frac{\partial \theta}{\partial \Psi} \quad (9)$$

$C(\theta)$ est la mesure du pouvoir (capacité) du sol à absorber de l'eau lors d'une variation de succion, elle est égale à la pente de la courbe de rétention d'eau [$\Psi = f(\theta)$] à la teneur en eau considérée.

Nous pouvons à présent réécrire L'équation de Darcy comme suit:

$$q = -K(\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{K(\theta)}{C(\theta)} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (10)$$

Pour transformer cette équation à une forme analogue à la loi de diffusion de FICK, on a introduit une fonction (CHILDS et COLLIS-GEORGE, 1950) appelée la diffusivité D , égale

à:

$$D(\theta) = \frac{K(\theta)}{C(\theta)} = K(\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (11)$$

D est ainsi définie comme étant le rapport de la conductivité hydraulique à la capacité spécifique de l'eau, et puisque ces deux dernières sont fonction de la teneur en eau, la diffusivité doit l'être. Maintenant on peut réécrire l'équation (2):

$$q = -D(\theta) \nabla \theta \quad (12)$$

Ou, pour une dimension:

$$q = -D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (13)$$

La diffusivité peut ainsi être considérée comme étant le rapport du flux au gradient de teneur en eau. La diffusivité D a la dimension du carré de longueur par unité de temps ($L^2.T^{-1}$), tandis que la capacité spécifique de l'eau C, a la dimension de volume de sol par unité de variation de la charge de succion (L^{-1}). Dans l'utilisation de l'équation (13), le gradient de teneur en eau représente implicitement, le gradient de succion lequel représente la vraie force motrice de L'écoulement .

En introduisant la diffusivité dans l'équation (7), pour un écoulement unidimensionnel en absence de la gravité, on obtient l'équation générale de l'écoulement d'eau en milieux poreux non saturés et indéformables :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \quad (14)$$

Cette équation est bien connue sous l'équation non linéaire de diffusion, laquelle possède une seule variable dépendante .

Il est à noter que lorsqu'on emploie le concept de diffusivité, ainsi que toutes les relations qui en dérivent, nous devons nous rappeler que le processus du mouvement d'eau dans le sol n'est pas un processus de diffusion mais c'est un écoulement en masse. Le terme "diffusivité" est seulement emprunté et s'il est pris littéralement, il peut être trompeur.

L'avantage en utilisant l'équation de diffusion est dans le fait que l'intervalle de variation de la diffusivité est inférieur à celui de la conductivité, de plus, la teneur en eau et son gradient sont souvent plus simple à mesurer en pratique que la succion et son gradient.

La relation de la diffusivité à la teneur en eau est non linéaire (Figure 2). Cette relation est parfois exprimée par une équation empirique (Gardner et Mayhugh , 1958).

$$D = ae^{b\theta} \quad (15)$$

Les constantes a et b sont déterminées expérimentalement. Cette équation s'applique seulement aux sections de la courbe présentant une croissance de la diffusivité avec la teneur en eau. Dans des intervalles à teneur en eau très faible (zone très sèche) la diffusivité présente souvent un comportement opposé (augmentation de D avec diminution de θ), ceci est apparemment dû à la contribution du mouvement de la vapeur (Philip, 1955). Dans les zones très humides et près de la saturation, la diffusivité devient indéterminée car elle tend vers l'infini (puisque $C(\theta)$ tend vers zéro).

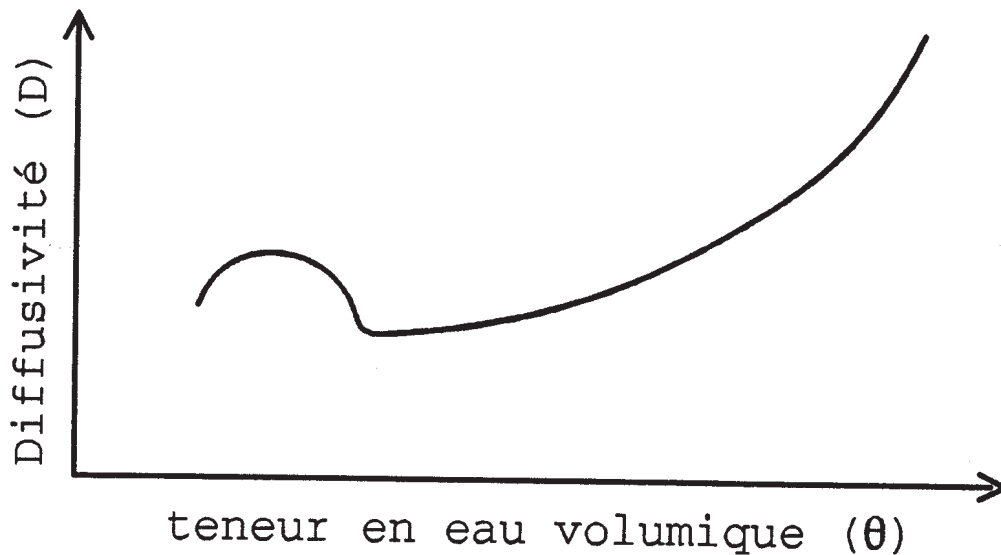


Figure 2: Relation entre la diffusivité et la teneur en eau volumique

1.4.3 Mesure de la conductivité et de la diffusivité non saturées

La connaissance des valeurs des conductivités hydrauliques et des diffusivités à différentes succions et teneurs en eau est généralement exigée avant tout traitement des théories mathématiques de l'écoulement d'eau. Et du fait qu'il n'existe aucune méthode pour prédire ces valeurs à partir des propriétés fondamentales du sol, K et D doivent être mesurés expérimentalement. En principe, K et D peuvent être obtenus soit à partir d'un système d'écoulement permanent ou transitoire.

Dans un système d'écoulement permanent, le flux, le gradient de charge hydraulique et

la teneur en eau sont constants avec le temps, tandis que dans un système à écoulement transitoire, ils varient. En général, les mesures basées sur les écoulements permanents sont plus exactes, cependant, la difficulté réside dans l'établissement du système d'écoulement.

La conductivité est d'habitude mesurée par application d'une différence constante de charge hydraulique à travers un échantillon de sol et on mesure le flux d'eau permanent résultant. Les mesures sont exécutées à des niveaux croissants de succion et de teneur en eau, de sorte à obtenir les fonctions $K(\Psi)$, $K(\theta)$ et $D(\theta)$.

La fonction $K(\Psi)$ est hystérétique, alors, et pour une complète détermination de celle-ci, les mesures doivent être exécutées en sorption et en désorption. Ceci est difficile, et exige un appareillage spécial. Ces techniques de laboratoire peuvent aussi être appliquées à des mesures sur des échantillons non remaniés obtenus à partir de sondage in-situ. Ceci est certainement préférable aux mesures effectuées sur des échantillons reconstitués, quoiqu'il doit être compris qu'aucune des techniques disponibles d'échantillonnage in-situ n'a pu donner de vrais échantillons intacts.

La mesure des conductivités et des diffusivités en laboratoire peut aussi être menée sur de longues colonnes de sol, un état d'écoulement permanent peut être induit. Si la colonne de sol est suffisamment longue pour permettre la mesure des gradients de succion (par une série de tensiomètres, ou de préférence par des techniques non destructives telles que le balayage par rayon gamma). Les relations $K(\theta)$ et $K(\Psi)$ peuvent être obtenues pour une grande variation de teneur en eau avec une seule ou plusieurs colonnes de sol.

Les mesures sur colonne sous un écoulement transitoire ont été aussi menées (e.g. La technique de la colonne horizontale de Bruse et Klute, 1956). Si les profils périodiques de succions et de teneur en eau sont mesurés, les valeurs des flux à différents intervalles de temps et d'espace peuvent être évaluées par intégration graphique entre les profils successifs de teneur en eau. Cette procédure a été appelée la technique du "profil instantané", et elle peut être appliquée in-situ.

Une autre méthode de mesure in-situ de la diffusivité dans les profils drainés de l'intérieur a été proposée par Gardner (1970). Dans cette procédure, le profil est profondément humidifié et on le laisse drainer tout en évitant l'évaporation par la surface du sol. L'essai doit être mené en l'absence de toutes autres sources ou d'absorption d'eau par les racines de plantes.

L'intégration de l'équation d'écoulement en milieu non saturé dans une dimension une fois par rapport à la profondeur donne:

$$\int_0^L \frac{\partial \theta}{\partial t} dz = K \frac{\partial H}{\partial z} \quad (16)$$

Avec θ , comme teneur en eau volumique, t le temps, z la profondeur, K la conductivité hydraulique. Le terme à gauche de l'équation (16) représente le taux de perte d'eau dans une portion du profil, lequel peut être obtenu in-situ à partir des mesures successives de teneur en eau, seulement, la variation de la succion par rapport au temps est nécessaire. La seule instrumentation exigée est un tensiomètre, ou de préférence, plusieurs tensiomètres à différentes profondeurs du profil. Et si le sol ne se draine pas uniformément, la diffusivité sera la moyenne des diffusivités calculées à travers le profil sur la longueur L .

1.5 Caractérisation des sols gonflants

Dans la section (4), on a formulé l'équation générale régissant l'écoulement unidimensionnel d'eau dans un milieu poreux non saturé et non déformable (non gonflant). Dans ce cas la loi de Darcy a été appliquée à l'écoulement d'eau relativement à un espace physique (référence), et qu'il a suffi seulement la connaissance de deux fonctions $\Psi(\theta)$ et $K(\theta)$ pour caractériser le sol indéformable. Cependant, pour un sol déformable (gonflant), les particules solides ne sont pas stationnaires (fixes), mais elles subissent un mouvement. Ainsi la loi de Darcy s'appliquera pour l'écoulement d'eau relativement aux particules solides tout en gardant son expression mathématique ($q_r = -K \nabla H$). Le mouvement des particules implique une variation dans la géométrie du milieu (déformation de gonflement) donc une variation de l'indice des vides e , celui-ci est défini par le rapport du volume des vides (eau + air) au volume du solide. Il en résulte alors, une nouvelle fonction $e(\theta)$ qui doit être défini pour une spécification complète des sols gonflant en plus des deux premières $\Psi(\theta)$ et $K(\theta)$.

Sachant que les trois fonctions $\Psi(\theta)$, $K(\theta)$ et $e(\theta)$ peuvent être soumis à l'hystérésis durant la répétition des cycles d'humidification (gonflement) et de dessiccation (retrait). Cependant nous avons supposé que la dépendance fonctionnelle de Ψ , K et e de la teneur en eau θ est unique et connue pour le sol considéré.

1.6 Formulation des équations en milieu gonflant

Dans la section (4), on a établi l'équation d'écoulement en milieu non saturé et indéformable (non gonflant) et dans une dimension seulement. Dans cette section, la formulation se fera dans un système bidimensionnel et avec prise en compte de l'influence du mouvement

des particules (déformation de gonflement) sur l'écoulement d'eau et par conséquent sur la distribution spatiale des teneurs en eau volumiques.

1.6.1 Flux total d'eau

Dans un milieu non saturé et gonflant, l'écoulement d'eau est non seulement influencé par le gradient de charge hydraulique exprimé par la loi de Darcy, mais aussi par le mouvement des particules dû à la déformation de gonflement. Ainsi, le flux total d'eau comportera deux composantes, l'une relative aux particules solides et l'autre liée au mouvement de ces particules par rapport à un système de coordonnées fixe.

Selon la loi de Darcy et sa modification pour les écoulements non saturés, le flux d'eau relatif aux particules solides est donné par l'équation (12):

$$q_r = -D(\theta) \nabla \theta \quad (17)$$

Pour exprimer le flux d'eau dû au mouvement des particules, on utilisera la définition de la loi de Darcy en milieu poreux.

Le flux de Darcy (ou flux volumétrique) est le volume d'eau traversant l'aire d'une section par unité de temps. Comme tel, il a la dimension d'une vitesse, et puisque l'aire de la section contient une partie solide, seulement l'aire contenant l'eau est disponible à l'écoulement. Ainsi la vitesse moyenne de l'eau dans les pores peut être déterminé en divisant le flux volumétrique par la porosité dans les sols saturés ou par le produit du degré de saturation à la porosité ($S.n$) dans les sols non saturés.

Puisque la particule est en mouvement, nous supposons (V_s) sa vitesse moyenne, alors, cette vitesse doit être égale à la vitesse moyenne de l'eau. Ceci est vrai en considérant que la phase solide ne glisse pas par rapport à la phase liquide, et qu'il n'y a pas de production de masse à l'interface solide-liquide. (Baveye, 1992)

Alors, la vitesse des particules (V_s) sera le rapport du flux volumétrique d'eau au produit ($S.n$), et sachant que $S.n=\theta$, on aura:

$$q_{ws} = \theta V_s \quad (18)$$

Ainsi, le flux total d'eau sera égale à :

$$q_t = q_r + q_{ws} = -D(\theta) \nabla \theta + \theta V_s \quad (19)$$

1.6.2 Vitesse des particules et déformation de gonflement

La vitesse des particules (V_s) est liée au vecteur déplacement (U_s) par la relation :

$$V_s = \frac{\partial U_s}{\partial t} \quad (20)$$

En dérivant cette équation par rapport à x (sens horizontal):

$$\frac{\partial}{\partial x} V_s = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_s}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U_s}{\partial x} \right) = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \quad (21)$$

Avec (ϵ) comme déformation de gonflement. On notera que le passage du déplacement à la déformation dans l'équation (21) s'est fait sous l'hypothèse des petites perturbations (ou déplacements).

Comme par hypothèse, le taux de gonflement est proportionnel au taux de l'humidification (relation linéaire), on peut écrire:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \beta \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (22)$$

En substituant et appliquant le principe de continuité (l'équation de continuité), on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial x} V_s = \beta \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\beta \frac{\partial}{\partial x} (q_r) \quad (23)$$

Par intégration des deux termes extrêmes on aura:

$$V_s = -\beta q_r + C \quad (24)$$

La constante d'intégration (C) est déterminée à partir des conditions initiales, là où le milieu est en état stationnaire (fixe), c'est à dire $V_s = 0$, et il est convenable de choisir comme origine cet état. Si le flux d'eau en cet état est donné en fonction du temps $q_0(t)$, Alors :

$$C = \beta q_0 \quad (25)$$

En substituant les équations (24) et (25) dans (19) on obtient:

$$q_t = q_r + \beta \theta q_0 - \beta \theta q_t \quad (26)$$

Alors :

$$q_t = \frac{q_r + \beta \theta q_0}{1 + \beta \theta} \quad (27)$$

Cette valeur du flux total d'eau (q_t) à travers le milieu non saturé est la même dans les deux directions, horizontale et verticale, compte tenu des hypothèses émises.

1.6.3 Equation générale d'écoulement bidimensionnel

Afin d'établir l'équation générale, il faut considérer un élément de volume différentiel du milieu et d'épaisseur unité (Figure 3) et établir le bilan d'écoulement à travers cet élément (principe de la conservation de la masse).

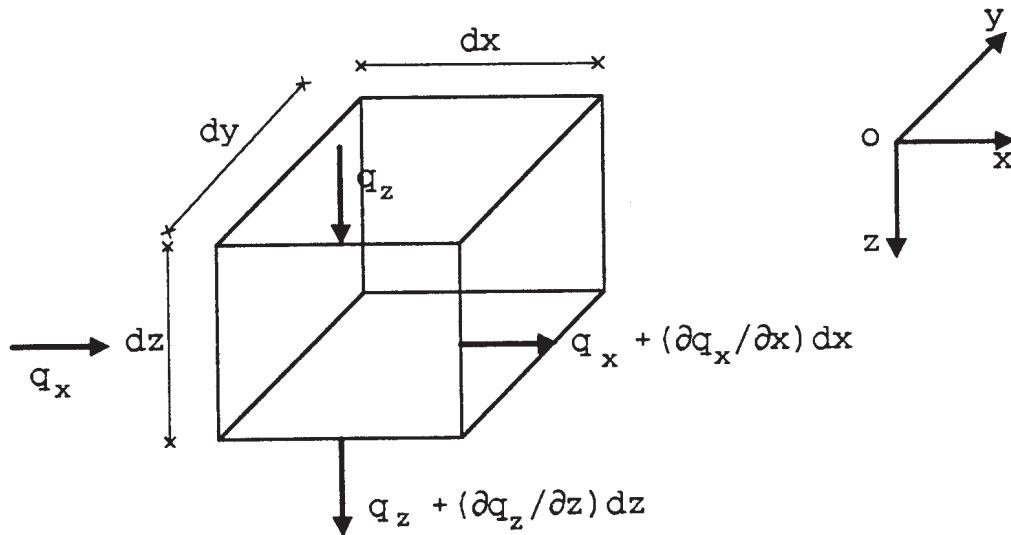


Figure 3: Flux d'eau à travers les faces de l'élément différentiel de sol

Puisque notre élément différentiel est d'épaisseur unité, le taux de génération d'eau (à partir d'une source) dans cet élément $dx \, dz$ est $G \, dx \, dz$ (eau générée par unité de volume).

En exprimant le bilan d'écoulement d'eau interne net on obtient:

$$G dx dz - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dz - \left(\frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) dx = \left(G - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx dz \quad (28)$$

Sachant que l'écoulement produit une variation de la masse d'eau par rapport au temps, l'équation de continuité nous permet d'écrire :

$$\left(G - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx dz = \frac{\partial m}{\partial t} dx dz \quad (29)$$

Avec m , la masse d'eau dans l'élément. Le taux de variation de la masse peut être exprimé en terme du taux de variation de volume, puisque la masse d'eau (m) dans l'élément de volume (V) est égale à $\rho_w (V_w/V)$ et comme la densité d'eau ρ_w est égale à l'unité, alors :

$$m = \frac{Vw}{V} \quad (30)$$

Et comme $Vw/V = \theta$, teneur en eau volumique on aura l'équation :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = G - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_z}{\partial z} \quad (31)$$

En remplaçant q_x et q_z par leurs valeurs ($q_x = q_z = q_1$), on aura :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q_r + \beta \theta q_0}{1 + \beta \theta} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{q_r + \beta \theta q_0}{1 + \beta \theta} \right] + G \quad (32)$$

Ou encore:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{-D \frac{\partial \theta}{\partial x} + \beta \theta q_0}{1 + \beta \theta} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{-D \frac{\partial \theta}{\partial z} + \beta \theta q_0}{1 + \beta \theta} \right] + G \quad (33)$$

Cette dernière équation régit l'écoulement d'eau dans un milieu poreux non saturé et gonflant. Et pour la résoudre, il faut spécifier les conditions initiales, ainsi que les conditions aux limites (soit pour le flux ou pour la teneur en eau).

Le cas spécial présentant une importance particulière est celui d'un semi-espace d'une argile gonflante, avec un flux d'eau en surface variant en fonction du temps. Initialement le sol est à une teneur en eau uniforme (θ_0), et par conséquent, il est dans un état stationnaire (sans mouvement) avec un flux d'eau nul ($q_0 = 0$). Ainsi, l'équation (33) devient:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D(\theta)}{1 + \beta \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{D(\theta)}{1 + \beta \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + G \quad (34)$$

La résolution numérique de cette équation par la méthode des éléments finis fera l'objet des prochains chapitres.

1.6.4 Calcul du déplacement de surface.

A partir de l'hypothèse émise sur la déformation de gonflement qui est linéaire à la variation de la teneur en eau volumique, il est possible de déduire le déplacement de surface, une fois l'équation (34) résolue, à partir de la formule suivante :

$$\Delta \ell = \beta \int_0^{\ell} (\theta - \theta_0) dz$$

Avec, ℓ comme profondeur d'infiltration, θ_0 comme teneur en eau volumique initiale, et β comme facteur de gonflement déterminé par voie expérimentale sur le sol étudié. (Karalis, 1990).

Dans la formule précédente le caractère bidimensionnel n'apparaît pas, car lors des calculs, la teneur en eau utilisée est prise égale à la moyenne des teneurs en eau dans les différents points de l'élément (maillage), ceci, constitue une approximation dans le calcul du déplacement de surface, considéré seulement comme unidirectionnel, vu la dimension réduite de l'élément.

CHAPITRE 2

FORMULATION EN ELEMENTS FINIS DES EQUATIONS D'ECOULEMENT

2.1 Introduction

La méthode des éléments finis est considérée parmi les techniques numériques les plus générales de résolution des systèmes d'équation aux dérivées partielles soumis à des conditions aux limites connues . Elle a été utilisée dans plusieurs domaines, notamment, dans la mécanique des structures ainsi que dans les problèmes de science physique, tel que, le transfert de chaleur [18,19,44], l'écoulement d'eau en milieux poreux [20,28,29] . Et du fait que le problème d'écoulement d'eau en milieu non saturé et déformable est régi par une équation différentielle non linéaire du second ordre, dont la résolution n'est pas possible par des méthodes analytiques, il paraît alors nécessaire d'utiliser la méthode des éléments finis ou une autre méthode d'approximation numérique de même famille. Ces méthodes numériques deviennent de plus en plus intéressantes dans la mesure où le temps de calcul est très réduit même pour des problèmes non linéaires nécessitant un plus grand nombre d'opérations du fait du calcul itératif. Cette réduction du temps de calcul est liée aux développements récents des techniques informatiques, et des ordinateurs à très grande vitesse, sans oublier aussi, le développement d'algorithmes de calcul très performants [18]. La force de la méthode des éléments finis dans les problèmes d'écoulement est qu'elle peut facilement tenir compte des géométries complexes des régions d'écoulement composées de sol non homogène et présentant certaines anisotropies.

Cet avantage nous permettra le traitement de modèles de plus en plus complexes de type linéaires ou non linéaires. Dans ce chapitre on présentera la formulation et

la résolution du problème par la méthode des élément finis en suivant les étapes suivantes:

- Position du problème, équations d'écoulement et conditions aux limites.
- Formulation par la méthode des résidus pondérés et discrétisation de l'espace.
- Relations élémentaires.
- Assemblage des éléments.
- Intégration dans le temps et résolution.

2.2 Equation différentielle régissant l'étude de l'écoulement

Dans le chapitre précédent nous avons construit notre modèle mathématique sur la base de certaines hypothèses simplificatrices et nous avons abouti à l'équation différentielle suivante pour un écoulement bidimensionnel :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D(\theta)}{1+\beta\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{D(\theta)}{1+\beta\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + G \quad (34)$$

avec :

θ : teneur en eau volumique (L^3/L^3) .

t : temps (T).

x, z : coordonnées cartésiennes (horizontale et verticale) (L).

$D(\theta)$: diffusivité hydraulique en fonction de (θ), (L^2/T).

β : coefficient de proportionnalité entre le taux de déformation (gonflement) et le taux de variation de la teneur en eau (θ), ($\partial \epsilon / \partial t = \beta \cdot \partial \theta / \partial t$).

G : terme de source ponctuelle positif (injection d'eau), il représente le volume d'eau injecté par unité de volume de sol et par unité de temps ($L^3/L^3/T$).

L'équation différentielle (34) est applicable pour n'importe quel point du sol concerné par le mouvement d'eau, ainsi elle peut être considéré comme coeur du modèle. Mais pour une spécification complète du modèle, nous devons être capable de spécifier les conditions initiales et aux limites.

2.3 Conditions aux limites

Dans un problème d'écoulement transitoire deux types de conditions aux limites doivent

être spécifié. On peut prescrire ou imposer la teneur en eau (variable dépendante) sur une partie (ou sur la totalité) des frontières, et le flux sur l'autre partie (ou sur la totalité) mais pas les deux à la fois sur une même partie. En général, les quantités imposées sont fonction du temps. Si on suppose que la région d'écoulement (Ω) est limitée par une frontière Γ , et que cette frontière est divisée en deux segments Γ_1 et Γ_2 de tel sorte que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, alors les conditions aux limites seront:

- Condition de teneur en eau (ou potentiel) imposée ou condition de Dirichlet.

$$\theta(x,z,t) = \theta_B(x,z,t) \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (35)$$

- Condition de flux imposé ou condition de Neuman.

$$\frac{D(\theta)}{1+\beta\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x + \frac{D(\theta)}{1+\beta\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} n_z = -q_n(x,z,t) \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (36)$$

avec θ_B et q_n les quantités imposées (connues), elles sont fonction de x , z et t , et n_x et n_z sont les composantes de la normale unitaire extérieure sur Γ (Figure 4).

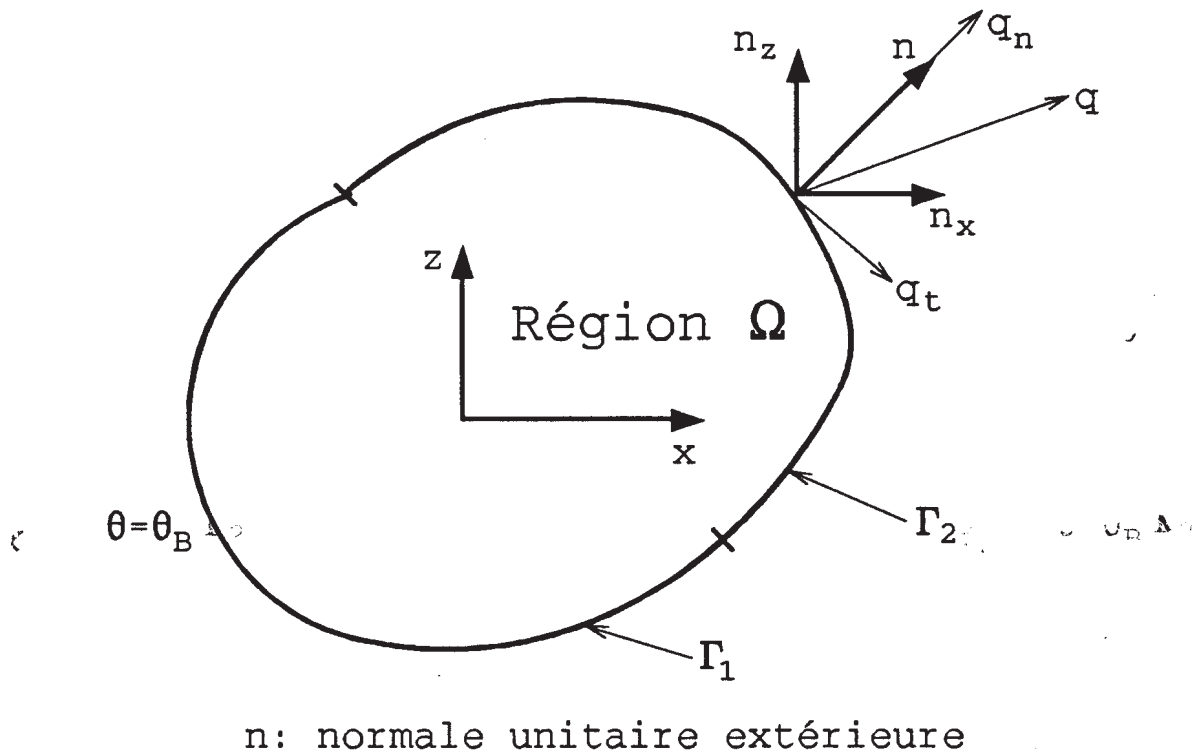


Figure 4: Région bidimensionnelle avec les conditions aux limites

2.4 Formulation en éléments finis

La démarche suivie pour arriver à une formulation "élément finis" consiste en l'utilisation de la méthode des résidus pondérés (schéma de Galerkin) en conjonction avec la discrétisation en éléments finis du domaine. Cette méthode comme celle de Rayleigh-Ritz (principe variationnel) utilise l'expression intégrale contenant l'équation différentielle du problème physique, et ces deux formulations considérées comme des formes "faibles" de description des équations gouvernant le problème physique, tandis que les équations différentielles eux-mêmes représentent la forme "forte".

2.4.1 Principe de la méthode

Dans cette sous section on utilisera les notations suivantes:

- θ : variable dépendante (teneur en eau).
- x : variable indépendante (coordonnée d'un point).
- f, g : fonction de x , ou constantes, ou nulles.
- D, B : opérateurs différentiels.

Ainsi, l'équation différentielle gouvernante et les conditions aux limites de type Neuman pour un problème physique quelconque peuvent être symbolisées par :

$$D\theta - f = 0 \quad \text{dans un domaine } \Omega \quad (37)$$

$$B\theta - g = 0 \quad \text{sur la frontière } \Gamma \quad (38)$$

En général, la solution exacte $\theta = \theta(x)$ de l'équation (37) est inconnue, et elle est souvent difficile à déterminer. Nous cherchons à sa place une solution approximative $\bar{\theta}$. En général $\bar{\theta}$ est une fonction polynomiale satisfaisant les conditions aux limites de type Dirichlet et contenant des coefficients indéterminés a_1, a_2, \dots, a_n . Ainsi, $\bar{\theta} = \bar{\theta}(a, x)$ et elle est "admissible". Pour obtenir la solution approximative nous devons déterminer les valeurs des coefficients a_i .

Si on substitue $\bar{\theta}$ dans les équations (37) et (38), l'égalité n'est pas vérifiée, car $\bar{\theta}$ n'est pas exacte. L'erreur (différence) peut être exprimé comme des résidus R_D et R_B , lesquels sont fonction de x et de a_i :

$$R_D = R_D(a, x) = D\bar{\theta} - f \quad (\text{résidu intérieur}) \quad (39)$$

$$R_B = R_B(a, x) = B\bar{\theta} - g \quad (\text{résidu aux frontières}) \quad (40)$$

Dans plusieurs problèmes physiques, il se trouve que des deux équations (39) et (40), seule la première, c'est à dire R_D , est utilisée pour déterminer les coefficients a_i de l'approximation $\bar{\theta} = \bar{\theta}(a, x)$. La meilleure approximation de θ est celle qui rend le résidu R_D le plus petit possible. Le résidu le plus faible peut être obtenu par différents schémas, et dont chacun d'eux doit produire un système d'équations algébriques, une fois résolu, on obtient les n coefficients a_i .

Il existe principalement trois schémas classiques de résolution par la méthode des résidus pondérés. On les présente comme suit:

a) *Collocation par points:*

Pour n différentes valeurs de x , les résidus sont ramenés à zéro.

$$R_D(a, x_i) = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, j-1 \quad (41)$$

$$R_B(a, x_i) = 0 \quad \text{pour } i = j, j+1, \dots, n \quad (42)$$

b) *Collocation par sous domaine:*

Sur les n différentes régions de Ω et Γ , l'intégrale du résidu est rendue nulle.

$$\int_{\Omega} R_D(a, x) d\Omega = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, j-1 \quad (43)$$

$$\int_{\Gamma} R_B(a, x) d\Gamma = 0 \quad \text{pour } i = j, j+1, \dots, n \quad (44)$$

c) *Méthode de Galerkin:*

Ce schéma donne incontestablement la meilleure approximation, il consiste à choisir des "Fonctions Poids" (ou de pondération) $W_i = W_i(x)$, et rendre nulle les moyennes pondérées du résidu R_D , ou en terme mathématique, nous disons que R_D est rendu orthogonal à la fonction

de pondération.

$$R_i = \int_{\Omega} W_i(x) R_D(a, x) d\Omega = 0 \quad \text{pour } i=1, 2, 3, \dots, n \quad (45)$$

ou pour un système bidimensionnel:

$$R_i = \int_{\Omega} W_i(x, z) R_D(a, x, z) d\Omega = 0 \quad \text{pour } i=1, 2, 3, \dots, n \quad (46)$$

avec n, comme nombre de région du domaine Ω discrétisé en élément finis.

Pour Galerkin, les fonctions de pondération W_i sont égales à $\partial\theta/\partial a_i$, et que le résidu aux frontières R_b est utilisé en combinaison avec l'intégration par partie de manière à introduire les conditions aux limites de type Neuman.

D'autre par, l'équation (46) constitue un système d'équation algébrique, et en explicitant les quantités $W_i(x, z)$ et $R_D(a, x, z)$ pour le problème considéré, on aboutit à un système d'équations sous forme matricielle (à matrice symétrique si le système d'équations différentielles et des conditions aux limites est auto-adjoint).

Notons enfin que la méthode des résidus pondérés est cependant de plus en plus utilisée et qu'elle s'est avérée plus adéquate pour le traitement des problèmes non linéaires (Cook, 1989).

2.4.2 Discrétisation en élément finis

La caractéristique principale de la méthode des éléments finis est la discrétisation de l'espace étudié en sous-domaines de formes géométriques simples "Eléments Finis" (triangle, quadrilatère, etc...) ayant au plus en commun leurs frontières et tel que leur assemblage représente au mieux le solide réel. Les frontières des éléments s'appellent les "lignes nodales" et leurs intersections les "points nodaux" ou tout simplement "Noeuds".

Un système d'axes de coordonnées étant choisi et une numérotation adéquate des éléments finis et des noeuds étant effectuée, la méthode s'intéresse dans un premier temps aux éléments pris un par un (formulation élémentaire ou locale), la formulation globale (ou assemblage), s'effectue ensuite par combinaison des équations élémentaires dans un repère globale tout en respectant les conditions de continuité.

a) *Principe d'approximation:*

A l'intérieur de chaque élément, la fonction inconnue (le potentiel, θ) est approximée par des fonctions linéairement indépendantes et présélectionnés aux inconnues nodales :

$$\theta(x,z,t) \approx \sum_{i=1}^N H_i(x,z) \theta_i(t) = \bar{\theta}(x,z,t) \quad (47)$$

où N est le nombre de noeuds associé à chaque élément, H_i les fonctions de forme ou d'interpolation (choisies) et θ_i sont les inconnues nodales (inconnues du problème). Dans le processus de Galerkin, le nombre de fonction de pondération W_i , doit être égal au nombre d'inconnues nodales, et sont choisies de telle manière que $W_i = H_i$, avec W_i comme fonction de pondération au noeud i .

b) *Fonctions d'interpolation:*

Il s'agit d'interpoler la variable dépendante sur un domaine élémentaire, on doit pour cela en premier lieu choisir l'ordre de l'interpolation (hypothèse sur la variation du potentiel inconnu à l'intérieur de l'élément). Si l'on estime par exemple une variation linéaire en x et linéaire en z (bilinéaire) est suffisante, les fonctions d'interpolation peuvent être du type:

$$H(x,z) = a + bx + cz + dxz \quad (48)$$

Si l'on choisit des fonction d'interpolation polynomiales. Ce qui fait quatre coefficients à déterminer, il faut donc quatre équations qui seront les valeurs de la fonction aux quatre noeuds.

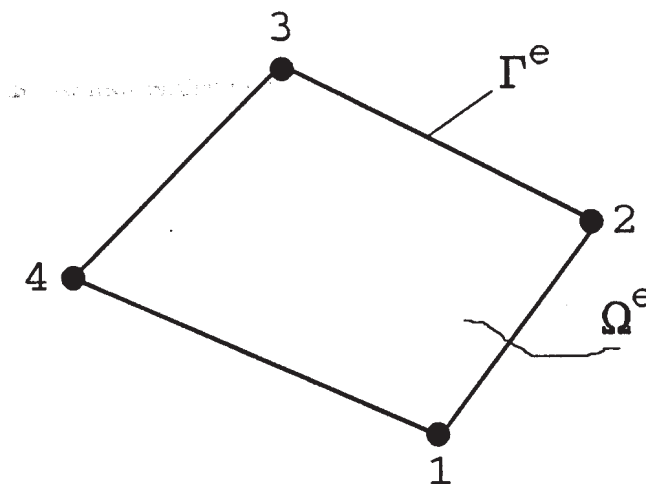


Figure 5

$$\theta(x,z) = \sum_{i=1}^4 H_i(x,z) \theta_i \quad (49)$$

Les fonctions H_i sont calculées à partir de la règle générale suivante :

$H_i^e[(x,z)^j] = \delta_{ij}$, pour tout noeud de l'élément e .

$(x,z)^j = \text{noeud } (j)$;

δ_{ij} = delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$).

Ω^e = intérieur de l'élément e .

Γ^e = frontière de l'élément e .

Notons que $H_i(x,z) = 0$ pour tout noeud n'appartenant pas à l'élément considéré.

Les fonctions de pondération doivent respecter certaines conditions pour assurer la convergence de la méthode, ces conditions sont les suivantes:

- Les fonctions d'interpolation doivent être continues à l'intérieur d'un élément .
- La compatibilité inter-éléments doit être satisfaite jusqu'à l'ordre $(m-1)$, où m est l'ordre maximum des dérivées dans l'équation différentielle du problème physique, c'est la continuité à travers les frontières.
- Les fonctions d'interpolation doivent permettre de représenter une base polynomiale complète d'ordre m .

2.4.3 Application

On considère notre domaine d'écoulement Ω limité par une frontière Γ et lié à un repère globale fixe XOZ . (Figure 6).

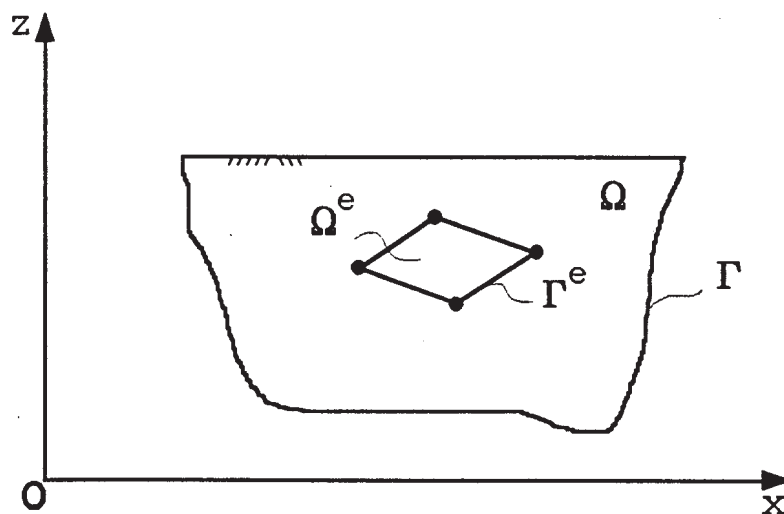


Figure 6: Domaine et notations

2.4.3.1 Equations élémentaires

L'équation différentielle du problème que l'on doit résoudre est :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + G(x,z) - \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \quad (50)$$

avec:

D_x, D_z : diffusivités hydrauliques dans les directions principales ($D_x = D_z = (D(\theta) / 1 + \beta\theta)$)

a) *Formulation par la méthode des résidus pondérés*

Sur un élément Ω^e de frontière Γ^e on a par utilisation de la méthode de Galerkin :

$$\int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + G(x,z) - \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \omega(x,z) dx dz = 0 \quad (51)$$

L'équation (51) représente l'équation résiduelle de Galerkin. La pratique habituelle de la méthode de Galerkin est de commencer par une intégration par partie sur l'équation (51) dans le but de réduire l'ordre de différentiation dans l'intégrale, ainsi que l'introduction des conditions aux limites de type Neuman .

L'équation (51) peut être transformée comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \omega(x,z) dx dz + \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \omega(x,z) dx dz + \int_{\Omega^e} G(x,z) \omega(x,z) dx dz \\ - \int_{\Omega^e} \frac{\partial \theta}{\partial t} \omega(x,z) dx dz = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

En intégrant par partie les deux premiers termes de l'équation (52), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} D_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial z} D_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - G \omega \right] dx dz - \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\omega D_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\omega D_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right] dx dz \\ + \int_{\Omega^e} \frac{\partial \theta}{\partial t} \omega(x,z) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

car:

$$\frac{\partial PQ}{\partial x} = P \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial P}{\partial x}$$

(P.e: $P = \omega(x,z)$ et $Q = D_x \partial\theta/\partial x$).

En appliquant le théorème de la divergence (ou formule du gradient) donné par l'équation:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega = \oint_{\Gamma} P \cdot n_x dS \quad (54)$$

A la deuxième intégrale dans l'équation (53), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} D_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial z} D_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - G \omega \right] dx dz - \int_{\Gamma'} \left(D_x \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x + D_z \frac{\partial \theta}{\partial z} n_z \right) \omega ds \\ + \int_{\Omega'} \frac{\partial \theta}{\partial t} \omega(x,z) dx dz = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

Mais sachant que :

$$D_x \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x + D_z \frac{\partial \theta}{\partial z} n_z = q_n \quad (56)$$

N'est que la condition du flux imposé (ou condition de Neuman) . Le changement du signe de (q_n) par rapport à l'équation (36) est dû à la convention des signes adoptée, stipulant que le flux aux frontières est considéré comme positif pour un écoulement entrant .

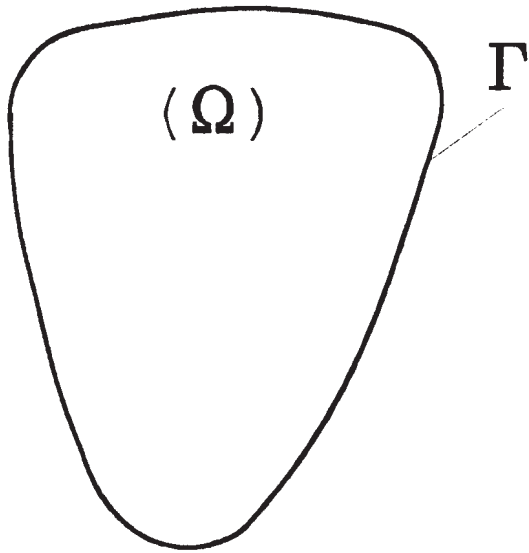
Ainsi, en substituant (q_n) dans l'équation (55), on obtient:

$$\int_{\Omega'} \left[D_x \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + D_z \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} - G \omega \right] dx dz - \int_{\Gamma'} q_n \omega ds + \int_{\Omega'} \frac{\partial \theta}{\partial t} \omega dx dz = 0 \quad (57)$$

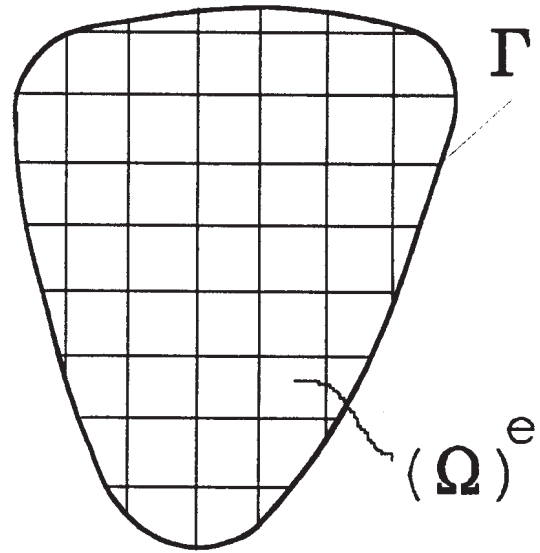
b) Formulation matricielle

Après décomposition du domaine à étudier en sous domaines "éléments finis" (Figure 7), on approche à l'intérieur de chaque élément le potentiel inconnu (θ) par des fonctions linéairement indépendantes (H_i) (choisies) aux inconnues nodales (θ_i).

$$\theta(x,z,t) \approx \sum_{i=1}^N H_i(x,z) \theta_i(t) \quad (58)$$



a. solide réel



b. solide décomposé

Figure 7: Discrétisation de l'espace

Pour Galerkin, les fonctions de pondération W_j sont égales aux fonctions de forme H_j (indice j car pour chaque noeud i , lui correspondra une fonction de forme H_i), et de plus ces fonctions doivent être continues de classe C^1 (une fois dérivable, et la dérivée est continue).

En substituant θ et ω dans l'équation (57) on obtient:

$$\int_{\Omega^e} \left[D_x \frac{\partial H_j}{\partial x} \sum_{i=1}^N \theta_i \frac{\partial H_i}{\partial x} + D_z \frac{\partial H_j}{\partial z} \sum_{i=1}^N \theta_i \frac{\partial H_i}{\partial z} - G H_j \right] dx dz - \int_{\Gamma^e} q_n H_j ds + \int_{\Omega^e} H_j \sum_{i=1}^N H_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} dx dz = 0 \quad (59)$$

et sous forme matricielle:

$$[D_{ij}]^e \{\theta_i\}^e + [C_{ij}]^e \{\dot{\theta}_i\}^e = \{F_j\}^e \quad (60)$$

avec:

$$D_{ij} = \int_{\Omega^e} \left(D_x \frac{\partial H_i}{\partial x} \frac{\partial H_j}{\partial x} + D_z \frac{\partial H_i}{\partial z} \frac{\partial H_j}{\partial z} \right) dx dz \quad (61)$$

$$C_{ij} = \int_{\Omega^e} H_i(x,z) H_j(x,z) dx dz \quad (62)$$

$$F_j = \int_{\Omega^e} G(x,z) H_j(x,z) dx dz + \int_{\Gamma^e} q_n H_j(x,z) ds \quad (63)$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \quad (64)$$

D_{ij} : Représente la matrice de diffusivité hydraulique élémentaire, elle est fonction de la solution elle-même θ . Elle est l'équivalent de la matrice de rigidité en mécanique des structures et possède la propriété de symétrie.

C_{ij} : Représente la matrice d'emménagement (ou de capacité) hydraulique élémentaire. Elle est égale à la quantité d'eau emmagasinée dans le système d'écoulement lorsque la teneur en eau θ au noeud i varie d'une unité par unité de temps. Pour les calculs, elle peut être approximée par une matrice diagonale sans une perte significative de l'exactitude (Wilson et al, 1974). Une telle approximation réduit le temps de calcul ainsi que le stockage dans la machine.

F_j : Représente le vecteur force hydraulique nodale élémentaire. Il est égale à la somme du vecteur "force de volume" et du vecteur "force de surface".

L'équation (60) représente l'équation élémentaire matricielle gouvernant l'équilibre d'écoulement issue de la formulation éléments finis du problème, elle exprime la relation très simple entre les vecteurs des inconnues nodales et de leurs dérivées temporelles $\{\theta\}$ et $\{\dot{\theta}\}$ et le vecteur des forces nodales $\{F_j\}$.

Le calcul des termes $[D_{ij}]^e$, $[C_{ij}]^e$ et $[F_j]^e$ passe nécessairement par un calcul d'intégrale, et très souvent par intégration numérique. Ceci étant réalisé après le choix de la forme de l'élément (géométrie), le nombre de noeuds, leur position sur l'élément et enfin la matrice des fonctions de forme. Ces étapes seront développées dans les prochaines sections.

La recherche des inconnues nodales ne s'opère pas sur l'équation élémentaires (60), mais on doit constituer une autre équation appelée "équation matricielle globale" exprimant l'équilibre de l'ensemble des éléments dans la région d'écoulement.

2.4.3.2 Equations globales

Dans la méthode des éléments finis, les matrices de diffusivité $[D_{ij}]$ et de capacité $[C_{ij}]$ ainsi que le vecteur force hydraulique $\{F_j\}$ élémentaires sont calculés séparément, et ensuite ils seront assemblés dans des matrices et vecteurs contenant l'ensemble des informations pour tous les éléments du milieu discrétisé.

L'assemblage doit se faire en respectant sur tout le milieu d'écoulement la continuité des teneurs en eau (θ) et de leurs dérivés par rapport au temps ($\dot{\theta}$). Ceci est réalisé en écrivant que pour des éléments adjacents les teneurs en eau et leurs dérivées temporelles sont égales aux noeuds communs. L'égalité aux noeuds communs implique en effet la continuité sur toute la facette commune et en conséquence sur tout le milieu étudié.

Pour réaliser l'assemblage, on dispose de deux méthodes, la première est classique, elle est basée sur le principe d'expansion des matrices et des vecteurs forces élémentaires à la dimension de la matrice et du vecteur force global. Cette méthode est un moyen conceptuel utile, mais du point de vue calcul elle est lente et très encombrante.

La deuxième méthode est plus générale et plus rapide, l'assemblage est guidé par la numérotation globale des noeuds, celle-ci détermine la position dans les matrices et vecteur global pour lesquels les termes dans les matrices et vecteurs élémentaires sont affectés ou ajoutés. Ceci est valable pour n'importe quel élément fini, et indépendamment du type, de la taille, de la forme, ou du nombre de noeuds.

Dans ce qui suit, on présentera les deux méthodes de manière développée.

a) Méthode classique

Le processus d'assemblage des éléments peut être symbolisé par $[D]^G = \Sigma [D]^e$. Cette sommation peut être effectuée seulement si chacune des matrices élémentaires $[D]^e$ opère sur tout le vecteur des inconnues nodales (ou degré de liberté, ddl), $\{\theta\}^G$.

Si le milieu possède n degré de liberté, ceci implique que chaque matrice $[D]^e$ doit être expansé ou étendu pour devenir une matrice $n \times n$, c'est à dire à la dimension de la matrice globale $[D]^G$.

L'expansion des matrices est réalisée comme suit :

Désignons par θ_G la matrice des potentiels (teneur en eau) nodaux et par $\dot{\theta}_G$ sa dérivée temporelle:

$$\text{Avec: } \theta_G = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n] \quad (65)$$

$$\dot{\theta}_G = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{\theta}_n] \quad (66)$$

On peut définir de façon analogue les matrices élémentaires θ_E^K et $\dot{\theta}_E^K$ correspondant aux teneurs en eau et leurs dérivées temporelle aux noeuds de l'élément K.

Les équations de continuité s'écrivent alors :

$$\theta_E^K = P^K \theta_G \quad (67)$$

$$\dot{\theta}_E^K = P^K \dot{\theta}_G \quad (68)$$

et de même pour les forces hydrauliques nodales:

$$F_E^K = P^K F_G \quad (69)$$

P^K est une matrice de connexion ou de transformation et dont tous les termes sont nuls, exceptés ceux qui permettent d'écrire l'égalité des composantes des matrices élémentaires avec les termes correspondants dans la matrice globale. Les termes non nuls de P^K sont égaux à l'unité lorsque les repères locaux et globaux sont identiques, sinon il faut tenir compte des changements d'axes.

En substituant les valeurs de θ_E^K et de $\dot{\theta}_E^K$ dans l'équation (60), on obtient:

$$C_E^K \cdot P^K \dot{\theta}_G + D_E^K \cdot P^K \theta_G = F_E^K \quad (70)$$

En multipliant les deux membres de l'équation (70) par P^{KT} (T: Transposée), on obtient:

$$P^{KT} \cdot C_E^K P^K \dot{\theta}_G + P^{KT} \cdot D_E^K P^K \theta_G = P^{KT} \cdot F_E^K \quad (71)$$

Mais d'après l'équation (69), $P^{KT} F_E^K$ est égale à F_G . L'équation (71) devient alors:

$$P^{KT} C_E^K P^K \dot{\theta}_G + P^{KT} D_E^K P^K \theta_G = F_G \quad (72)$$

La sommation de cette équation sur l'ensemble des éléments K donne:

$$C_G \dot{\theta}_G + D_G \theta_G = F_G \quad (73)$$

$$C_G = \sum_K P^{KT} C_E^K P^K \quad (74)$$

$$D_G = \sum_K P^{KT} D_E^K P^K \quad (75)$$

$$F_G = \sum_K P^{KT} F_E^K \quad (76)$$

L'expression $P^{KT} D_E^K P^K$ représente l'expansion de la matrice élémentaire D_E^K à la matrice globale D_G^K .

L'équation (73) est l'équation matricielle globale du système d'écoulement, et c'est à partir duquel qu'on peut déterminer les inconnues nodales par intégration dans le temps du système d'équations.

b) Méthode générale

Dans cette méthode, le processus d'assemblage est guidé par les numéros des noeuds, ces derniers déterminent les positions dans les matrices et vecteurs globaux où devront être attribué ou additionné les termes des matrices élémentaires correspondants. Pour cela et après la numérotation des noeuds, on procède à la préparation d'un tableau de correspondance entre numérotation locale dans l'élément et globale pour l'ensemble des éléments, ce tableau aura autant de lignes que d'éléments dans le milieu discrétisé, et autant de colonnes que de noeuds par élément. Une fois construit, ce tableau est stocké en mémoire, et on lui fera appel chaque fois qu'on veut positionner les termes ou coefficients d'une matrice élémentaire dans la matrice globale.

On peut construire un algorithme de calcul pour ce processus d'assemblage en suivant les étapes suivantes :

- Après avoir introduit les données suivantes:
 - . Fichier des matrices et vecteurs élémentaires.
 - . Le nombre de noeuds et d'éléments.
 - . Le tableau de correspondance.
- Initialisation à zéro des matrices et vecteurs globaux .
- Ouvrir une boucle sur les éléments.

- Lire les matrices et vecteurs élémentaires.
- Ouvrir une boucle sur les noeuds (I) de l'élément.
- A partir du tableau de correspondance, identifier le numéro du noeud (I) actuel.
- Etablir la position en ligne dans les matrices et vecteurs globaux.
- Etablir la position en ligne dans les matrices et vecteurs élémentaires.
- Ajouter la contribution au vecteur global à partir du vecteur élémentaire.
- Ouvrir une boucle sur les noeuds (J) de l'élément.
- A partir du tableau de correspondance, identifier le numéro du noeud (J) actuel.
- Etablir la position en colonne dans les matrices globales.
- Etablir la position en colonne dans les matrices élémentaires.
- Ajouter la contribution aux matrices globales à partir des matrices élémentaires.
- Fin de la boucle sur les éléments.
- On obtient en fichier résultats les matrices globales C_G et D_G et le vecteur globale F_G .

On remarque enfin que la méthode générale est plus simple et rapide car nécessitant moins d'opérations que la méthode classique. Elle sera utilisée dans notre programme de calcul en cas d'assemblage des éléments.

2.4.3.3 Calcul des matrices et vecteurs élémentaires

a) Choix de l'élément

Dans les premières applications de la méthode des éléments finis, seules les familles des éléments triangulaires et rectangulaires ont été utilisées, mais le besoin de modéliser des domaines à géométries arbitraires a activé le développement d'une nouvelle famille d'éléments appelée "isoparamétrique", celle-ci peut générer des domaines à géométries complexes ainsi que les frontières courbes (écoulement autour d'un cylindre). Ce type d'élément est bien souhaité dans les problèmes physiques gouvernés par une équation différentielle contenant des dérivées spatiales du second ordre (Cook, 1989), comme par exemple les problèmes de transfert de chaleur et d'écoulement en milieux poreux ainsi que l'analyse des structure en contraintes planes.

Il a été démontré (Cook, 1989) que les éléments isoparamétriques convergent très rapidement et avec une meilleure précision, surtout ceux contenant huit noeuds et plus.

Pour notre problème d'écoulement bidimensionnel, on a choisi l'élément isoparamétrique parabolique à huit noeuds (Figure 8). Cet élément est extrêmement souple, très performant, bien

testé, et qui a fait ses preuves (Wilson et al, 1973, Hinton et Owen, 1977). L'expérience pratique suggère que pour un nombre donné de degré de liberté pour un milieu, une meilleure exactitude est atteinte par l'utilisation de moins d'éléments complexes que de plusieurs éléments simples. Dans les problèmes non linéaires, l'intérêt peut être plus marqué que dans les cas linéaires.

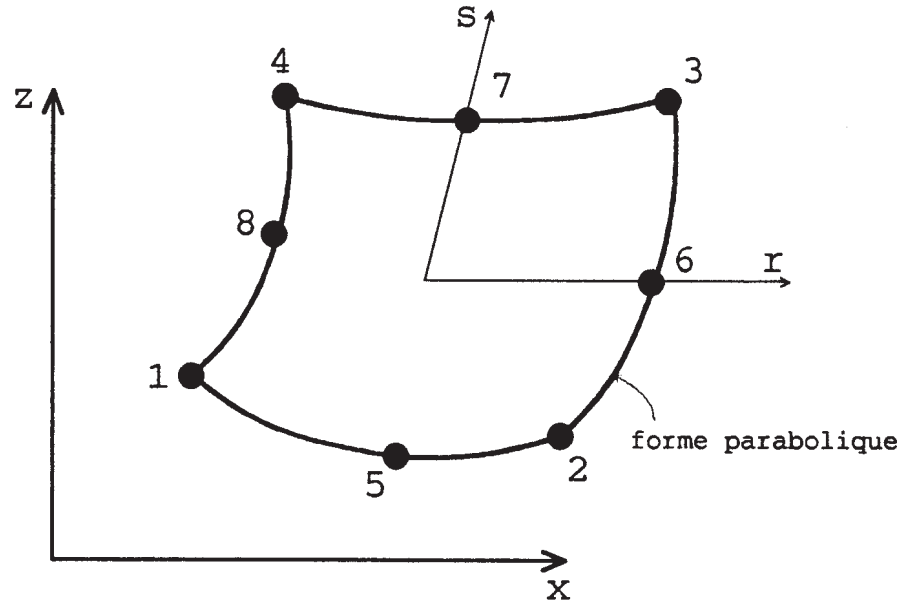


Figure 8: Élément isoparamétrique bidimensionnel à 8 noeuds

b) Formulation isoparamétrique

Soit à calculer les termes suivants:

$$D_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(D_x \frac{\partial H_i}{\partial x} \frac{\partial H_j}{\partial x} + D_z \frac{\partial H_i}{\partial z} \frac{\partial H_j}{\partial z} \right) dx dz$$

$$C_{ij}^e = \int_{\Omega^e} H_i H_j dx dz$$

$$F_j^e = \int_{\Omega^e} G H_j dx dz + \int_{\Gamma^e} q_n H_j ds$$

i, j: varient de 1 à N.

N: nombre de points pour l'interpolation de la variable dépendante (θ) dans Ω^e (ou Noeud; N=8).

Comme il est plus facile de calculer des intégrales sur l'intervalle $[-1, 1]$, nous allons avant tout calcul, transformer notre domaine $\Omega^e(x,z)$ en un domaine plus simple par une relation bijective . Ainsi un élément de référence est construit, possédant son propre repère local (r,s) (Figure 9).

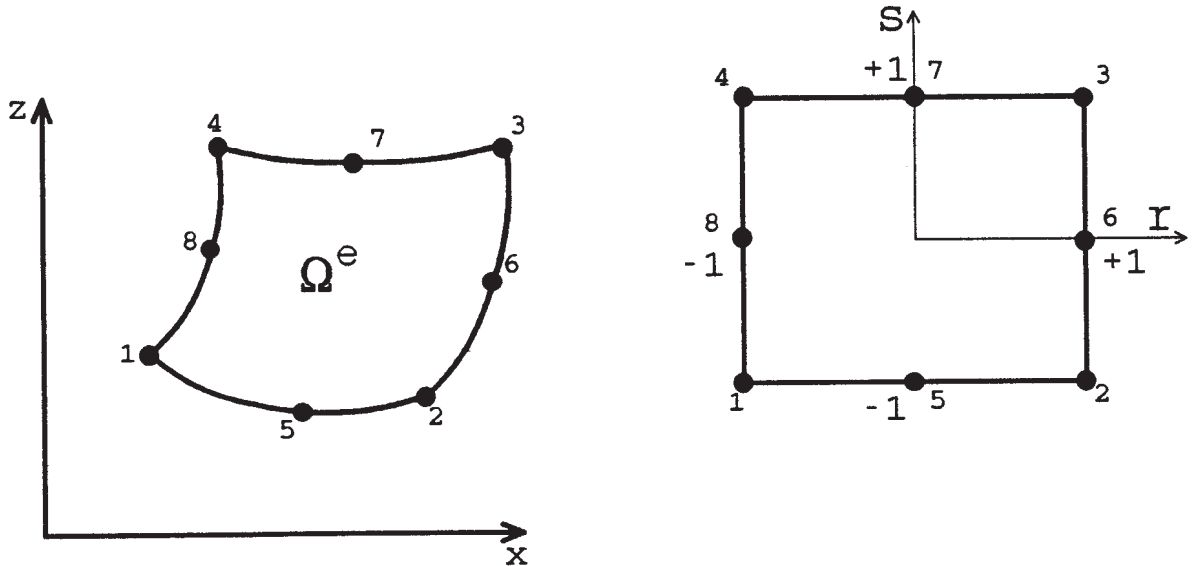


Figure 9: Elément réel et élément de référence

Sur cet élément de référence, les calculs d'intégrales sont en effet très simplifiées.

La transformation bi-univoque du domaine d'intégration:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^e & \longrightarrow & [-1, 1] \times [-1, 1] \\ F: (x,z) & \longrightarrow & (r, s) = F(x, z) \end{array}$$

L'interpolation du domaine d'intégration $\Omega^e(x,z)$ ou de la géométrie est donnée par:

$$x(r,s) = \sum_{i=1}^8 x_i H_i(r,s) \quad (77)$$

$$z(r,s) = \sum_{i=1}^8 z_i H_i(r,s) \quad (78)$$

où (x_i, z_i) sont les coordonnées du noeud i .

Puisque l'élément est isoparamétrique, on utilisera alors les mêmes points d'interpolation "Noeuds", ainsi que les mêmes fonctions d'interpolation H_i pour l'interpolation de la variable dépendante θ :

$$\theta(r,s) = \sum_{i=1}^8 H_i(r,s) \theta_i \quad (79)$$

Comme il a été donné par l'équation (49), la valeur de la fonction H_i au noeud i est égale à 1 et zéro ailleurs.

$$\begin{cases} H_i(r_i, s_i) = 1 \\ H_i(r_j, s_j) = 0 \quad \text{pour } i \neq j \end{cases}$$

Pour notre élément isoparamétrique parabolique à 8 noeuds, les fonctions d'interpolation ou de formes H_i sont quadratiques et sont données par:

$$H_1(r,s) = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) - \frac{1}{2}(H_8 + H_5) \quad (80)$$

$$H_2(r,s) = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) - \frac{1}{2}(H_5 + H_6) \quad (81)$$

$$H_3(r,s) = \frac{1}{4}(1+r)(1+s) - \frac{1}{2}(H_6 + H_7) \quad (82)$$

$$H_4(r,s) = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) - \frac{1}{2}(H_7 + H_8) \quad (83)$$

$$H_5(r,s) = \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s) \quad (84)$$

$$H_6(r,s) = \frac{1}{2}(1+r)(1-s^2) \quad (85)$$

$$H_7(r,s) = \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s) \quad (86)$$

$$H_8(r,s) = \frac{1}{2}(1-r)(1-s^2) \quad (87)$$

Les fonctions H_i correspondent aux numéros des noeuds donnés sur l'élément de la figure 9.

Nous allons à présent calculer les dérivées partielles des fonctions $H_i(r,s)$.

On a:

$$H_i(x,z) = H_i(x(r,s), z(r,s)) \quad (88)$$

En utilisant la règle des chaînes on obtient:

$$\frac{\partial H_i}{\partial x} = \frac{\partial H_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial H_i}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \quad (89)$$

et:

$$\frac{\partial H_i}{\partial z} = \frac{\partial H_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial H_i}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} \quad (90)$$

Sous forme matricielle les équations (89) et (90) s'écrivent:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial x} \\ \frac{\partial H_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial s}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial r} \\ \frac{\partial H_i}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (91)$$

La matrice de la transformation ci-dessus n'est autre que l'inverse de la matrice Jacobienne

de la transformation $([J]^{-1})$.

$$x, z \longrightarrow (r, s)$$

Calculons à présent la matrice Jacobienne $[J]$.

On a en effet:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 x_i \frac{\partial H_i}{\partial r} & \sum_{i=1}^8 z_i \frac{\partial H_i}{\partial r} \\ \sum_{i=1}^8 x_i \frac{\partial H_i}{\partial s} & \sum_{i=1}^8 z_i \frac{\partial H_i}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (92)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial r} & \frac{\partial H_2}{\partial r} & \dots & \frac{\partial H_8}{\partial r} \\ \frac{\partial H_1}{\partial s} & \frac{\partial H_2}{\partial s} & \dots & \frac{\partial H_8}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & z_8 \end{bmatrix}$$

Alors:

$$[J] = [DFF] \cdot [ELXZ] \quad (93)$$

ou:

$[DFF]$: Matrice des Dérivées des Fonctions de Forme dans le plan (r, s) .

$[ELXZ]$: Matrice des Coordonnées des noeuds.

Il est important de noter qu'un élément du surface $dx dz$ peut être calculé par l'expression:

$$dx dz = \det[J] dr ds = |J| dr ds \quad (94)$$

En inversant la matrice Jacobienne $[J]$ après avoir été calculée, on obtient:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial x} \\ \frac{\partial H_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial r} \\ \frac{\partial H_i}{\partial s} \end{Bmatrix} = [J^*] \begin{Bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial r} \\ \frac{\partial H_i}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (95)$$

En effectuant le changement de variable, l'équation (61) devient:

Tous les termes de cette équation sont connus, il ne reste qu'à calculer l'intégrale.

Evidement, comme l'équation (60) est non linéaire, c'est à dire, le terme D_{ij} est lui même fonction de l'inconnue θ , ceci réside dans les termes D_x et D_z (Voir équation (50)). Et comme on utilisera un processus itératif pour la recherche des solutions, alors une valeur donnée doit

$$D_{ij}^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[D_x \left(J_{11}^* \frac{\partial H_i}{\partial r} + J_{12}^* \frac{\partial H_i}{\partial s} \right) \left(J_{11}^* \frac{\partial H_j}{\partial r} + J_{12}^* \frac{\partial H_j}{\partial s} \right) \right. \\ \left. + D_z \left(J_{21}^* \frac{\partial H_i}{\partial r} + J_{22}^* \frac{\partial H_i}{\partial s} \right) \left(J_{21}^* \frac{\partial H_j}{\partial r} + J_{22}^* \frac{\partial H_j}{\partial s} \right) \right] |J| dr ds \quad (96)$$

être attribuée à θ , ainsi D_x et D_z seront connues pour permettre l'évaluation de l'intégrale .

Le terme C_{ij} étant indépendant de la solution (θ), il se calcule comme suit:

$$C_{ij}^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} H_i(x(r,s), z(r,s)) \cdot H_j(x(r,s), z(r,s)) |J(r,s)| dr ds \quad (97)$$

Le calcul du second membre F_j^e se calcule aussi de la même manière:

$$F_j^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} G(x(r,s), z(r,s)) \cdot H_j(x(r,s), z(r,s)) |J(r,s)| dr ds \\ + \int_{-1}^{+1} q_n \cdot H_j(x(r,1)) |J(r,1)| dr \quad (98)$$

où $x(r,s)$ et $z(r,s)$ sont donnés par les équations (77) et (78).

Il est à noter que l'équation (98) convertit la distribution du "chargement" hydraulique à l'intérieur ou à la surface de l'élément (G ou q_n) à un chargement nodale et que l'intégrale de surface est nulle jusqu'à ce que l'élément à calculer possède une face sur la frontière et soumise à un "chargement" hydraulique (q_n).

Le "chargement" hydraulique $\{F_j\}$ est appelé chargement à travail équivalent ou aussi chargement consistant, car il est basé sur les mêmes fonctions de forme utilisées pour le calcul des matrices D_{ij} et C_{ij} . Il est statiquement équivalent à la distribution du chargement initial, c'est à dire $\{F_j\}$ et le chargement initial ont la même force résultante et le même moment autour de n'importe quel point choisi sur l'élément. Dans le programme de calcul et pour des raisons de commodité, la contribution dans $\{F_j\}$ du chargement de surface est évaluée à part.

Dans le deuxième terme de l'équation (98), on a posé $s=1$, car seule la face de l'élément ayant $s=1$ est soumise au chargement de surface (q_n).

L'évaluation des quatres intégrales précédentes doit s'effectuer en utilisant une technique numérique plutôt qu'un calcul analytique, car ce dernier conduit très souvent à de longues expressions, difficilement manipulables et par conséquent exposées aux erreurs algébriques.

c) Intégration numérique

La technique d'intégration numérique utilisée pour calculer les termes élémentaires D_{ij} , C_{ij} et F_j est celle des quadratures de Gauss. Cette méthode est puissante, précise (très faible erreur), et facilement implémentable. Elle consiste à faire un changement de variable de $[a,b]$ vers $[-1,1]$, (déjà réalisé pour nos intégrales par la formulation isoparamétrique), et à interpoler par un polynôme de Lagrange dont les zéros sont les racines des polynômes de Legendre (d'où le nom des quadratures de Gauss-Legendre).

Il doit être noté qu'un polynôme de degré $(2n-1)$ est intégré exactement par n points de Gauss.

En général, la formule des quadratures de Gauss pour une dimension est donnée par:

$$I = \int_{-1}^{+1} \phi(r) dr = \sum_{i=1}^n \omega_i \phi(r_i) \quad (99)$$

avec:

ω_i : Facteur de pondération.

r_i : Coordonnée du point d'intégration i .

n : Nombre total des points d'intégration choisis.

$\phi(r)$: Fonction polynomiale à intégrer.

Un tableau de valeurs des paramètres ω_i et r_i en fonction de n et de i est dressé en page 86 où les chiffres romains indiquent la position des points de Gauss.

La règle multidimensionnelle de Gauss appelée "Produit de Gauss" est formée par une application successive de la règle unidimensionnelle. Pour le cas à deux dimensions, on considère la fonction $\phi(r,s)$, et on choisit d'intégrer premièrement par rapport à r et ensuite par rapport à s .

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi(r,s) dr ds = \int_{-1}^{+1} \left[\sum_i \omega_i \phi(r_i, s) \right] ds \\ &= \sum_j \omega_j \left[\sum_i \omega_i \phi(r_i, s_j) \right] = \sum_i \sum_j \omega_i \omega_j \phi(r_i, s_j) \end{aligned} \quad (100)$$

Et pour le cas à trois dimensions, la règle des quadratures de Gauss est de la forme:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(q, r, s) dq dr ds = \sum_i \sum_j \sum_k \omega_i \omega_j \omega_k \phi(q_i, r_j, s_k) \quad (101)$$

En utilisant les équations (99) et (100) pour calculer les termes D_{ij} , C_{ij} et F_j , on obtient:

$$D_{ij}^e = \sum_{I=1}^{NPG} \sum_{J=1}^{NPG} D_x \left[\left(J_{11}^*(r_I, s_J) \frac{\partial H_i}{\partial r}(r_I, s_J) + J_{12}^*(r_I, s_J) \frac{\partial H_i}{\partial s}(r_I, s_J) \right) \right. \\ \left. \left(J_{11}^*(r_I, s_J) \frac{\partial H_j}{\partial r}(r_I, s_J) + J_{12}^*(r_I, s_J) \frac{\partial H_j}{\partial s}(r_I, s_J) \right) \right] + D_z \left[\left(J_{21}^*(r_I, s_J) \frac{\partial H_i}{\partial r}(r_I, s_J) + J_{22}^*(r_I, s_J) \frac{\partial H_i}{\partial s}(r_I, s_J) \right) \right. \\ \left. \left(J_{21}^*(r_I, s_J) \frac{\partial H_j}{\partial r}(r_I, s_J) + J_{22}^*(r_I, s_J) \frac{\partial H_j}{\partial s}(r_I, s_J) \right) \right] |J(r_I, s_J)| \omega_{rI} \omega_{sJ} \quad (102)$$

où NPG représente le nombre de points de Gauss choisis pour l'intégration numérique, r_I et s_J sont les coordonnées du point de Gauss I dans la direction r et J dans la direction s. ω_{rI} et ω_{sJ} sont les facteurs de pondération correspondants.

Dans le sous-programme de calcul des matrices élémentaire D_{ij} , nous aurons à effectuer quatre boucles imbriquées, une sur i, une sur j, une sur I et une sur J, pour l'intégration numérique de D_{ij} .

n	i	r_i	ω_i
1	<i>I</i>	0	2
2	<i>I</i>	$\frac{+1}{\sqrt{3}}$	+1
	<i>II</i>	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	+1
3	<i>I</i>	0	$\frac{8}{9}$
	<i>II</i>	$+\sqrt{6}$	$\frac{5}{9}$
	<i>III</i>	$-\sqrt{6}$	$\frac{5}{9}$
4	<i>I</i>	$\left \frac{3+2r}{7} \right ^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{6r}$
	<i>II</i>	$-\left \frac{3+2r}{7} \right ^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{6r}$
	<i>III</i>	$\left \frac{3-2r}{7} \right ^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6r}$
	<i>IV</i>	$-\left \frac{3-2r}{7} \right ^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6r}$

avec $r = \sqrt{1.2}$

Tableau des valeurs des paramètres de Gauss

Pour la matrice élémentaire C_{ij} , on obtient:

$$C_{ij}^e = \sum_{I=1}^{NPG} \sum_{J=1}^{NPG} H_i(x(r_{PSJ}), z(r_{PSJ})) * H_j(x(r_{PSJ}), z(r_{PSJ})) |J(r_{PSJ})| \omega_{rI} \omega_{zJ} \quad (103)$$

Pour le vecteur force hydraulique nodale $\{F_j^e\}$, l'intégration numérique réalisée pour le premier terme F_{jG}^e (Vecteur Force de volume), donne:

$$F_{jG}^e = \sum_{I=1}^{NPG} \sum_{J=1}^{NPG} G(x(r_{PSJ}), z(r_{PSJ})) * H_j(x(r_{PSJ}), z(r_{PSJ})) |J(r_{PSJ})| \omega_{rI} \omega_{zJ}$$

Pour le deuxième terme de $\{F_j^e\}$, c'est à dire le chargement de surface F_{jqn}^e , appliqué seulement sur une facette des éléments de frontière (Figure 10).

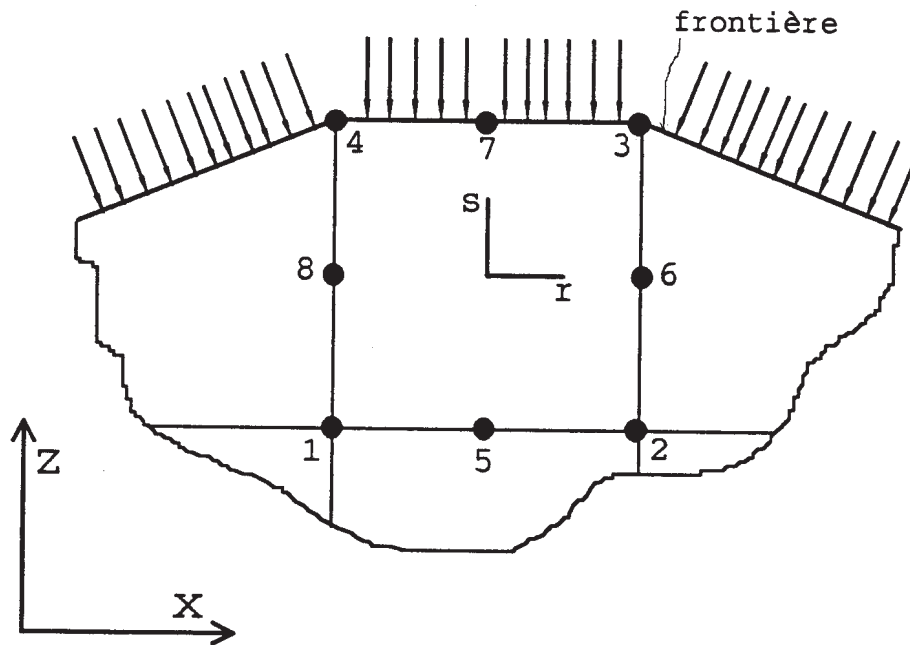


Figure 10: Élément isoparamétrique quadratique à la frontière soumis au chargement hydraulique de surface

Donc, seuls les noeuds 4, 7, 3 seront concernés par la force nodale équivalente, alors, l'intégration numérique de F_{jqn}^e donne:

$$F_{jqn}^e = \sum_{I=1}^{NPG} q_n \cdot H_j(x(r_{P1})) |J(r_{P1})| \cdot \omega_{rI} \quad (105)$$

A présent, il reste à définir le nombre de point de Gauss (NPG) utilisés pour l'intégration numérique des quatre termes D_{ij} , C_{ij} , F_{jG} et F_{jqn} . Selon la règle générale, un polynôme de degré $(2n-1)$, est exactement intégré par n points de Gauss, et l'utilisation de plus des n points conduit aussi à un résultat exact.

Alors NPG dépend des fonctions de formes (H_i) et de la forme de D_{ij} , C_{ij} , F_{jG} et F_{jqn} .

Les fonctions de forme (H_i) sont du deuxième degré en r et en s , la règle donne deux points de Gauss pour r et deux points pour s , et comme on intègre sur le domaine (r,s) , alors quatre points de Gauss (NPG = 2) sont suffisants pour garantir l'exactitude de l'intégration.

2.4.3.4 Discrétisation et intégration dans le temps

a) Introduction

Dans les sections précédentes, on a établi l'équation matricielle de l'écoulement dans un repère global (équation 73), ainsi que la méthode d'évaluation de ces différents termes. Ces derniers étant en fonction du temps, car le phénomène est transitoire, de plus il est non linéaire car la matrice de diffusivité hydraulique (D_{ij}) dépend elle même de la solution (θ) .

$$C\dot{\theta} + D(\theta,t)\theta = F(t) \quad (106)$$

Alors, la recherche des inconnues pour ce type de problème passe nécessairement par une intégration directe dans le temps (méthode pas à pas) combinée avec un processus itératif.

b) Méthode d'intégration directe

Il existe de nombreuses méthodes d'intégration directe dans le temps, tant implicites qu'explicites, mais le choix reste fortement lié au problème considéré. Dans cette section, on présentera les deux types de méthode et en dernier lieu on donnera avec plus de détails la méthode utilisée, ainsi que l'algorithme devant être implémenté dans notre programme de calcul.

Dans l'intégration directe, l'approche est d'écrire l'équation d'écoulement (équation 73), à un instant de temps donné:

$$[C]\{\dot{\theta}\}_n + [D]_n\{\theta\}_n = \{F\}_n \quad (107)$$

Où l'indice n indique le temps $n\Delta t$ (ou $t + \Delta t$) et avec Δt comme incrément de temps ou pas de temps.

Pour l'intégration directe de l'équation (107) en employant une méthode explicite, on a la forme suivante:

$$\{\theta\}_{n+1} = f(\{\theta\}_n, \{\dot{\theta}\}_n, \{\theta\}_{n-1}, \{\dot{\theta}\}_{n-1}, \dots) \quad (108)$$

Cette méthode permet la détermination de $\{\theta\}_{n+1}$ en fonction des informations complètes sur l'histoire antérieure, c'est à dire sur la teneur en eau et sa dérivée temporelle au temps $n\Delta t$ et avant.

Mais en utilisant une méthode implicite on aura la forme suivante:

$$\{\theta\}_{n+1} = f(\{\dot{\theta}\}_{n+1}, \{\theta\}_n, \dots) \quad (109)$$

Où le calcul de $\{\theta\}_{n+1}$, nécessite la connaissance de sa dérivée temporelle elle même, laquelle est une inconnue. Ainsi les méthodes implicites et explicites ont des propriétés différentes, ceci a une implication importante en pratique.

b1- Méthodes explicites:

La méthode populaire, laquelle est caractéristique des méthodes explicites en général, est la méthode de la différence centrée, celle-ci approxime la dérivée temporelle de la teneur en eau par:

$$\{\dot{\theta}\}_n = \frac{1}{2\Delta t}(\{\theta\}_{n+1} - \{\theta\}_{n-1}) \quad (110)$$

L'équation (110) est obtenue par un développement en série de Taylor autour du temps $n\Delta t$ des quantités $\{\theta\}_{n+1}$ et $\{\theta\}_{n-1}$:

$$\{\theta\}_{n+1} = \{\theta\}_n + \Delta t \{\dot{\theta}\}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{\theta}\}_n + \frac{\Delta t^3}{6} \{\ddot{\theta}\}_n + \dots \quad (111)$$

$$\{\theta\}_{n-1} = \{\theta\}_n - \Delta t \{\dot{\theta}\}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{\theta}\}_n - \frac{\Delta t^3}{6} \{\ddot{\theta}\}_n + \dots \quad (112)$$

Et par soustraction de l'équation 112 de l'équation 111 tout en négligeant les termes

contenant Δt en second degré et plus ($\Delta t^2, \Delta t^3$, etc...). Alors, la formule de la différence centrée, équation 110 est considérée être exacte au second ordre. En d'autres termes, l'erreur est de l'ordre de (Δt^2), ceci implique que si le pas de temps est divisé en deux, l'erreur est approximativement divisée en quatre.

En combinant l'équation 110 avec l'équation 107, on obtient:

$$\frac{1}{2\Delta t} [C]\{\theta\}_{n+1} = \{F\}_n - [D]_n \{\theta\}_n + \frac{1}{2\Delta t} [C]\{\theta\}_{n-1} \quad (113)$$

Remarques:

- 1- L'équation 113 est un système d'équations algébriques non linéaires. Si $[C]$ est diagonale, alors les équations sont découplées et $\{\theta\}_{n+1}$ peut être obtenu sans la résolution simultanée des équations.
- 2- En débutant la méthode par $n=0$, on doit avoir $\{\theta\}_{n-1}$, laquelle peut être déterminée à partir des conditions initiales $\{\theta\}_0$ et $\{\dot{\theta}\}_0$ et de l'équation 112.

$$\{\theta\}_{n-1} = \{\theta\}_0 - \Delta t \{\dot{\theta}\}_0 \quad (114)$$

Où les termes avec Δt^2 et de degré supérieur sont négligés. $\{\dot{\theta}\}_0$ est obtenue à partir de l'équation d'écoulement (équation 107), au temps zéro.

$$\{\dot{\theta}\}_0 = [C]^{-1} (\{F\}_0 - [D]_0 \{\theta\}_0) \quad (115)$$

- 3- L'équation 113 est conditionnellement stable (restriction sur la taille maximale du pas de temps) et pour assurer la stabilité de la solution numérique autour de la solution exacte, il faut que Δt vérifie la condition suivante:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (116)$$

où λ_{\max} est la valeur propre maximale de la matrice $[C]^{-1}[D]$, c'est à dire la valeur maximale de λ solution de l'équation: $\det([D] - \lambda[C]) = 0$. Alors, la méthode de la différence centrée, comme les méthodes explicites en général, est conditionnellement stable. Si Δt est très petit que nécessaire, le calcul revient très cher. C'est pour cela qu'il est nécessaire de bien borner λ_{\max} .

b2- Méthodes implicites:

La plupart des méthodes implicites utilisées sont inconditionnellement stables et n'ont aucune restriction sur la taille maximale du pas de temps autre celle exigée pour l'exactitude. La plus populaire de ces méthodes est connue sous le nom de la règle trapézoïdale ou méthode d'accélération moyenne. (Elle est aussi connue comme méthode de Crank-Nicolson lorsqu'elle est appliquée aux équations différentielles partielles paraboliques, telle que l'équation de transfert de chaleur).

Considérons deux états de teneur en eau séparés par un incrément de temps Δt , et dénotés par $\{\theta\}_n$ et $\{\theta\}_{n+1}$. Le schéma d'intégration temporelle par la règle trapézoïdale généralisée est basé sur l'hypothèse que les deux états de teneur en eau sont liés par la relation:

$$\{\theta\}_{n+1} = \{\theta\}_n + [(1-\beta)\{\dot{\theta}\}_n + \beta\{\dot{\theta}\}_{n+1}]\Delta t \quad (117)$$

L'équation 117 contient le paramètre β que l'analyste doit choisir. Ecrivant à présent l'équation 107 au temps t et une autre fois au temps $t + \Delta t$, ensuite multipliant la première par $(1-\beta)$ et la deuxième par β , on aura:

$$(1-\beta)[[C]\{\dot{\theta}\}_n + [D]_n\{\theta\}_n] = (1-\beta)\{F\}_n \quad (118)$$

$$\beta[[C]\{\dot{\theta}\}_{n+1} + [D]_{n+1}\{\theta\}_{n+1}] = \beta\{F\}_{n+1} \quad (119)$$

Les équations (118) et (119) sont additionnées, alors que l'équation 117 est utilisée pour éliminer les dérivées temporelles de la teneur en eau, et sachant que $[C]$ ne varie pas avec le temps, on obtient:

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[C] + \beta[D]_{n+1} \right) \{\theta\}_{n+1} = \left(\frac{1}{\Delta t}[C] - (1-\beta)[D]_n \right) \{\theta\}_n + (1-\beta)\{F\}_n + \beta\{F\}_{n+1} \quad (120)$$

Dépendant de β , le pas de temps Δt dans l'équation 120 doit avoir une limite supérieure afin de garantir la stabilité numérique de l'algorithme. Si $\beta < \frac{1}{2}$, la plus large valeur de Δt pour la stabilité est:

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{(1-2\beta)\lambda_{max}} \quad (121)$$

Si $\beta \geq \frac{1}{2}$, l'algorithme est inconditionnellement stable, c'est à dire la stabilité (mais non l'exactitude) est garantie lorsque Δt devient indéfiniment large. Les noms associés aux différents

schémas selon la valeur de β sont:

$\beta = 0$: Différence avancée ou Euler (conditionnellement stable).

$\beta = 1/2$: Règle trapézoïdale ou de Crank-Nicolson (inconditionnellement stable).

$\beta = 2/3$: Galerkin (inconditionnellement stable).

$\beta = 1$: Différence arriérée (inconditionnellement stable).

Si $\beta = 0$, l'algorithme est dit explicite. Si $\beta > 0$, il est dit implicite.

Parmi les méthodes implicites, le choix de $\beta = 1/2$ est populaire, mais les formes transitoires peuvent provoquer des oscillations ennuyantes dans la solution, ces oscillations peuvent être réduites en utilisant un petit pas de temps Δt , ou un amortissement numérique par utilisation d'une valeur de β quelque peu supérieure à $1/2$ (schéma de Galerkin par exemple). Pour les problèmes non linéaires, le choix de Δt est un peu conditionné par les problèmes de convergence.

Remarques

- 1- L'équation (120) est un système d'équations algébriques non linéaires (ou formule de récurrence généralisée des méthodes implicites) qui permet, connaissant les teneurs en eau initiales, d'évaluer celles-ci à tout instant t par un processus pas à pas.
- 2- La méthode est facilement initialisable à partir des conditions initiales $\{\theta\}_0$.
- 3- Pour les problèmes présentant une non linéarité matérielle (notre cas), $[D]$ est en fonction de $\{\theta\}_{n+1}$, laquelle est une inconnue. En conséquence $[D]$ doit être prédit en utilisant une valeur estimée de $\{\theta\}_{n+1}$ ($\{\theta\}_{n+1}$ peut être la solution de l'équation (120), pour une valeur de $[D]$ en utilisant une propriété matérielle moyenne à l'intérieur de la région d'écoulement). L'équation (120) est résolue pour $\{\theta\}_{n+1}$ ainsi la prédiction de $[D]$ est améliorée et ceci jusqu'à convergence.

c) Choix du pas de temps des méthodes implicites

Puisque la méthode est numériquement stable pour n'importe quelle valeur de Δt , le choix du pas de temps est basé sur des considérations d'exactitude seulement. Comparées avec les méthodes explicites, les méthodes implicites sont économiquement attractives seulement quand Δt peut être plus large que celui utilisé pour les méthodes explicites. La stabilité inconditionnelle (laquelle n'implique pas l'exactitude inconditionnelle) couplée avec le besoin économique d'un large Δt , poussent souvent les analystes à utiliser des pas de temps très larges, mais les

difficultés de convergence dans les problèmes non linéaires exigent l'utilisation de pas de temps très réduit.

d) Choix de la méthode

La méthode choisie pour résoudre l'équation de notre problème (Equation 73), est une méthode implicite, élément par élément, c'est à dire ne nécessitant pas le calcul des matrices et vecteurs globaux.

L'exposé de cette nouvelle méthode s'inspire largement de l'article du Professeur Thomas J.R. Hughes et al., de l'université de Stanford en Californie, sous le titre "Element-by-Element implicit algorithms for heat conduction", [19]. Le fondement de cet algorithme ainsi que son développement théorique sont présentés dans les sections suivantes.

2.4.3.5 Algorithme implicite élément-par-élément

a) Introduction

Les méthodes implicites pour la résolution des problèmes de transfert de chaleur ⁽¹⁾ sont très connues, la méthode de Crank-Nicholson, ou la règle trapézoïdale est un bon exemple. De tels algorithmes possèdent des propriétés souhaitables telles que l'exactitude au second ordre et la stabilité inconditionnelle. Cette dernière propriété n'impose pas de limite pour la taille du pas de temps. Ainsi, le pas de temps doit être choisi seulement pour obtenir une exactitude acceptable. L'inconvénient pour de tels algorithmes est qu'ils engendrent de larges systèmes d'équations couplées. La charge de stockage et de résolution des équations impose une très grande puissance des ordinateurs.

Des efforts ont été menés afin de développer des schémas itératifs et d'autres types de méthode pour diminuer la charge de stockage et de résolution, ces procédures ont atteint un certain degré de succès pour des maillages réguliers en différences finies, mais elles n'ont pu avoir un très grand impact sur des maillages irréguliers.

⁽¹⁾ Plusieurs phénomènes physiques, y compris celui de l'écoulement en milieu poreux, sont décrits par une équation analogue à celle du transfert de chaleur. De ce fait, le traitement mathématique des différents phénomènes est pratiquement le même que celui du transfert de chaleur.

Pour des discrétisations en éléments finis, ceci est malheureux, puisque la discrétisation par la méthode des éléments finis est surtout utile pour les géométries complexes.

Comme autres solutions, les schémas explicites peuvent être employés, puisqu'ils éliminent la charge de stockage des coefficients des matrices et la résolution des équations. Cependant, les schémas explicites sont conditionnellement stables, et la condition de stabilité dans les problèmes d'écoulement en milieu poreux est particulièrement rigoureuse, ceci diminue leur utilisation.

Le nouveau type d'algorithme qu'on va présenter, accomplit l'exactitude et la stabilité inconditionnelle des méthodes implicites, de plus il fait intervenir seulement les coefficients des matrices élémentaires. Ainsi, le nombre d'opérations est considérablement inférieur à celui des méthodes implicites conventionnelles (à matrice globale). Aucune limitation en géométrie n'est engendrée par cet algorithme. Ainsi, la discrétisation par éléments finis retient toute sa souplesse.

Dans ce qui suit, on présentera la théorie de l'algorithme, et en premier lieu on verra la résolution de l'équation d'écoulement pour le cas linéaire, tout en rappelant l'algorithme trapézoïdal généralisé. Ensuite, un premier passage de l'algorithme élément-par-élément est décrit. On verra dans ce cas que la stabilité inconditionnelle est accomplie, mais seulement l'exactitude au premier ordre peut être atteinte. Ainsi, pour améliorer la propriété d'exactitude, la procédure d'un deuxième passage, qui est non seulement inconditionnellement stable, mais exacte au second ordre, est décrite. La méthode au deuxième passage, est généralisée au cas de l'écoulement non-linéaire (notre problème). Et enfin, on présentera un organigramme détaillé de l'algorithme.

b) *Théorie*

b1- Ecoulement linéaire

Cet écoulement est régi par l'équation différentielle ordinaire du premier ordre suivante:

$$C\dot{\theta} + D\theta = F \quad (122)$$

où C est la matrice de capacité, D est la matrice de diffusivité, F est le vecteur force (alimentation) hydraulique nodal, θ est la teneur en eau volumique et $\dot{\theta}$ sa dérivée temporelle. Nous devons supposer que les matrices C et D sont constantes, C est diagonale et définie positive, D est symétrique et semi-définie positive, et $F = F(t)$ est une fonction de temps donnée.

La solution de l'équation (122) consiste en la recherche de la fonction $\theta = \theta(t)$, laquelle satisfait l'équation (122), pour tout $t \in [0, \tau]$, tel que:

$$\theta(0) = \theta_0 \quad (123)$$

où θ_0 est un vecteur des teneurs en eau initiales donné.

b2- Algorithme trapézoïdal généralisé

L'algorithme trapézoïdal généralisé est défini par l'équation de récurrence suivante:

$$(C + \beta \Delta t D) \theta_{n+1} = [C - (1 - \beta) \Delta t D] \theta_n + \Delta t F_{n+\beta} \quad (124)$$

où $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ est le pas de temps, n varie de 0 à N , N est le nombre total des pas de temps. $\Delta t = \tau/N$ et $t_n = n \Delta t$, θ_n et θ_{n+1} sont les valeurs respectives de $\theta(t_n)$ et $\theta(t_{n+1})$, β est le paramètre contrôlant la stabilité et l'exactitude, et $F_{n+\beta}$ peut être défini par l'une des expressions suivantes:

$$F_{n+\beta} = (1 - \beta) F(t_n) + \beta F(t_{n+1}) \quad (125)$$

$$F_{n+\beta} = F(t_{n+\beta}) \quad ; \quad t_{n+\beta} = (1 - \beta) t_n + \beta t_{n+1} \quad (126)$$

Les résultats qui vont être présentés sont bien connus. Voir références [9] et [17].

b2.1- Stabilité

Si $\beta \geq 1/2$, alors l'algorithme trapézoïdal généralisé est inconditionnellement stable.

En particulier, on peut montrer que lorsque $F_{n+\beta} = 0$, on a:

$$\theta_{n+1}^T C \theta_{n+1} \leq \theta_n^T C \theta_n, \quad \forall \Delta t \quad (127)$$

où T indique la transposée.

b2.2- Exactitude

Si $\beta = 1/2$ (c'est à dire règle trapézoïdale ou Crank-Nicolson), alors l'exactitude au second ordre est accomplie.

b2.3- Nouvelle écriture de l'équation de récurrence

Il est convenable pour la suite des développements d'écrire l'équation 124 sous la forme suivante:

$$C^{1/2} \theta_{n+1} = A C^{1/2} \theta_n + \Delta t B C^{-1/2} F_{n+\beta} \quad (128)$$

pour lequel:

$$A = B[I - (1 - \beta) \Delta t E] \quad (129)$$

$$B = (I + \beta \Delta t E)^{-1} \quad (130)$$

$$E = C^{-1/2} D C^{-1/2} \quad (131)$$

et I est la matrice identité. Dans l'équation (130), la notation $^{-1}$ indique la matrice inverse, et dans l'équation (131), $^{-1/2}$ indique l'inverse de la racine carrée. Les deux matrices A et B sont fonction des paramètres β et Δt .

b3- Premier passage de l'algorithme élément-par-élément

Nous supposons que la matrice D admet la représentation suivante:

$$D = \sum_{e=1}^{nel} D^e \quad (132)$$

où e représente le numéro de l'élément, n_e et le nombre total d'éléments et D^e est la matrice de diffusivité élémentaire, supposée symétrique et semi-définie positive. Les éléments des équations (129) à (131) deviennent respectivement:

$$A^e = B^e [I - (1 - \beta) \Delta t E^e] \quad (133)$$

$$B^e = (I + \beta \Delta t E^e)^{-1} \quad (134)$$

$$E^e = C^{-1/2} D^e C^{-1/2} \quad (135)$$

Considérons l'équation suivante analogue à l'équation (128):

$$C^{1/2}\theta_{n+1} = \left(\prod_{e=1}^{nel} A^e \right) C^{1/2}\theta_n + \Delta t \left(\prod_{e=1}^{nel} B^e \right) C^{-1/2}F_{n+\beta} \quad (136)$$

pour lequel:

$$\prod_{e=1}^{nel} A^e = A^1 A^2 \dots A^{nel} \quad (137)$$

$$\prod_{e=1}^{nel} B^e = B^1 B^2 \dots B^{nel} \quad (138)$$

L'équation (136) définit l'algorithme pour lequel les calculs peuvent être effectués à la base d'élément-par-élément. La matrice de diffusivité globale D ne va jamais être formée, et la résolution des équations fait intervenir seulement les tableaux (ou matrices) à la dimension de l'élément. Ainsi, les exigences de stockage sont identiques à celles des méthodes explicites, car les matrices de diffusivité élémentaires peuvent être formées une seule fois, car c'est nécessaire, et ensuite éliminées. Cependant, l'algorithme possède des propriétés de stabilité des méthodes implicites. Ceci peut être vu dans ce qui suit.

b31- Stabilité

Les résultats standards [10] nous permettent de dire que si $\beta \geq 1/2$, la stabilité inconditionnelle est atteinte.

b32- Exactitude

Le moyen le plus simple d'évaluer l'exactitude de l'algorithme et de comparer les équations (137) et (138) avec les matrices A et B respectivement, pour l'algorithme trapézoïdal ($\beta = 1/2$). Pour atteindre l'exactitude au second ordre, les deux équations suivantes doivent être vérifiées

$$\prod_{e=1}^{nel} A^e(\beta, \Delta t) = A(\frac{1}{2}, \Delta t) + O(\Delta t^3) \quad (139)$$

$$\prod_{e=1}^{nel} B^e(\beta, \Delta t) = B(\frac{1}{2}, \Delta t) + O(\Delta t^2) \quad (140)$$

Il peut être démontré que pour $\beta \neq 1/2$, ni l'équation (139) ni l'équation (140) sont satisfaites, même avec $\beta = 1/2$, seulement l'équation (140) est vérifiée.

Ceci peut être vu comme suit:

Premièrement, nous donnons sous forme expansée les matrices $A(1/2, \Delta t)$ et $B(1/2, \Delta t)$ en fonction de Δt .

$$A(\frac{1}{2}, \Delta t) = I - \Delta t E + \frac{\Delta t^2}{2} E^2 + O(\Delta t^3) \quad (141)$$

$$B(\frac{1}{2}, \Delta t) = I - \frac{\Delta t}{2} E + O(\Delta t^2) \quad (142)$$

Deuxièmement, nous développons les produits des matrices élémentaires en fonction de Δt .

$$\prod_{e=1}^{nel} A^e(\frac{1}{2}, \Delta t) = I - \Delta t E + \frac{\Delta t^2}{2} E^2 + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{e=1}^{nel} \sum_{f=e+1}^{nel} (E^e E^f - E^f E^e) + O(\Delta t^3) \quad (143)$$

$$\prod_{e=1}^{nel} B^e(\frac{1}{2}, \Delta t) = I - \frac{\Delta t}{2} E + O(\Delta t^2) \quad (144)$$

Comme il peut être observé en comparant les équations (141) et (143), l'égalité n'est pas vérifiée jusqu'au terme de $O(\Delta t^2)$. Par conséquent, seulement l'exactitude au premier ordre est atteinte. D'autre part, les équations (142) et (144) montrent que l'équation (140) est satisfaite pour $\beta = 1/2$. Pour améliorer les caractéristiques d'exactitude pour cette approche, une modification de la procédure doit être effectuée, ceci est conduit comme suit:

b4- Deuxième passage de l'algorithme élément-par-élément

Considérons l'algorithme suivant:

$$C^{1/2}\theta_{n+1} = \left[\prod_{e=1}^{nel} A^e(\beta, \frac{\Delta t}{2}) \right] \left[\prod_{e=nel}^1 A^e(\beta, \frac{\Delta t}{2}) \right] C^{1/2}\theta_n + \Delta t \left[\prod_{e=1}^{nel} B^e(\beta, \frac{\Delta t}{2}) \right] \left[\prod_{e=nel}^1 B^e(\beta, \frac{\Delta t}{2}) \right] C^{-1/2}F_{n+\beta} \quad (145)$$

b4.1- Stabilité

La stabilité inconditionnelle de l'équation (145) peut être établie de la même manière décrite dans les sections précédentes.

b4.2- Exactitude

Lorsque $\beta = 1/2$, l'exactitude au second ordre est atteinte dans le cas du deuxième passage. Ceci peut être déduit des expressions suivantes:

$$\left[\prod_{e=1}^{nel} A^e(\frac{1}{2}, \frac{\Delta t}{2}) \right] \left[\prod_{e=nel}^1 A^e(\frac{1}{2}, \frac{\Delta t}{2}) \right] = I - \Delta t E + \frac{\Delta t^2}{2} E^2 + O(\Delta t^3) \quad (146)$$

$$\left[\prod_{e=1}^{nel} B^e(\frac{1}{2}, \frac{\Delta t}{2}) \right] \left[\prod_{e=nel}^1 B^e(\frac{1}{2}, \frac{\Delta t}{2}) \right] = I - \frac{\Delta t}{2} E + O(\Delta t^2) \quad (147)$$

En comparant les équations (141) et (142) avec les équations (146) et (147), nous observons que les exigences de l'exactitude au second ordre sont satisfaites.

Notons que la disposition des éléments est complètement arbitraire, et qu'il n'y a aucune limitation dans la topologie (géométrie et dimension) du maillage.

c) Généralisation au cas d'un écoulement non-linéaire

L'équation gouvernant notre problème est de la forme:

$$C\dot{\theta} + D(\theta, t)\theta = F(t) \quad (148)$$

La non-linéarité de l'équation (148) réside en la dépendance de la matrice de diffusivité [D], de la solution (θ) elle-même. La matrice [C] étant indépendante de (θ) et par conséquent du temps.

Les matrices [C] et [D] possèdent les mêmes propriétés que dans le cas linéaire. Nous

allons généraliser le deuxième passage de l'algorithme des sections précédentes au cas non-linéaire. Pour établir ceci, il est convenable d'introduire une approximation sur $\dot{\theta}$, ainsi que pour θ . Soit $\tilde{\theta}_n$ l'approximation de $\dot{\theta}(t_n)$ et définissons:

$$\tilde{\theta}_{n+1} = \theta_n + (1 - \beta) \Delta t \dot{\theta}_n \quad (149)$$

$$\tilde{t}_{n+1} = t_n + (1 - \beta) \Delta t \quad (150)$$

$$\tilde{D} = D(\tilde{\theta}_{n+1}, \tilde{t}_{n+1}) \quad (151)$$

$$\tilde{D}^e = D^e(\tilde{\theta}_{n+1}, \tilde{t}_{n+1}) \quad (152)$$

Pour effectuer la généralisation, remplaçant $A^e(\beta, \Delta t/2)$ et $B^e(\beta, \Delta t/2)$ dans l'équation (145) par $\tilde{A}^e(\beta, \Delta t/2)$ et $\tilde{B}^e(\beta, \Delta t/2)$ respectivement, pour lequel \tilde{A}^e et \tilde{B}^e sont calculés à partir de \tilde{D}^e .

Pour avancer au pas de temps suivant, $\dot{\theta}_{n+1}$ est déterminé à partir de:

$$\dot{\theta}_{n+1} = \frac{\theta_{n+1} - \tilde{\theta}_{n+1}}{\beta \Delta t} \quad (153)$$

c1- Stabilité

C'est la même condition de stabilité obtenue pour l'équation (124) avec D remplacée par \tilde{D} .

c2- Exactitude

Si $\beta = 1/2$, l'exactitude au second ordre est accomplie, ceci est obtenue à partir des résultats des sections précédentes (c'est à dire les équations (146) et (147)) et de l'observation que l'équation (124) avec D remplacée par \tilde{D} est exacte au second ordre.

d) Procédure de l'algorithme

d1- Cas linéaire

La procédure de l'algorithme élément-par-élément au deuxième passage s'organise comme suit:

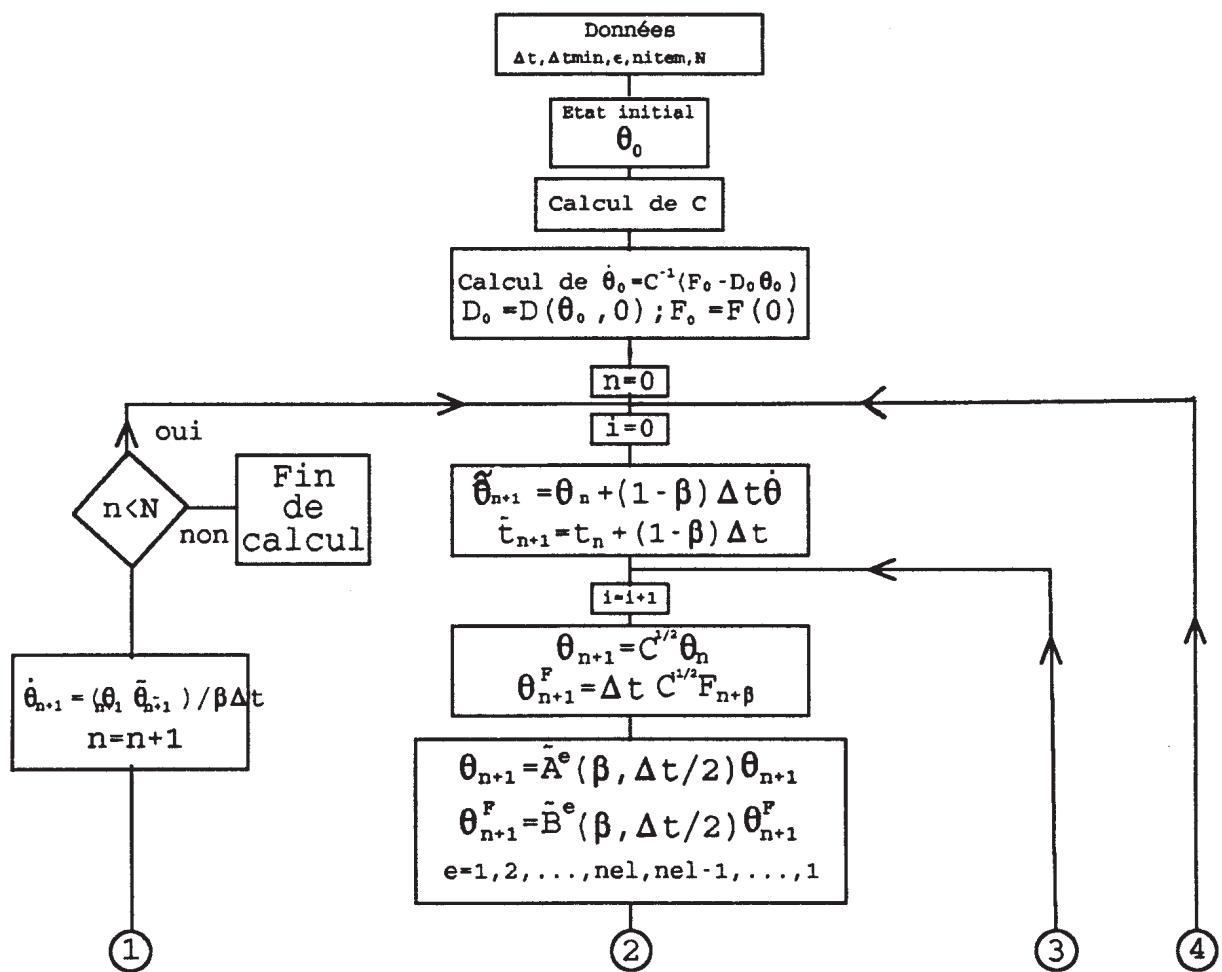
1. La donnée du vecteur teneur en eau initiale θ_0 , mettre $n = 0$.
2. Former $C^{1/2}$.
3. $\theta_{n+1} = C^{1/2} \theta_n$, $\theta_{n+1}^F = \Delta t C^{1/2} F_{n+\beta}$.
4. $\theta_{n+1} \leftarrow A^e(\beta, \Delta t/2) \theta_{n+1}$, $\theta_{n+1}^F \leftarrow B^e(\beta, \Delta t/2) \theta_{n+1}^F$; $e = 1, 2, \dots, nel, nel, nel-1, \dots, 1$.
5. $\theta_{n+1} \leftarrow C^{1/2} (\theta_{n+1} + \theta_{n+1}^F)$.
6. $n = n+1$, retour en 3 ou sortie.

La flèche (\leftarrow) se lit "est remplacé par". Les matrices élémentaires peuvent être calculées et sauvegardées, ou éliminées et recalculées au besoin. Cette décision dépend des conditions de stockage, et à d'autres facteurs propres à la machine.

d2- Cas non-linéaire

1. La donnée de θ_0 , former C , déterminer $\dot{\theta}_0$ à partir de: $\dot{\theta}_0 = C^{-1} (F_0 - D_0 \theta_0)$; avec $D_0 = D(\theta_0, 0)$; $F_0 = F(0)$, mettre $n = 0$.
2. $\bar{\theta}_{n+1} = \theta_n + (1-\beta) \Delta t \dot{\theta}_n$, $\bar{t}_{n+1} = t_n + (1-\beta) \Delta t$.
3. $\theta_{n+1} = C^{1/2} \theta_n$, $\theta_{n+1}^F = \Delta t C^{1/2} F_{n+\beta}$.
4. $\theta_{n+1} \leftarrow \tilde{A}^e(\beta, \Delta t/2) \theta_{n+1}$, $\theta_{n+1}^F \leftarrow \tilde{B}^e(\beta, \Delta t/2) \theta_{n+1}^F$; $e = 1, 2, \dots, nel, nel, nel-1, \dots, 1$.
5. $\theta_{n+1} \leftarrow C^{1/2} (\theta_{n+1} + \theta_{n+1}^F)$.
6. $\dot{\theta}_{n+1} = (\theta_{n+1} - \bar{\theta}_{n+1}) / \beta \Delta t$.
7. $n = n+1$, retour en 2 ou sortie.

Cette dernière procédure ne comporte pas les étapes liées à la convergence de la solution, puisque celle-ci n'est obtenue qu'après un certain nombre d'itérations, du fait de la non linéarité de l'équation. L'organigramme schématique détaillé (Figure 11) tiendra compte de cette insuffisance.



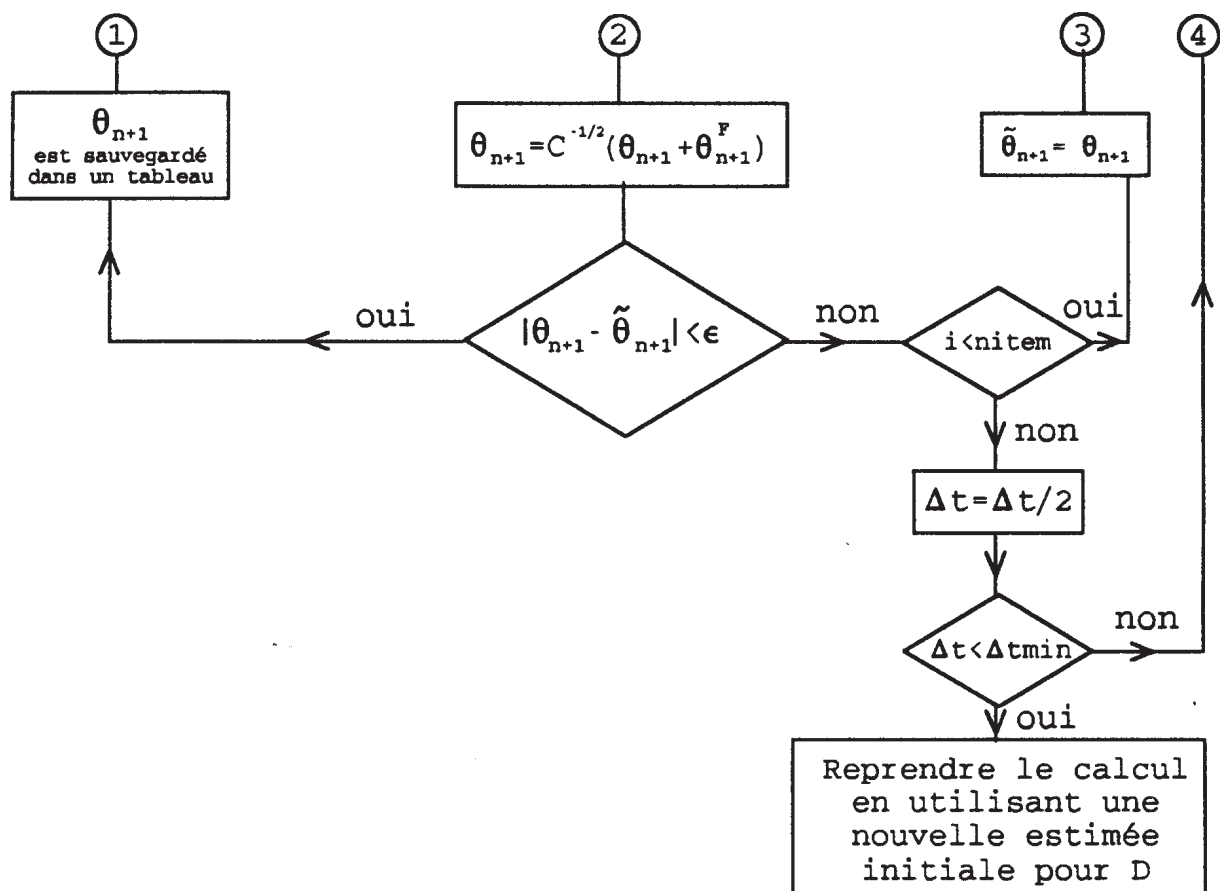


Figure 11: Organigramme de calcul des teneurs en eau dans le domaine de temps étudié

Notations:

- Δt_{\min} : le pas de temps minimal
- ϵ : précision ou tolérance
- n_{item} : nombre d'itérations maximal
- N : nombre total des pas de temps
- n : compteur des pas de temps
- i : compteur des itérations

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, il a été procédé à la formulation en éléments finis des équations d'écoulement bidimensionnel d'eau dans une argile gonflante non saturée. Cette formulation était basée sur la méthode des résidus pondérés, les intégrales déduites correspondant aux matrices de diffusivité et de capacité hydraulique ainsi qu'aux vecteurs d'alimentation hydraulique, ont été évaluées par une intégration numérique. L'équation déduite de la formulation éléments finis est une équation différentielle dans le temps, elle est du premier ordre et comportant une non linéarité matérielle, et du fait que celle-ci nécessite une intégration dans le temps, une méthode implicite a été utilisée. La combinaison de l'intégration pas-à-pas avec un processus itératif était nécessaire du fait de la non linéarité.

Le nouveau type d'algorithme élément-par-élément utilisé, possède l'avantage des méthodes explicites dont la charge de stockage et de résolution du système d'équations qui est très réduite, ainsi que la stabilité inconditionnelle des méthodes implicites. L'organigramme en fin du chapitre illustre les différentes opérations de recherche des inconnues. Dans le prochain chapitre, elle sera présentée la structure globale du programme de calcul, les différents sous-programmes, ainsi que quelques exemples d'application.

CHAPITRE 3

PRESENTATION DU CODE DE CALCUL

3.1 INTRODUCTION

L'utilisation des modèles de simulation dans les études d'écoulement d'eau est très répandue dans ces dernières années, mais la construction de n'importe quel modèle n'est pas une opération facile, même avec des hypothèses très simplifiées. Dans tous les cas, un code de calcul doit être développé, et cette opération peut durer plusieurs mois. Des exemples numériques doivent être effectués pour tester le bon comportement du code de calcul vis à vis des différentes sources d'erreurs, et ceci doit être réalisé avant la validation finale du modèle, celle-ci nécessite des données exactes, à savoir, les caractéristiques du milieu, et les conditions aux limites. Et du fait que la simulation de l'écoulement d'eau dans les argiles gonflantes dure très longtemps vu la très faible perméabilité du milieu, il devient plus que nécessaire l'utilisation d'ordinateur à très grande vitesse.

Dans ce chapitre nous allons présenter la structure générale du code de calcul comprenant : l'organigramme de calcul, la description des différents sous-programmes, et le listing commenté du code de calcul. Des exemples numériques seront aussi présentés pour la validation du modèle.

3.2 DESCRIPTION GENERALE DU CODE DE CALCUL .

Le code de calcul est écrit en langage Fortran, il comporte plus de 2000 lignes y compris les lignes de commentaires qui sont de l'ordre de 600. Le programme principal gère en plus des entrées (données) et des sorties (résultats), la résolution proprement dite des équations du problème. Il contrôle la procédure d'intégration dans le temps ainsi que la convergence du processus itératif. Il utilise 25 sous-programmes pour ces différents calculs.

3.3 DESCRIPTION DES SOUS-PROGRAMMES

Dans cette section nous décrivons la tâche de chaque sous-programme utilisé dans le code de calcul :

AEBEMAT : Calcul les matrices A_e et B_e de l'algorithme.

BLOAD : Calcul de la contribution du chargement hydraulique de surface (Les quatre faces peuvent être soumises)

CAPADIAG : Génère la matrice de capacité $[C]$ (diagonale) en utilisant le schéma H R Z. (Special Lumping Technique).

DIFF : Calcul la matrice de diffusivité $[D]$ pour l'état initial.

DIFFES : Calcul la matrice de diffusivité $[D]$ dans le cas de la recherche de la convergence de la solution ($[D]$ est en fonction d'une diffusivité estimée)

DXDZDO : Lecture et interpolation de la valeur de la diffusivité $D(\theta)$ en fonction de la teneur en eau volumique initiale à partir d'un tableau.

DXDZES : Lecture et interpolation de la valeur de la diffusivité $D(\theta)$ en fonction de la teneur en eau volumique à partir d'un tableau. (pour les calculs de convergence)

GAUSSQ : Evaluation des positions des points de Gauss ainsi que leurs poids pour l'intégration numérique.

INPUT : Lecture de toutes les données à partir d'un fichier extérieur (fichier de données).

INVMAT : Calcul de la matrice inverse (matrice carrée quelconque).

INVMDIAG : Calcul de la matrice inverse (matrice diagonale).

JACOB : Evaluation de la matrice Jacobiennne, son inverse et les dérivées cartésiennes des fonctions de forme (2D)

LOADG : Calcul de la contribution du chargement de volume. (source ponctuelle interne).

NODXZ : Interpolation des coordonnées des noeuds intermédiaires d'un élément à cotes droites.

PRAMT3DA : Calcul du produit de deux matrices A_e à trois dimensions (3D). (pour le produit aller; voir l'algorithme).

PRAMT3DR : Calcul du produit de deux matrices A_e à trois dimensions (3D). (pour le produit retour; voir l'algorithme).

PRBMT3DA : Calcul du produit de deux matrices B_e à trois dimensions (3D). (pour le produit aller; voir l'algorithme).

PRBMT3DR : Calcul du produit de deux matrices B_e à trois dimensions (3D). (pour le produit retour; voir l'algorithme).

PRODAEA : Effectue le produit de toutes les matrices A_e pour l'étape aller.

PRODAER : Effectue le produit de toutes les matrices A_e pour l'étape retour.

PRODBEA : Effectue le produit de toutes les matrices B_e pour l'étape aller.

PRODBER : Effectue le produit de toutes les matrices B_e pour l'étape retour.

PRODMATV : Effectue le produit d'une matrice par un vecteur.

PROD2MAT : Effectue le produit de deux matrices.

SHAPES : Evaluation des fonctions de forme et de leurs dérivées locales pour l'élément isoparamétrique à 8 noeuds.

3.4 DESCRIPTION DES VARIABLES EN FICHIER DE DONNEES.

Dans cette section, on donnera la description de chaque variable utilisée dans le fichier de données, ceci permettra aux utilisateurs du code de calcul de pouvoir introduire leurs données sans aucune difficulté. Les variables seront décrites dans l'ordre de leur position dans le fichier de données.

NPOIN : Nombre de Points (ou Noeuds) dans le maillage.

NELEM : Nombre d'Elément dans le maillage.

EELEM : Epaisseur de l'Elément (sa dimension verticale : hauteur)

NNODE : Nombre de Noeuds dans l'Elément (= 8)

NDOFN : Nombre de Degré de liberté par Noeud (=1)

NDIME : Nombre de DIMension dans l'Elément (=2,)

NELUN : Numéro du premier (UN) Elément à être calculé.
(Un des avantage de la méthode de calcul).

FNCDE: Numéro du Code de DEFormation :
0 : Cas du sol Non déformable (Non Gonflant.)
1 : Cas du sol Gonflant.

MTETD : Le nombre Maximum des teneurs en eau (θ) Données
caractérisant le milieu (Tableau des diffusivités $D(\theta)$).

TETAI : Teneur en eau (θ) Initiale dans le sol.

NVFIX : Nombre de noeuds à valeurs FIXes. (Conditions aux limites)

2 - PROCEDES NUMERIQUE

NGAUS : Nombre de la règle de GAUSs pour l'intégration. (=2; Fixe)

NPAEM : Nombre du PAs pour le calcul des EleMents. Il prendra une valeur différente de 1, si on veut éviter le calcul de certains éléments.

BETAC : La Valeur de β Connue (facteur de gonflement), il représente le coefficient de proportionnalité entre la déformation de gonflement et la teneur en eau volumique.

GAMAD : La valeur de γ Donnée, représente le paramètre contrôlant la stabilité de l'algorithme. (= 0.5; Fixe)

TMPTT : Le TeMPs ToTaL de la durée de l'écoulement.

PATMP : Le PAs du TeMPs choisi en seconde.

PAMIN : Le PAs du temps MINimum en seconde .

PAMAX : Le PAs du temps MAXimum en seconde . (égale au PATMP)

TANTE : Le Temps ANTErieur, variable utilisée lors d'une interruption de l'exécution, elle prendra la dernière valeur du temps calcule avant interruption, sinon elle garde la valeur zéro (0) en cas de non interruption.

NITEM : Le Nombre d'ITeration Maximum pour la convergence.

EPSIP : La valeur de la Précision EPSIlon ou tolérance utilisée lors du processus itératif.

NKOCV : Le Numéro de K(C)Ode pour la ConVergence.
 1 : valeur estimée = la plus grande des valeurs.
 2 : valeur estimée = la moyenne des valeurs.
 3 : valeur estimée = la plus petite des valeurs.

INTER : INTERvalle d'écriture des résultats dans le fichier OUTPUT

TETTD(I) : Tableau des teneurs en eau (θ) Données, utilisée pour définir la fonction diffusivité du sol.

DIFFD(I) : Tableau des DIFFusivités Données du sol, correspondant aux teneurs en eau TETTD(I).

IELEM : Numéro de l'ELEMent.

LNODS(IELEM,INODE) : Tableau des numéros de NOeuD pour chaque élément.

IPOIN : Numéro du POINt ou noeud.

COORD(IPOIN,IDIME) : Tableau des COORDonnées des noeuds. Avec
 IDIME : DIMension (X: horizontale; Z: verticale)

NOFIX(IVFIX) : Tableau des Numéros de noeuds a valeur FIXe

PRESC(IVFIX) : Tableau des valeurs PRESCrite aux noeuds fixes.

NEDGE : Nombre de face (EDGE) chargée.

NODEG : Nombre de noeud (NOD) sur la face chargée. (= 3)

NEAST(IEDGE) : Tableau des Numéros d'Eléments ASSociés au chargement de surface.
 (IEDGE=face (EDGE) en cours)

NOPRS(IEDGE,IODEG) : Tableau des Numéros de noeuds
 correspondant a la face chargée considérée (IEDGE).

PRESS(IEDGE) : Tableau des valeurs PREScrites à la face considérée.

NCODE(IEDGE) : Numéro de CODE de la face chargée.

0 : face supérieure de l'élément.

1 : face de gauche de l'élément.

2 : face de droite de l'élément.

3 : face inférieure de l'élément.

NSOUR : Nombre de SOURce ponctuelle volumique.

NELSP(ISOURL) : Tableau des Numéros d'ELéments ayant une Source Ponctuelle.

SOURC(ISOURL) : Tableau des valeurs ou débit volumique généré par la SOURCe.

3.5 EXEMPLE NUMERIQUE ET VALIDATION

3.5.1 Stabilité Numérique de la Solution.

Avant de réaliser les exemples numériques pour la validation du modèle, on doit avant tout vérifier la première condition de convergence de notre solution vers la solution exacte, cette condition est la stabilité numérique. Comme on a utilisé un algorithme implicite inconditionnellement stable, la solution recherchée doit être invariable à un changement du pas de temps. Pour cela, on a réalisé un calcul sur un maillage comprenant trois éléments de 2 cm de hauteur chacun, et de 4cm de largeur. Un flux de surface constant étant appliqué, et les calculs ont été effectués pour des pas de temps de 0.1 s, 0.05 s, et 0.01 s. Les résultats obtenus pour le premier élément sont reportés graphiquement sur la figure 3.1, et on observe bien que les trois droites représentant la solution pour les différents pas de temps sont presque superposées, et l'erreur maximale calculée était de l'ordre de 1.2 %, d'où la stabilité de la solution.

3.5.2 Exemple Numérique.

Pour la validation numérique de notre modèle, on a choisi le problème d'infiltration d'eau dans une colonne d'argile non saturée. Les données numériques (ou les paramètres du modèle) ont été empruntés de la littérature. Le premier paramètre qui est la fonction diffusivité du sol $D(\theta)$, a été tirée de la référence [29] (figure 3.0), tandis que le deuxième paramètre qui est le coefficient β , a été tiré de la référence [21], et ayant une valeur de 0.7.

Une des manières pour la validation numérique de notre modèle est de déterminer le temps d'infiltration effectué par l'eau pour saturer un élément de volume de hauteur déterminée.

Cette procédure étant réalisée pour des éléments à différentes hauteurs (ou profondeur), 1cm, 2cm, 3cm, 4cm, 5cm, et 6cm.

Les résultats permettront la connaissance de la relation liant la profondeur d'infiltration au temps. Une fois déterminée, cette relation doit être comparée aux relations existantes, analytiques ou numériques. Les calculs sont réalisés en discrétisant chaque fois la colonne d'argile en trois éléments de 1cm, 2cm, 3cm, 4cm, 5cm, et 6cm de hauteur, ce qui fait six calculs différents pour obtenir six temps différents pour six différentes profondeurs.

On présentera dans ce qui suit les étapes suivies par notre approche pour aboutir aux résultats, mais avant nous devons noter que les paramètres : fonction diffusivité du sol, la porosité, et le facteur de gonflement β , doivent être connus pour la résolution du problème.

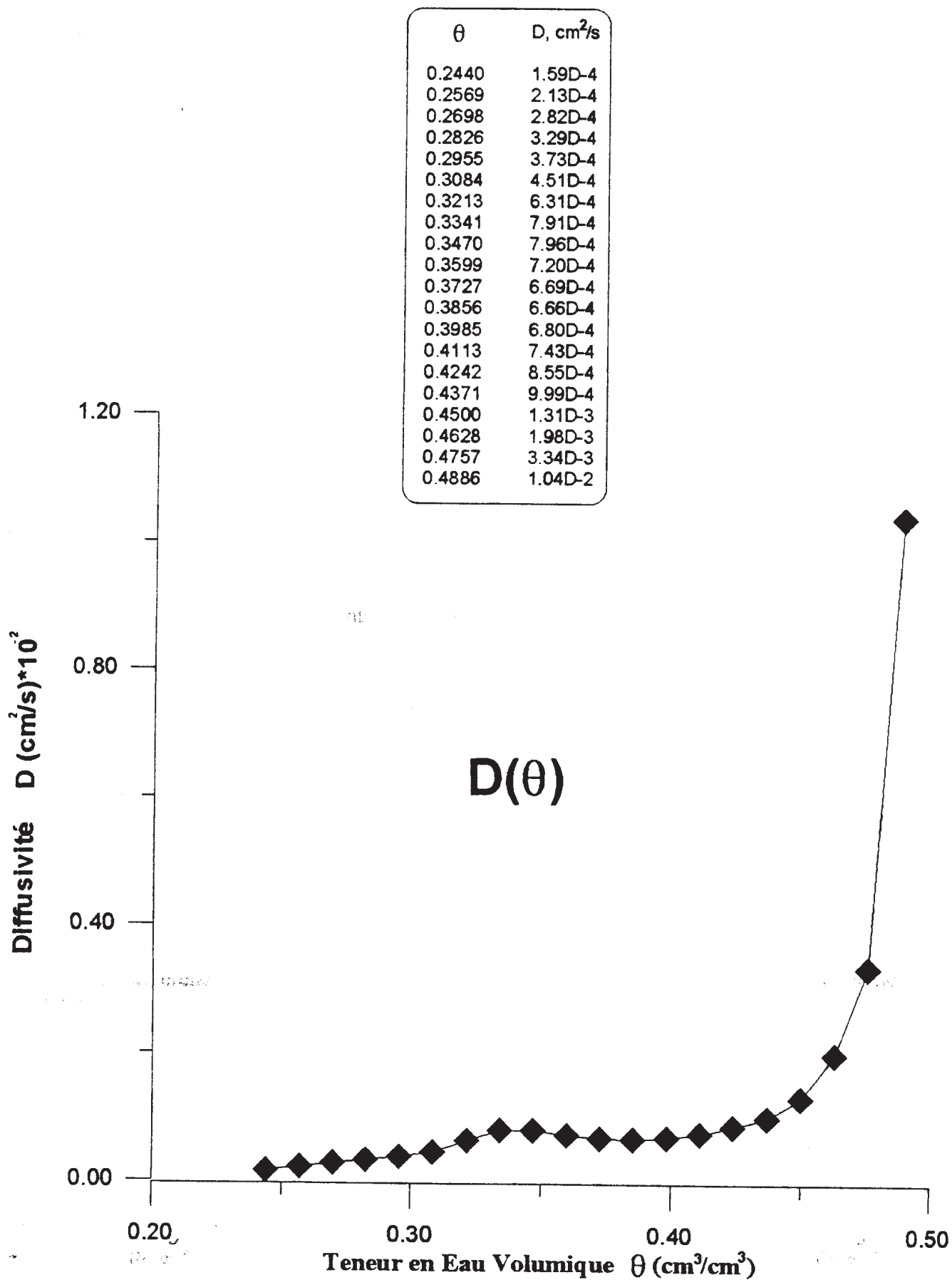


Figure 3.0 : Courbe de Diffusivité en fonction de la Teneur en Eau Volumique
(Empruntée de la Ref. [29] pour son utilisation dans les calculs)

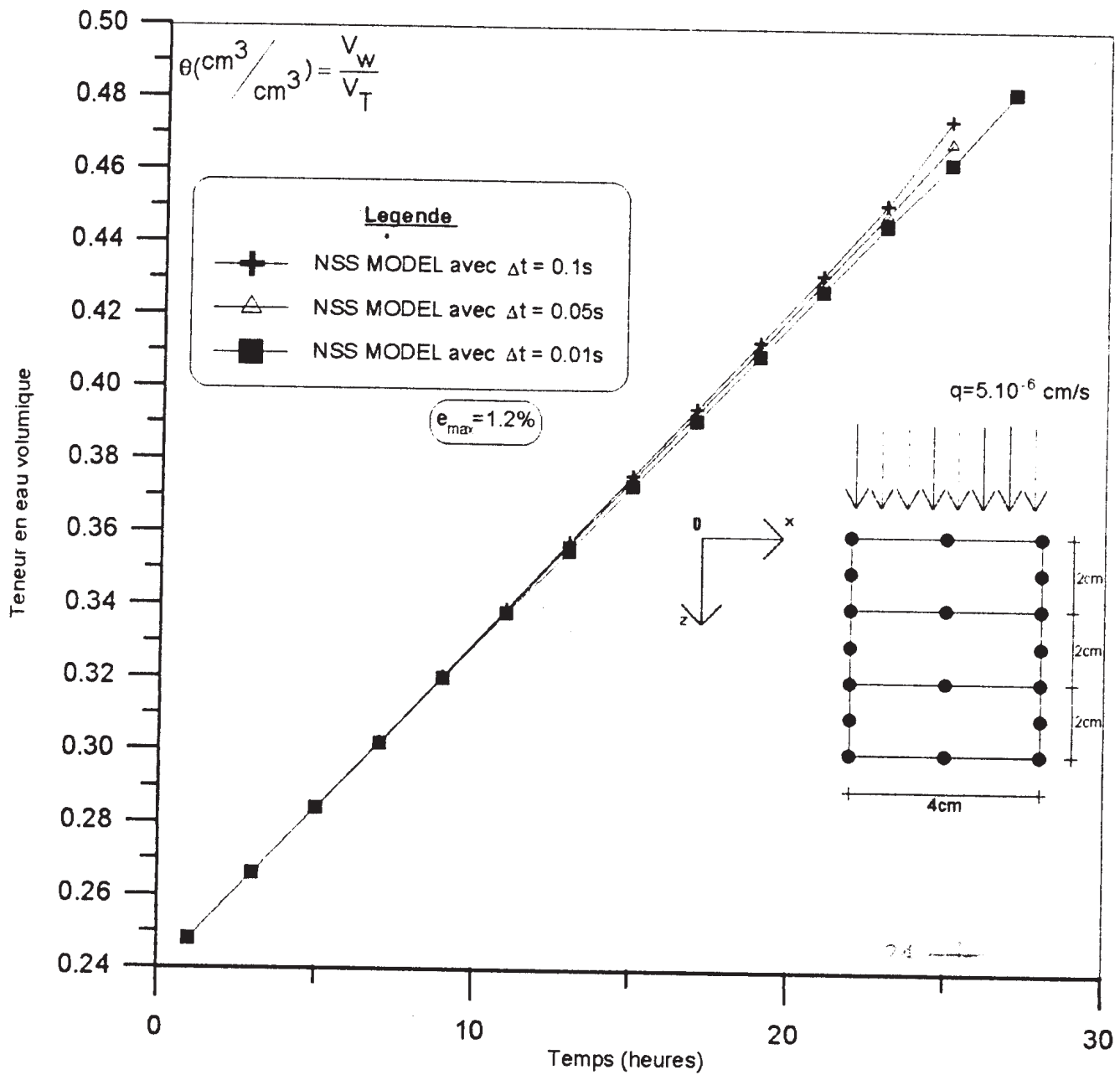


Figure 3.1: Stabilité numérique de la solution

- a) Le sol initialement est à une teneur en eau uniforme.
 b) On applique à sa surface un flux d'eau constant à valeur inférieure ou égale à la conductivité saturée du sol.
 c) L'écoulement transitoire s'opère d'une manière bidimensionnelle dans le premier élément, et la distribution de la teneur en eau est régie par l'équation :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + G$$

pour un sol rigide, et par l'équation :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{D_x(\theta)}{1 + \beta \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{D_z(\theta)}{1 + \beta \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + G$$

pour un sol gonflant.

Cette distribution se poursuit jusqu'à saturation du premier élément.

- d) Une fois l'élément 1 est saturé l'écoulement passe à l'élément 2, à ce moment l'élément 1 devient une zone de transmission pour l'élément 2, ayant un écoulement vertical avec une conductivité constante. (Cette hypothèse est très importante pour notre approche, elle a été utilisée par Green et Ampt(1911) dans leur approche sur l'infiltration dans un sol non saturé. (D. Hillel, 1971).

Mais, pour notre procédure les calculs sont arrêtés une fois le premier élément est saturé, et ainsi, la même procédure est effectuée pour chaque profondeur. Les résultats des différents calculs effectués pour des sols non déformables, et pour des sols déformables, sont reportés sur la figure 3.2. On remarque que dans les deux cas, la variation de la profondeur d'infiltration en fonction de la racine carrée du temps est **parabolique**.

3.5.3 Spécifications de Calcul

Le développement du code de calcul, ainsi que les applications réalisées, ont été effectuées au centre de calcul de l'E.N.T.P Alger, doté d'un mini-ordinateur DEC 5900, opérant sous le système d'exploitation ULTRIX (UNIX de Digital), et utilisant un processeur à architecture RISC.

On donnera dans ce qui suit quelques caractéristiques du code de calcul :

- Nombre total de lignes : ≈ 2100
- Nombre de lignes exécutables : ≈ 1500
- Nombre de lignes commentaires : ≈ 600
- Capacité du programme source : $\approx 73\,400$ octets
- Capacité du programme exécutable : $\approx 395\,400$ octets

Pour le temps de calcul, on note que pour un exemple de simulation de 25 heures d'infiltration, en utilisant un pas de temps de 0.1 s, le temps machine est d'environ 1 heure 40 minute, le code de calcul est répété presque 2.7 million de fois. On remarque ici l'effort considérable de calcul. (Exemple de la figure 3.1 pour une infiltration dans 2 cm de sol)

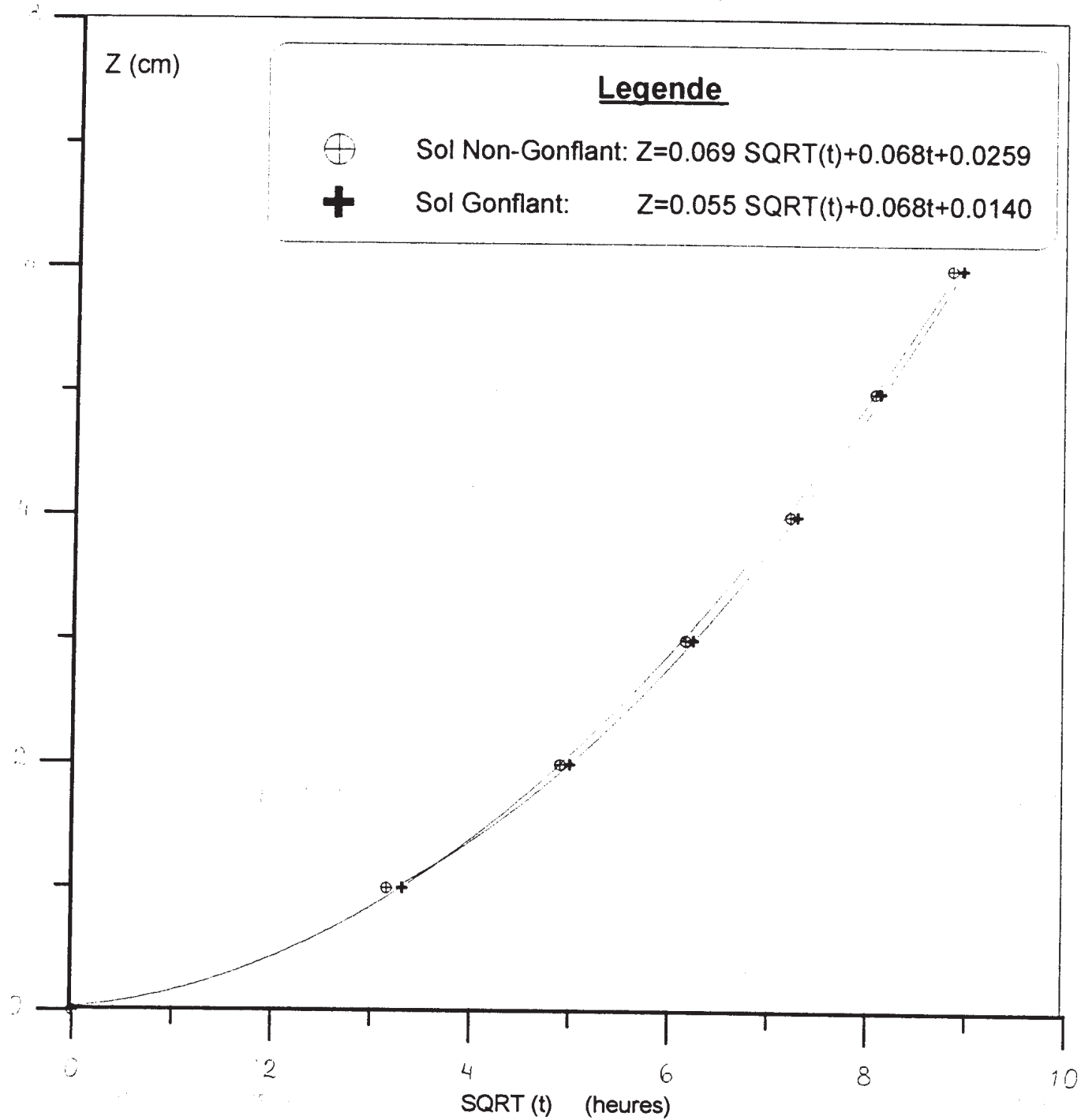


Figure 3.2: Variation de la profondeur d'infiltration en fonction de la racine carrée du temps

3.6 VALIDATION

En général, un modèle est validé en comparant ses résultats par rapport à ceux obtenues par l'une des analyses suivantes :

- Analyses sur modèles analytiques approximatifs
- Analyses expérimentales.
- Analyses numériques existantes pour un problème similaire.
- Analyses numériques existantes pour des problèmes simplifiés.
- Analyses pour le même problème prédit par différents codes de calcul (basés sur des méthodes numériques différentes).

Pour le cas de notre approche on ne dispose que de deux analyses sur modèles analytiques approximatifs, il s'agit de la solution donnée par Philip (1957) et celle donnée par Green et Ampt (1911). et tous deux ont été réalisées pour un sol rigide.

Dans ce cas, la comparaison des résultats se fera au niveau des ordres de grandeur, ainsi que sur la forme de la solution.

3.6.1 Comparaison avec l'Approche de Philip

Philip (1957) a développé une technique déterminant la profondeur d'infiltration d'eau dans un sol rigide en fonction du temps, elle est basée sur le principe de séparation de variables, et a abouti à une solution sous la forme de la série suivante :

$$z(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\theta) \cdot t^{n^2} = f_1(\theta) \cdot t^{1^2} + f_2(\theta) \cdot t^{2^2} + f_3(\theta) \cdot t^{3^2} + \dots$$

avec z comme profondeur d'infiltration (limite atteinte par le front), et les coefficients $f_n(\theta)$ sont fonctions de la diffusivité et de la conductivité du milieu.

Notre approche a donné une solution ayant la même forme que les premiers termes de la série de Philip, à savoir la forme parabolique de la variation de la longueur du front à la racine carrée du temps. On peut conclure qu'on est en accord avec la solution de Philip, au moins sur la forme de la solution obtenue. De plus, les coefficients $f_n(\theta)$ dans notre solution sont effectivement des fonctions de la diffusivité du milieu comme trouvés par Philip. (voir les termes des équations données pour les courbes sur la figure 3.2)

3.6.2 Comparaison avec l'Approche de Green et Ampt

Green et Ampt (1911) ont proposé une solution très simplifiée du problème d'infiltration, leurs principales hypothèses est l'existence d'une limite précise et définie qui est le front d'humidité, et derrière ce front le sol est uniformément humide et possède une conductivité constante. Ainsi le front d'humidité est considéré comme étant un plan séparant la zone d'infiltration à humidité uniforme, à la zone totalement non atteinte par l'infiltration.

En utilisant ces hypothèses, Green et Ampt ont abouti à une relation linéaire entre la profondeur d'infiltration (limite du front) et la racine carrée du temps :

$$z = \sqrt{2D} \cdot t^{1/2}$$

où, D représente, la diffusivité effective du profile d'infiltration.

On peut directement remarquer que cette solution est représentée par le premier terme de la solution de Philip, par conséquent, elle est incluse dans notre solution.

3.7 Influence du Gonflement sur l'Ecoulement

Malgré qu'on ne dispose pas de $D(\theta)$ pour un sol gonflant, nous avons utilisé la même fonction $D(\theta)$ pour les deux cas (sol rigide et sol déformable). Dans le cas du gonflement le temps réalisé pour saturer le premier élément est supérieur à celui réalisé dans le cas de non gonflement. Ainsi l'une des conséquences du gonflement est la réduction de l'infiltrabilité

3.8 CONCLUSION

Dans la section précédente nous avons établi les premiers éléments d'agrément entre notre approche et les approches analytiques existantes, la crédibilité de notre modèle doit être encore renforcée par d'autres comparaisons plus strictes. Cependant, le meilleur moyen pour la validation demeure, et désormais, " l'Expérimentation".

Remarque : Le nom attribué à notre modèle est : **NSS MODEL** signifiant Non Saturated Swelling MODEL, ou modèle pour gonflement sur sol non saturé.

CHAPITRE 4

VALIDATION EXPERIMENTALE DU NSS MODEL

4.1 INTRODUCTION

L'expérimentation étant toujours le meilleur support des résultats théoriques, elle permet non seulement leur validation, mais aussi l'amélioration des hypothèses émises, car elle est basée sur l'observation directe du phénomène physique. Généralement, les premiers tests de validation des modèles sont d'ordre numériques, ils consistent en une vérification grossière des résultats théoriques par rapport à ceux obtenus par un autre modèle traitant le même problème physique, mais utilisant une autre approche. La vérification peut être faite aussi par rapport à la solution analytique, si elle existe. Pour notre modèle, une validation numérique a été réalisée en comparant nos résultats ou plus précisément la forme de la solution donnée par notre modèle, à la solution numérique donnée par Philip (D.Hillel, 1971) sur l'infiltration d'eau dans un sol non saturé et non déformable, l'agrément était bon entre les deux solutions.

La réalisation d'une validation expérimentale dans notre cas était motivée par le souci de vérifier certains résultats très importants concernant les sols déformables, objet d'ailleurs de notre travail de recherche. A cet effet, la mise au point d'un dispositif expérimental pouvant reproduire les mêmes conditions aux limites utilisées pour le modèle théorique était nécessaire.

On présentera dans ce chapitre, la description générale du dispositif d'expérimentation conçu spécialement pour cette étude, on présentera ensuite les caractéristiques des argiles devant être utilisées dans les expérimentations, ainsi que la procédure d'expérimentation, et on réalisera enfin une comparaison des résultats des tests à ceux obtenus par le modèle théorique.

4.2 DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Afin de simuler en laboratoire le phénomène de gonflement d'une argile non saturée soumise à un écoulement d'eau en surface, il nous faut considérer deux éléments principaux, l'argile non saturée proprement dite, et l'eau d'imbibition. Ces deux éléments doivent respecter certaines conditions utilisées d'ailleurs pour obtenir les résultats théoriques. A partir des considérations précédentes, un dispositif expérimental a été conçu, il est composé de deux parties, la première concerne l'argile et son emplacement, la deuxième concerne l'eau et le moyen de son application sur cette argile.

Pour l'argile, on a confectionné des cellules rectangulaire en Plexiglas à différentes hauteurs allant de 3cm à 16cm, et de section de 4cm fois 2cm (dimension de l'élément fini rectangulaire utilisé pour le modèle théorique), ces cellules simulent le confinement latéral et à la base de l'argile, mais un drainage de l'eau est permis à la base de ces cellules afin de détecter la saturation de l'argile. On a prévu sur ces cellules l'emplacement des tensiomètres pour suivre l'évolution de la succion dans l'argile en cours d'absorption d'eau. (fig 4.1)

Pour l'eau, et comme on doit assurer un écoulement continu pour maintenir un flux de surface constant et ceci pendant toute la durée de l'expérimentation, un bac d'alimentation en eau est réalisé assurant un écoulement goutte-à-goutte sur l'éprouvette d'argile. Du fait de la faible absorption de l'eau par l'argile, l'eau en surplus sur l'éprouvette d'argile est récupérée dans un autre bac.

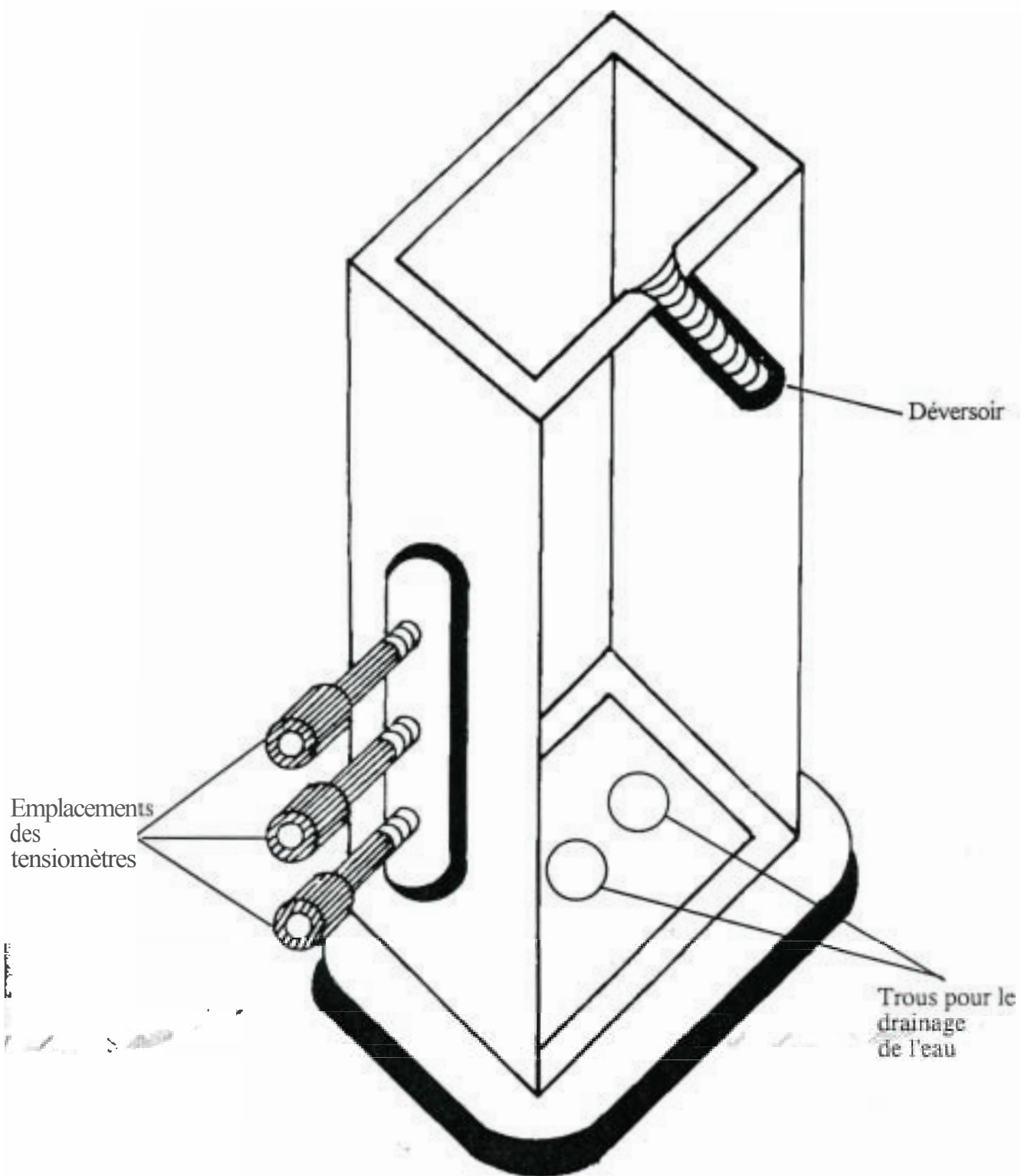


Figure 4.1 : Cellule d'essai en Plexiglas

Pour la mesure du déplacement de surface de l'argile (gonflement unidirectionnel), on a prévu un système de comparateurs pouvant se positionner par l'intermédiaire d'un piston directement sur la surface d'argile, tout en permettant à l'eau de s'infiltrer. (fig.4.2)

4.3 PROCEDURE EXPERIMENTALE

4.3.1 Caractéristiques des Argiles Utilisées

Pour nos expérimentations, nous avons utilisé cinq argiles différentes, elles sont prélevées des régions d'In Amenas et de Touggourt au sud est d' Alger. Leurs caractéristiques physiques et minéralogiques sont résumées dans le tableau 1.

Echantillons : Provenance :	ARM2 (Tgt.)*	ARVR4 (I/A)*	ARGR10 (I/A)	ARVR5 (I/A)	ARM9 (I/A)
Poids Volumiques (g/cm ³)	1.95	—	2.02	—	2.02
Analyse Granulométrique					
% Argile :	96	12	82	40	49
% Limons :	4	83	16	20	27
% Sable fin :	0	5	2	40	24
Limites D'Atterberg					
WL (%) :	86.59	92.47	68.95	51.21	44.11
WP (%) :	32.15	51.05	44.20	29.32	20.77
IP (%) :	54.44	41.42	24.75	21.89	23.33
Composition Minéralogique :	K-I	I-Q-G	K-I-Q	I-G-Q-D	K-I-Q

**Tableau 1 : Caractéristiques Physiques et Minéralogiques
des Argiles Testées**

* Argile de Touggourt

** Argile d'In Amenas

I : Illite

K : Kaolinite

Q : Quartz

G : Gypse

D : Dolomite



Figure 4.2

**Photo du dispositif expérimental ‘‘ MenaSwell ‘‘
mis au point au L.T.P.Sud**

4.3.2 Formules et Calculs

Les expérimentations ont été réalisées sur des échantillons centimétriques de **2cm, 4cm,** et 6cm de hauteur, la teneur en eau volumique ainsi que la densité sèche initiales ont été fixées. et ayant les mêmes valeurs utilisées pour les calculs sur le modèle théorique, et afin de déterminer les quantités en poids de l'argile et de l'eau devant être utilisées dans la confection des éprouvettes d'argile, quelques calculs s'imposent. Ainsi, les formules suivantes doivent être utilisées :

Teneur en eau volumique : $\theta = V_w/V_t$

Teneur en eau massique : $\omega = P_w/P_s$

Densité sèche : $\gamma_d = P_s/V_t$

Avec :

V_w, P_w : Volume et poids d'eau

V_t : Volume total

P_s : Poids sec (grains solides)

La relation qui lie la teneur en eau volumique (θ) à la teneur en eau massique (ω) est la suivante :

$$\theta = \omega \cdot \gamma_d$$

Cette relation est très utile, car l'expérimentation peut nous fournir seulement la teneur en eau massique, mais nous, on s'intéresse à la teneur en eau volumique donnée d'ailleurs par l'approche théorique.

Pour la confection des éprouvettes d'argile compactées, on aurait besoin des quantités en poids de l'argile et de l'eau, et comme la teneur en eau volumique, la densité sèche, ainsi que le **volume** total après compactage sont fixes, il est aisé de déterminer ces quantités :

$$P_s (\text{d'argile}) = V_t \cdot \gamma_d$$

$$P_w = V_t \cdot \theta \quad (\text{la densité de l'eau est prise égale à } 1 \text{ g/cm}^3)$$

Pour les expérimentations la teneur en eau volumique a été fixée à 0.24 et la densité sèche à 1.75 g/cm^3 .

4.3.3 Préparation et Confection des Eprouvettes d'Essai

Une fois les quantités d'argile et d'eau sont déterminées, on réalise le mélange argile (en poudre)-eau, on note que pour toutes nos expérimentations l'eau utilisée est une eau distillée, le mélange obtenu ~~étant~~ malaxée à la main **jusqu'à** obtenir un matériaux très homogène,

Ce matériaux humide ~~étant~~ divisé en parts égales afin de réaliser un compactage homogène par couche dans les cellules. Ce compactage ~~étant~~ réalisé par l'utilisation d'une micro-dame à base rectangulaires de même section que les ~~cellules~~ **cellules**. On a le choix entre un **compactage** dynamique par coups, ou statique en utilisant une presse manuelle, pour nos expérimentations, on a réalisé un compactage dynamique.

4.3.4 Déroulement des Essais

Les deux paramètres recherchés par nos expérimentations sont la variation de la teneur en eau volumique en fonction du temps, et le déplacement de surface (gonflement) en fonction du temps. Mais le paramètre important qui est celui de la variation de la teneur en eau volumique en fonction du déplacement de surface est déduit des deux premiers. La recherche de ces paramètres par les moyens dont on dispose a été effectuée comme suit :

Deux éprouvettes d'argile ont été confectionnées dans les mêmes conditions, la hauteur des éprouvettes étant la même pour assurer le même flux de surface, une des éprouvettes est mise sous comparateur par l'intermédiaire d'un piston pour mesurer seulement le déplacement de surface en fonction du temps, l'autre éprouvette dont on a appliqué en sa surface une charge équivalente à celle du piston (même poids) permet la détermination par une technique de pesé adéquate la variation de la teneur en eau massique en fonction du temps, la teneur en eau volumique recherchée étant déduite de la teneur en eau massique en utilisant la relation qui les lie , toute en prenant en compte la variation du volume de l'argile qui modifie la densité sèche.

Les teneurs en eau dans les éprouvettes d'argile sont déterminées à partir de la connaissance de l'eau infiltrée, celle-ci étant déterminée par différence entre pesés à des intervalles de temps précis, au début des expérimentations les pesés sont très rapprochés (chaque deux heures) car l'infiltration est importante, ensuite elle décroît avec le temps.

L'essai est continué jusqu'à saturation de l'argile, celle-ci étant détectée par la sortie d'eau du bas de l'éprouvette. ou par la stabilisation du déplacement de surface mesuré par le comparateur, quoique le gonflement continu dans le temps même après saturation de l'argile, mais seulement il est très faible.

4.4 RESULTATS DES TESTS ET COMPARAISONS

4.4.1 Résultats des Tests

Les résultats des différents essais d'infiltration et de gonflement libre sont rapportés pour les différentes argiles testées sur une même figure, en plus des résultats donnés par le modèle théorique.

Trois types de courbe ont été tracées à savoir :

- a) La variation de la teneur en eau volumique en fonction du temps. (Figures 4.3 et 4.4)
- b) La variation du déplacement de surface relatif (ou déformation de gonflement) en fonction du temps. (Figures 4.5 et 4.6)
- c) La variation du déplacement de surface relatif en fonction de la teneur en eau volumique. (Figures 4.7 et 4.8)

Les courbes des figures 4.7 et 4.8 permettent en outre la détermination de l'un des paramètres du modèle théorique, mais aussi, la vérification de l'hypothèse émise sur la variation de la déformation de gonflement en fonction de la teneur en eau volumique.

4.4.2 Comparaisons

La comparaison des résultats a partir des courbes tracées doit se faire premièrement entre les courbes expérimentales elles mêmes, ensuite entre ces courbes expérimentales et les courbes obtenues a partir du modèle théorique.

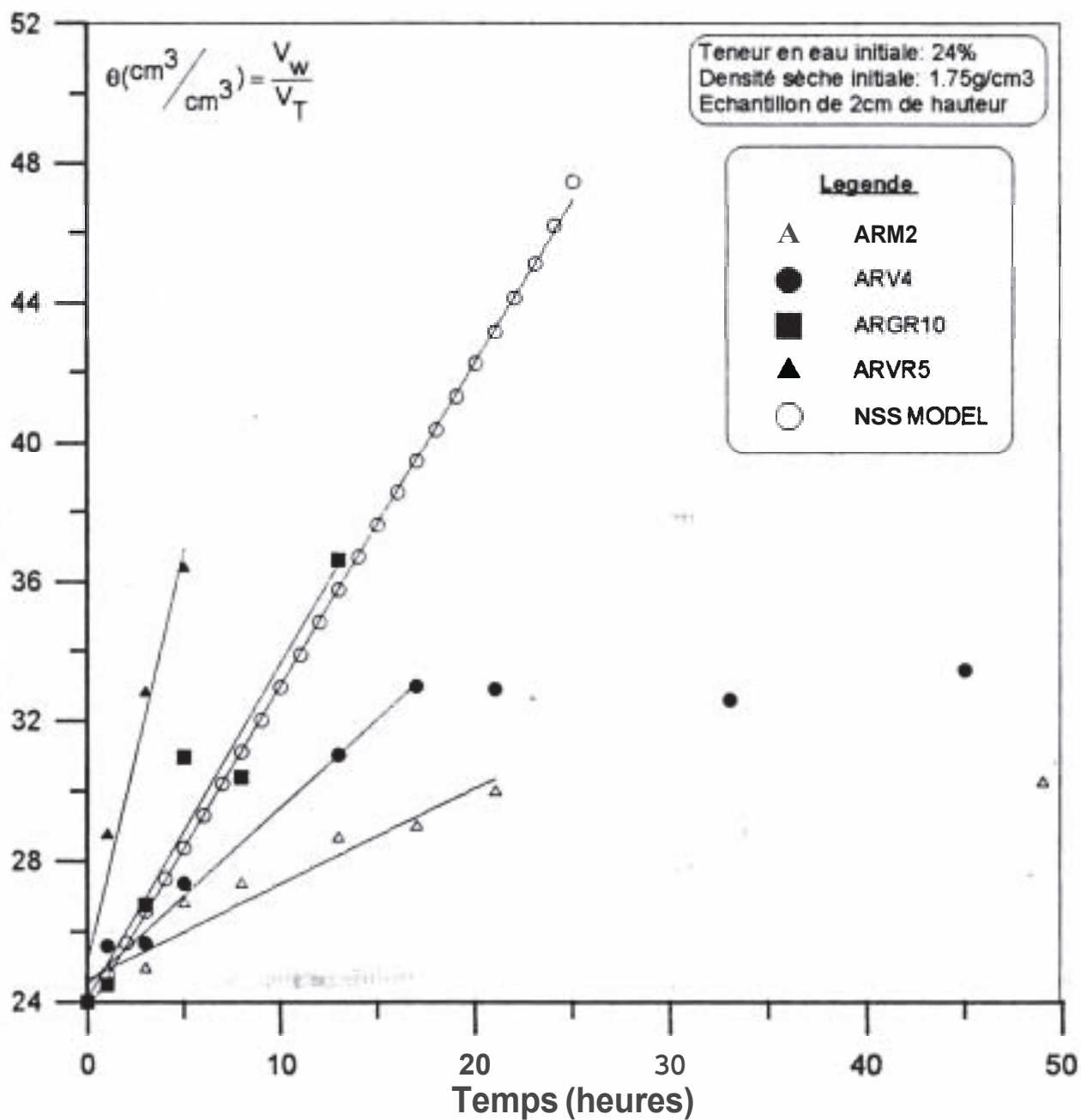


Figure 4.3: Variation de la teneur en eau volumique en fonction du temps

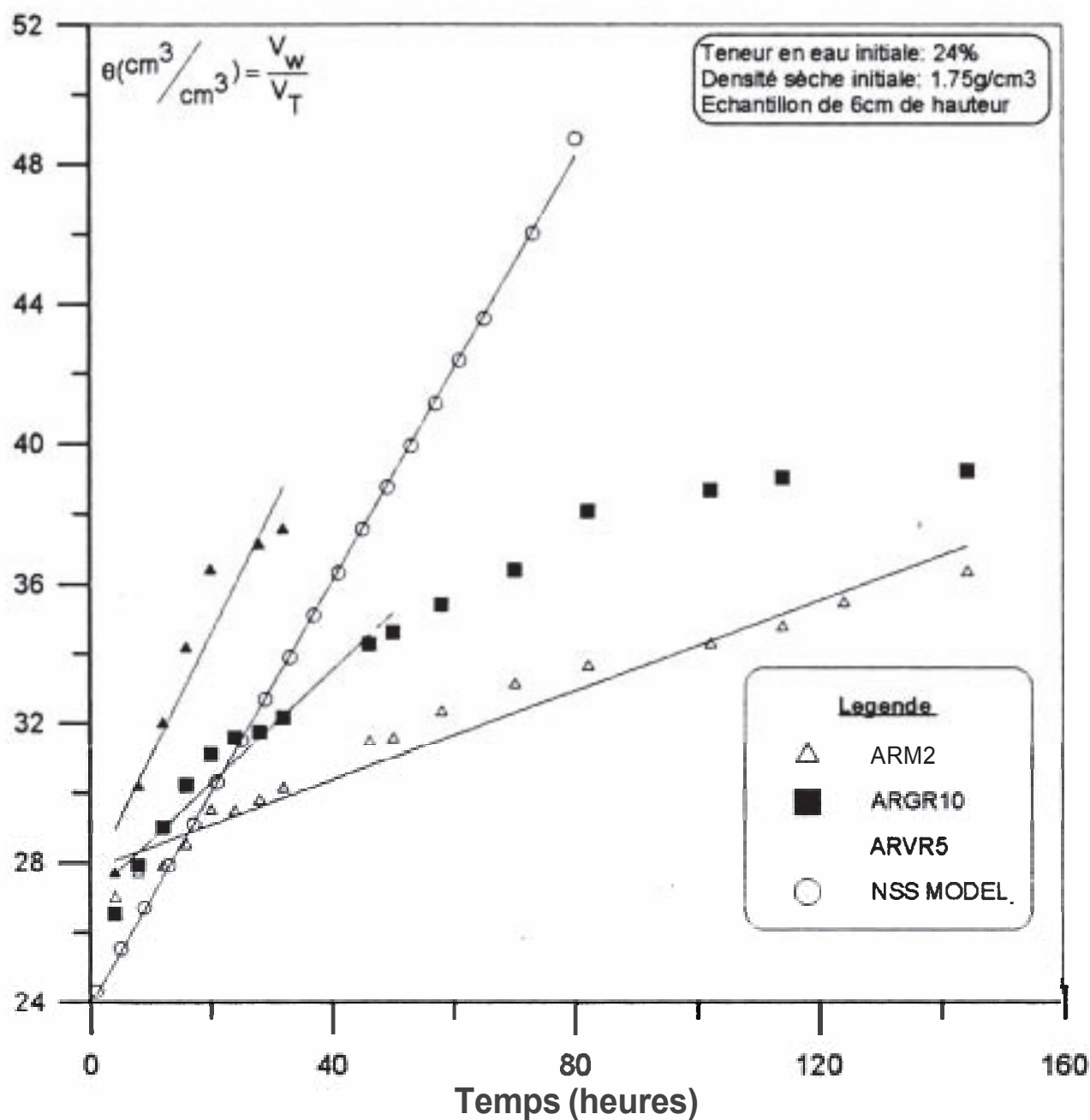


Figure 4.4: Variation de la teneur en eau volumique en fonction du temps

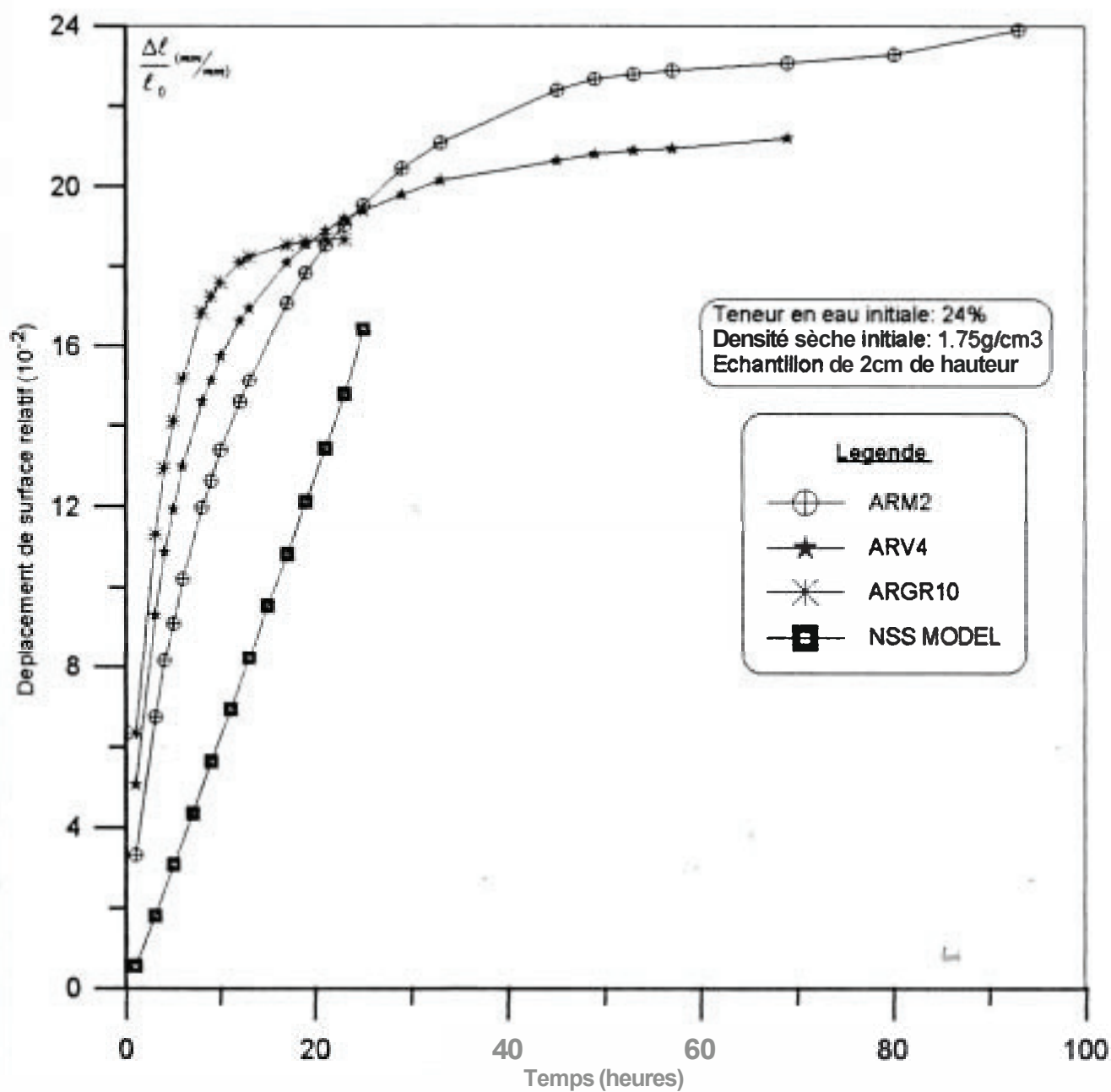


Figure 4.5: Variation du déplacement de surface relatif en fonction du temps

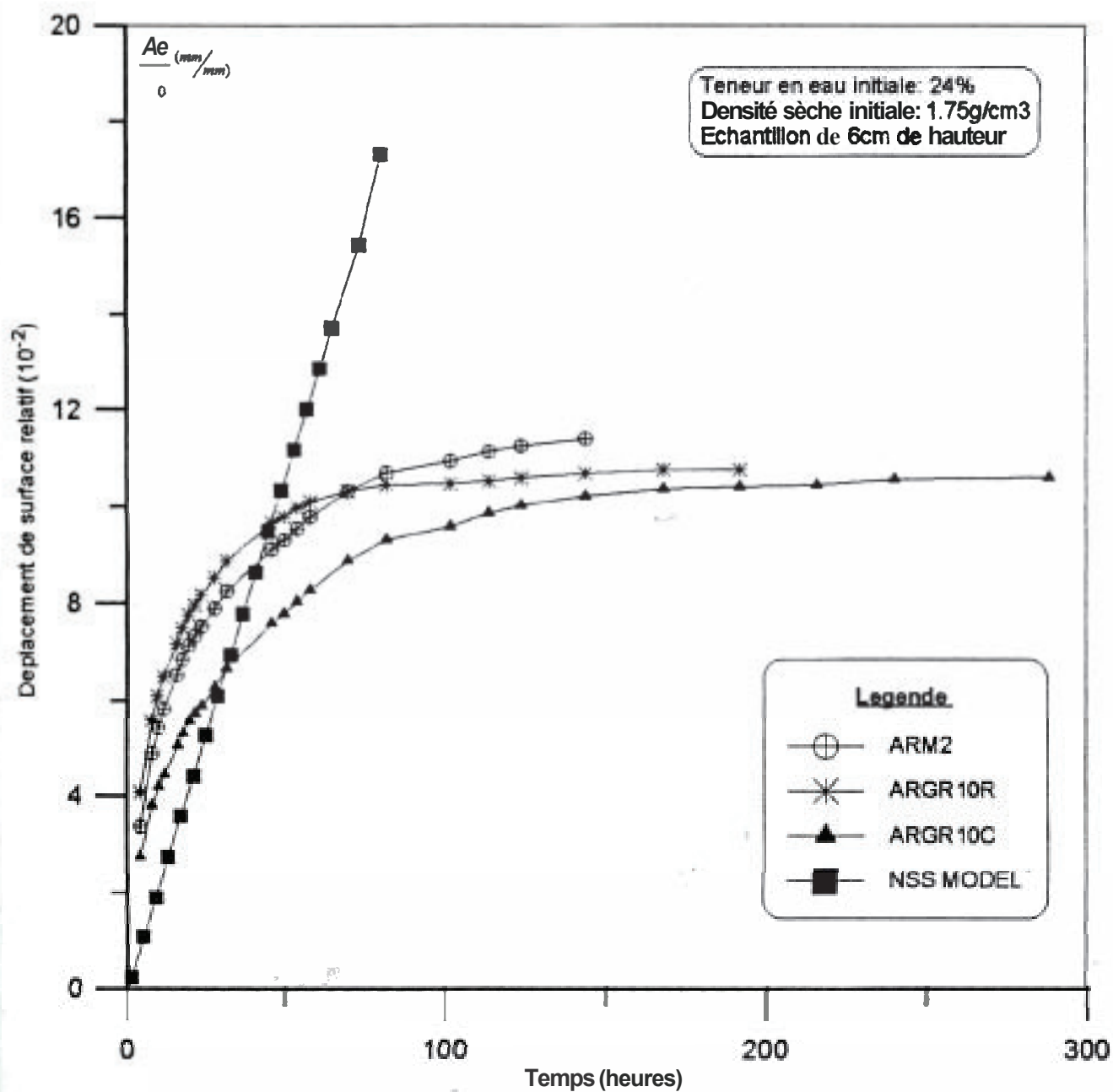


Figure 4.6: Variation du déplacement de surface relatif en fonction du temps

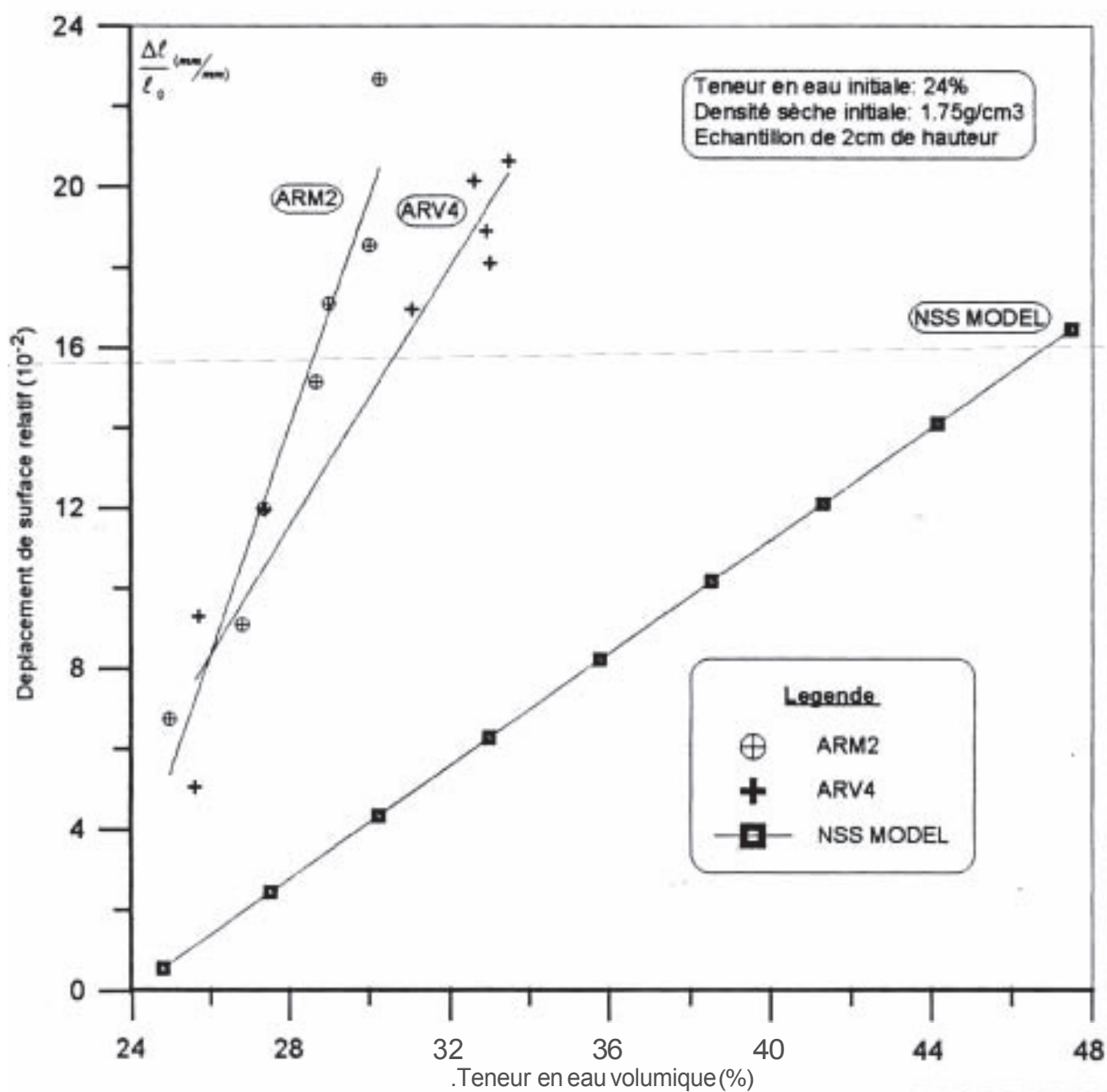


Figure 4.7: Variation du déplacement de surface en fonction de la teneur en eau volumique

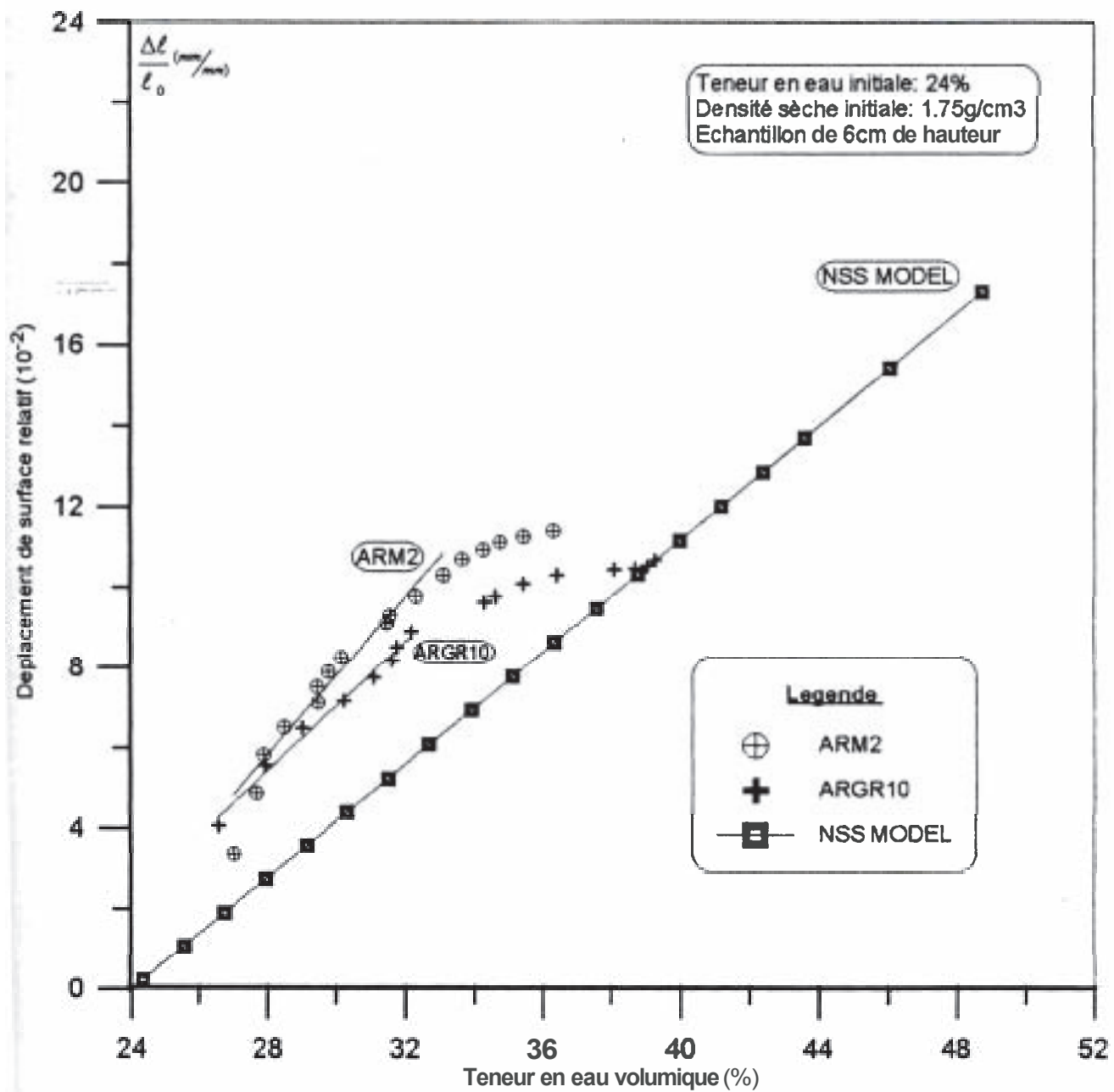


Figure 4.8: Variation du déplacement de surface en fonction de la teneur en eau volumique

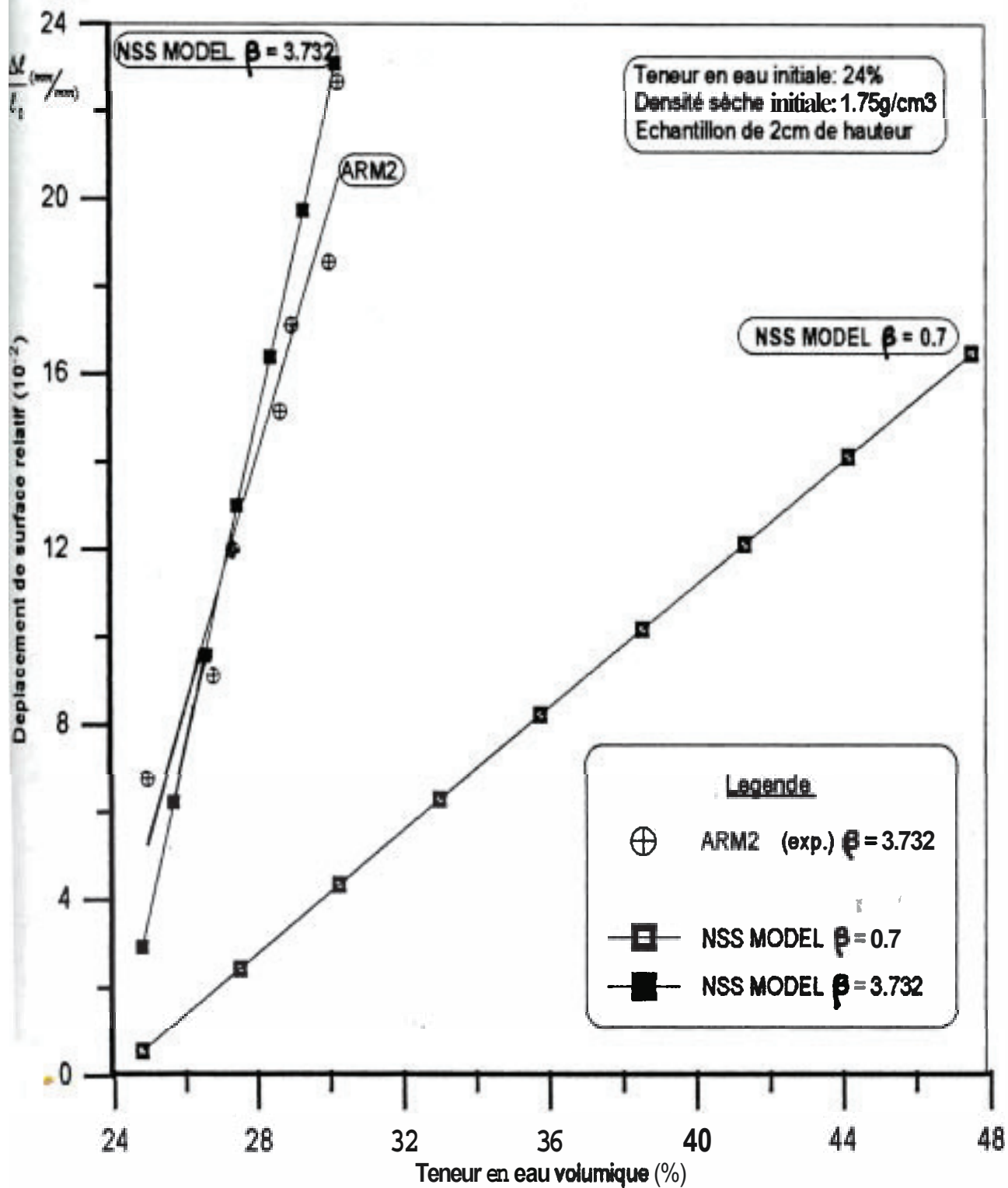


Figure 49: Variation du déplacement de surface en fonction de la teneur en eau volumique

4.4.2.1 Courbes Expérimentales Seules

a) Variation de la teneur en eau volumique en fonction du temps

L'observation de ces courbes sur la figure 4.3 correspondant à un échantillon de 2 cm, et sur la figure 4.4 correspondant à un échantillon de 6 cm, permet de distinguer trois zones dans toutes les courbes:

La première zone correspond au début de l'infiltration, elle est représentée par un ensemble de points dont la variation est proche d'une courbe. (ARGR10) La deuxième zone correspond à la plus grande partie de la courbe, elle est linéaire pour l'ensemble des courbes. La troisième zone représentée par un ensemble de points formant une branche de courbe tendant vers une asymptote. évidemment ceci représente la saturation de l'argile. (mêmes résultats obtenus par Uzan, J. Et Lytton, R.L. 1978)

b) Variation de la déformation de gonflement en fonction du temps.

L'analyse de ces courbes sur la figure 4.5 pour des échantillons de 2 cm, et sur la figure 4.6 pour des échantillons de 6 cm, a permis de retrouver un type de courbes bien connu, c'est l'hyperbole rectangulaire, ce type de courbes est aussi mis en évidence par des essais à l'odomètre. (Dakshanamurthy, V. 1978) Ces courbes présentent une asymptote dont le début correspond au début de la saturation de l'argile, ceci coïncide exactement avec la fin de la linéarité pour les courbes des figures 4.3 et 4.4.

c) Variation de la déformation de gonflement en fonction de la teneur en eau volumique.

L'analyse de ces courbes sur la figure 4.7 pour des échantillons de 2 cm, et sur la figure 4.8 pour des échantillons de 6 cm, a permis de retrouver une linéarité pour l'ensemble des points pour les échantillons à 2 cm, et dans le cas des échantillons à 6 cm, cette linéarité est vérifiée pour la plus grande partie de la courbe, mais le reste est représenté par une branche de courbe allant vers une asymptote. Cet asymptote confirme les observations faites précédemment sur le fait que lorsqu'on approche la saturation, il ya en même temps une diminution de l'infiltration et de la déformation. D'autre part, l'hypothèse émise sur la linéarité entre la déformation de gonflement et la variation de la teneur en eau volumique est vérifiée.

4.4.2.2 Courbes Expérimentales-Courbes Théoriques

a) Variation de la teneur en eau volumique en fonction du temps

Les résultats obtenus à partir du modèle de simulation sont représentés dans la même figure 4.3 que les courbes expérimentales, la variation étant linéaire durant toute la période d'infiltration jusqu'à saturation de l'échantillon d'argile, la ou on arrête les calculs, ce qui ne permet pas de tracer la branche asymptotique mise en évidence par les courbes expérimentales. Pour la non linéarité observée sur certaines courbes expérimentales lors des premières heures d'infiltration (ARM2 pour 2cm, et ARGR10 pour 6cm), ceci est très probablement dû à un phénomène physique observé sur la surface de l'argile non saturée lors de son premier contact avec l'eau, il s'agit de l'effritement des quelques premiers millimètres d'argile; et du mouvement de la vapeur d'eau qui perturbent l'infiltration, phénomènes non pris en compte dans le modèle théorique. Mais en conclusion, la linéarité de la variation de la teneur en eau volumique avec le temps est validée.

b) Variation de la déformation de gonflement en fonction du temps.

Dans cette série de courbes (figures 4.5 et 4.6), la courbe théorique ne semble pas avoir le même type de variation que les courbes expérimentales, quoique le sens de variation est le même, à savoir, l'augmentation de la déformation de gonflement en fonction du temps **jusqu'à** un certain seuil, là où commence la branche asymptotique pour les courbes expérimentales.

La non obtention du même type de variation par la courbe théorique est probablement dû à la fonction de **diffusivité $D(\theta)$** utilisée par le code de calcul, celle-ci étant déterminée pour un sol non **déformable**, ou encore l'effet négligé des autres paramètres. Mais, l'erreur entre les deux courbes n'est pas très importante, surtout si la droite théorique est comparée à la première branche de la courbe expérimentale, qui est presque linéaire.

c) Variation de la déformation de gonflement en fonction de la teneur en eau volumique.

Dans cette série de courbes (figures 4.7 et 4.8), la linéarité de la variation est vérifiée sur toutes les courbes, ceci constitue une double vérification de notre approche, la première concerne la vérification expérimentale de l'hypothèse émise, la deuxième concerne une vérification de la résolution numérique de notre équation. Pour les courbes ARGR10 et ARV4 de la figure 4.7, et la courbe ARM2 de la figure 4.8, on doit noter que les droites correspondantes pour les quatre premières heures d'infiltration ne semblent pas avoir la même pente que le reste de la courbe (droite), ceci est en relation directe avec les effets de surface évoqués précédemment. La pente des courbes **expérimentales** (des droites), représente le paramètre β du modèle.

d) Introduction du paramètre β dans NSS MODEL .

L'introduction du paramètre β déterminé à partir des courbes de la figure 4.7 dans le code de calcul, permet de tracer les courbes théoriques de la variation du déplacement de surface (ou gonflement) en fonction de la teneur en eau volumique, et la comparaison de ces courbes avec les courbes expérimentales permettra la validation du modèle à un **paramètre** près, puisque le deuxième paramètre du modèle, c'est à dire **$D(\theta)$** , n'est pas déterminé à partir de l'argile considérée (ou celle qui a permis la détermination du paramètre β). Sur la figure 4.9 on observe les deux droites représentant la variation du déplacement de surface (ou gonflement) en fonction de la teneur en eau volumique pour l'argile ARM2, elles sont **très** proches l'une de l'autre, ce qui implique une corrélation entre la courbe **théorique** et la courbe expérimentale.

4.5 Conclusion

La procédure expérimentale réalisée, ainsi que les résultats obtenus nous ont permis de mettre en évidence les premiers éléments de corrélation entre le modèle théorique et l'expérimentation. Mais, une validation complète et stricte nécessite l'introduction dans le modèle théorique des paramètres obtenus du même sol devant être utilisé dans le modèle expérimental, il s'agit pour notre cas de la fonction **diffusivité $D(\theta)$** , ~~et le~~ paramètre de **gonflement β** . Ce deuxième **paramètre** a été déterminé avec notre dispositif, et son introduction dans le code de calcul a permis un rapprochement appréciable des courbes théoriques et **expérimentales**. Malheureusement, la détermination de $D(\theta)$ nous a été impossible du fait qu'elle nécessite un matériel et une technique spéciale

CONCLUSION GENERALE

Notre présente approche au problème du gonflement des argiles non-saturées nous a permis de mettre en évidence certains comportements qui quoique seuls ne suffisent pas pour une totale compréhension du phénomène et de sa quantification mais constituent un pas vers la maîtrise de celui-ci. En effet, la connaissance de la variation de la teneur en eau en fonction du temps et de la profondeur **telle** que déterminée par notre modèle, constitue une des informations les plus importantes en vue de la détermination de la profondeur d'instabilité au dessous **duquelle** les constructions doivent être fondées **pour** garantir une sécurité maximales vis-à-vis du soulèvement.

La principale limitation de notre présent modèle est la non prise en compte de la macrostructure du milieu, c'est à dire les fissures, celles-ci constituent un facteur important qui favorise l'infiltration d'eau en profondeur. D'autre part, notre modèle théorique **offre** plusieurs possibilités d'extension, vue la manière dont il est construit, il permettra en conjonction avec le modèle physique associé (c'est à dire, l'expérimentation conduite à l'aide du dispositif mis au point) l'introduction de nouveaux paramètres ayant une influence sur le phénomène de gonflement.

Nos deux approches théorique et expérimentale constituent une des bases pour les travaux futures sur le problème de gonflement des argiles non saturées, car il reste beaucoup à faire en vue d'une maîtrise totale du problème.

CONCLUSION GENERALE

Notre présente approche au problème du gonflement des argiles non-saturées nous a permis de mettre en évidence certains comportements qui quoique seuls ne suffisent pas pour une totale compréhension du phénomène et de sa quantification mais constituent un pas vers la maîtrise de celui-ci. En effet, la connaissance de la variation de la teneur en eau en fonction du temps et de la profondeur telle que déterminée par notre modèle, constitue une des informations les plus importantes en vue de la détermination de la profondeur d'instabilité au dessous de laquelle les constructions doivent être fondées pour garantir une sécurité maximale vis-à-vis du soulèvement.

La principale limitation de notre présent modèle est la non prise en compte de la macrostructure du milieu, c'est à dire les fissures, celles-ci constituent un facteur important qui favorise l'infiltration d'eau en profondeur. D'autre part, notre modèle théorique offre plusieurs possibilités d'extension, vue la manière dont il est construit, il permettra en conjonction avec le modèle physique associé (c'est à dire, l'expérimentation conduite à l'aide du dispositif mis au point) l'introduction de nouveaux paramètres ayant une influence sur le phénomène de gonflement.

Nos deux approches théorique et expérimentale constituent une des bases pour les travaux futures sur le problème de gonflement des argiles non saturées, car il reste beaucoup à faire en vue d'une maîtrise totale du problème.

Références Bibliographiques

- [1] Bailey, W. A. 1965. "The Effect of Salt Content on the Consolidation Behavior of Saturated Remoulded Clays". USAE Waterways Experimental Station, Vicksburg, Contract Rpt 3-101, P. 162.
- [2] Baveye, P., 1992 "Operational Aspects of the Mechanics of Deforming Porous Media: Theory and Application to Expansive soils". In Karalis, T.K. (ed), Mechanics of swelling: From Clay to Living Cells and tissues. NATO ASI Series, Vol. H 64, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [3] Bear, J., Zaslavsky, D., and Irmay, S. 1968 "Physical Principles of Water Percolation and Seepage". UNESCO, Paris.
- [4] Briant, J. 1969 "Pression de Gonflement de L'argile : Mesure et signification". Comptes Rendus du 3ème colloque A. R. T. F. P. Editions technip 1969, pp. 577-618.
- [5] Bruce, R.R., and Klute, A., 1956 "The measurement of soil water diffusivity". Soil Sci. Soc. Amer. Proc., Vol. 20: 458-462.
- [6] Buckingham, E., 1907 "Studies on the Movement of Soil Moisture". Bull. 38, U. S. Dep. of Agr., Washington, D. C.
- [7] Chapman, D. L. 1913. "A Contribution to the Theory of Electrocapilarity". Philisophical Magazine, 25(6), pp. 475-481.
- [8] Childs, E.C., and Collis-George, N., 1950 "The permeability of porous materials" Proc. Roy. Soc., Vol. 201A: 392-405.
- [9] Cittonova, O. P. 1970. "Physicochimie Appliquée aux Argiles : Contribution à l'Etude de leurs Propriétés Mécaniques". Thèse. Université de Grenoble. 245p.
- [10] Cook, R.D., Malkus, D.S., and Plesha, M.E., 1989 "Concepts and applications of finite element analysis". Third Edition, John Wiley&Sons, New York: 630p.
- [11] Dakshanamurthy, V., 1978 "A new method to predict swelling by using hyperbolic equation". Geot. Eng., Vol. 9 : 29-38.
- [12] Gardner, W. R. and Mayhugh, M. S., 1958 "Solution and test of the diffusion equation for the movement of water in soil". Soil Sci. Soc. Amer. Proc., : Vol. , 22 : 197-201.
- [13] Gouy, G. 1910. "Sur la Constitution de la Charge Electrique à la Surface d'un Electrolyte". J. Physique 9(4), pp. 457-468.
- [14] Gubta, S. N., Gubta, B. N. and shukla, K. P. 1969 "Physico-Chemical Properties of Expansive Clays in Relation to their Engineering Behavior".
- [15] Halitim, A., 1988 "Sols des Régions Arides d'Algérie". O.P.U Algérie : 384 p.

- [16] Hillel, D., 1971 "*Soil and Water*" Academic Press, New York.
- [17] Hinton, E., and Owen, D.R.J., 1977 "*Finite Element Programming*". Academic Press, London: 305p.
- [18] Hughes, T.J.R., 1977 "*Unconditionally stable algorithms for nonlinear heat conduction*". Computer Methods in Applied Mechanics and engineering, Vol. 10: 135-139.
- [19] Hughes, T.J.R., Levit, L., and Winget, J., 1983 "*Element by Element Implicit Algorithms for heat conduction*". J. Engr. Mech., Vol. 109, N° 2, ASCE: 576-585.
- [20] Humbert, P., 1984 "*Application de la méthode des éléments finis aux écoulements en milieux poreux*". Bult. Liaison Lab. P. et Ch., N° 132: 21-37.
- [21] Karalis, T.K., 1990 "*Compressibilité des argiles gonflantes non saturées à partir des essais rhéologiques*". Can. Geotech. J., Vol. 67: 90-104.
- [22] Ladd, C. C. , and Lambe, T. W. , 1961 "*Identification and Behaviour of Expansive Clay*". Proc. Fifth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. 2 .
- [23] Langmuir, L. 1938. "*The Role of Attractive and Repulsive Forces in the Formation of Tactoids, Thixotropic Gels, Protein Crystals, and Coacervates*". J. Chem. Physics, Vol. 6: pp. 873-96.
- [24] Laudelout, H. 1957. "*Etude de la Répartition des Charges sur les Surfaces des Particules Argileuses*". Bull. Gr. Français des argiles, tome IX , n° 4, pp. 45-57.
- [25] Lietard, O. 1970 . "*Contribution à l'Etude des Propriétés Physico-Chimiques Cristallographiques et Morphologiques des Kaolins*". Thèse. Institut National Polytechnique de Lorraine. 311p.
- [26] Mitchell, J. K. 1976. "*Fundamentals of Soil Behavior*". John Wiley and Sons, New York .
- [27] Nakano, M., Amemiya, Y., and Fujii, K., 1986 "*Saturated and unsaturated hydraulic conductivity of swelling clays*". Transportation Research Record, N° 1: 1-6.
- [28] Narasimhan, T.N., and Witherspoon, P.A., 1977 "*Numerical model for saturated-unsaturated flow in porous media .1. Theory*". Water Resour. Res., Vol. 13, N°3: 657-664.
- [29] Narasimhan, T.N., and Witherspoon, P.A., 1978 "*Numerical model for saturated-unsaturated flow in deformable porous media .3. Applications*". Water Resour. Res., Vol. 14, N°6: 1017-1034.
- [30] Neuman, S.P., 1973 "*Saturated-Unsaturated Seepage by Finite Elements*". J. Hyd. Div., Vol. 99, N° HY12: 2233-2250.

- [31] Philip, J.R., 1955 "*The Concept of Diffusion Applied to Soil Water*". Proc. Nat. Acad. Sci. India (Allahabad), A24, 93-104 .
- [32] Philip, J.R., 1957 "*The Theory of Infiltration : 1. The Infiltration Equation and its Solution*". Soil Sci., Vol. 83:345-357.
- [33] Philip, J.R., 1968 "*Kinetics of Sorption and Volume Change in Clay Colloid Pastes*", Aust. J. Soil Res., Vol. 7: 249-267 .
- [34] Philip, J.R., and Smiles, D.E., 1969 "*Kinetics of sorption and volume change in three-component systems*". Aust. J. Soil Res., Vol. 7: 1-19.
- [35] Richards, L. A. , 1931 "Capillary Conduction of Liquids Through Porous Mediums". Physics, Vol. 1. pp. 318-333.
- [36] Robinson, R. A., and Stokes, R. H. , 1968 "*Electrolyte Solutions*" Second Edition, Butterworths, London, England .
- [37] Runacher, J. M. 1970 "*La Structure des Argiles : Application à l'Etude de leurs Propriétés Macroscopiques*". Thèse, Faculté des Science de Grenoble, 280 p.
- [38] Smiles, D.E., and Rosenthal, J.M., 1968 "*The movement of water in swelling materials*". Aust. J. Soil Res., Vol. 6, N° 4: 237-248.
- [39] Stern, O. 1924. "*Zur Theorie der elektrolytischen Doppelschicht*". Zeitschrift Electrochem, 30, pp. 508-516.
- [40] Terzaghi, K. , 1931 "The Influence of Elasticity and Permeability on the Swelling of Two Phase systems". Colloid Chemistry, Vol. 3, pp. 65-88.
- [41] Terzaghi, K. , 1956 "Discussion to Bolt (1956)". Geotechnique". Vol. 6, pp. 191-192.
- [42] Troalen, J. P. , Aboushook, M. , and Tisot, J.P. 1984 "*Utilisation du Microscope Electronique à Balayage en Vue de la Compréhension des Mécanismes du Gonflement des sols Argileux*". Revue Française de Géotechnique N° 29. PP. 75-84.
- [43] Uzan, J., and Lytton, R.L., 1978 "*Measurement of flow properties of expansive clays*". Int. J. Num. and Anal. Meth. Geom., Vol. 2: 73-86.
- [44] Van Olphen, H. 1963. "*An Introduction to Clay Colloid Chemistry*". John Wiley and Sons, , New York.
- [45] Van Olphen, H. 1977. "*An Introduction to Clay Colloid Chemistry*". Interscience Publishers, New York, pp. 260-293.
- [46] Wilson, E.L., Bathe, K.J., and Peterson, F.E., 1974 "*Finite element analysis of linear and nonlinear heat transfer*". Nuclear Engineering and Design, Vol. 29: 110-124.

Références Non Citées :

- [1] Amir, J.M., and Sokolov, M., 1976 "Finite element analysis of piles in expansive media". J. Geotechnical Engr. Divis., Vol. 102, N° GT7: 701-719.
- [2] Amir, J.M., 1973 "Unsaturated flow in expansive clay". Prec. 3rd Int. Conf. on expansive soils, Vol. II, Haifa, Israel: 115-117.
- [3] Annequin, R. et Boutigny, J. 1979 "Thermodynamique". cours de science physique, 4 ième Edition Vuibert .
- [4] Barbour, S.L., and Fredlund, D.G., 1989 "Mechanisms of Osmotic flow and volume change in clay soils". Can. Geotech. J. Vol. 26: 551-562.
- [5] Belkeziz, A., and Magnan, J.P., 1982 "Analyse numérique de la consolidation bidimensionnelle des sols élastoplastiques". Rapport de recherche LPC N° 115, Paris, France.
- [6] Black, T.A., Gardner, W.R., and Thurtell, G.W., 1969 "The prediction of evaporation, drainage and soil water storage for a bare soil". Soil Science Soc. Amer. Proc., Vol. 33: 655-660.
- [7] Bronswijk, J.J.B., 1988 "Modeling of water balance, cracking and subsidence of clay soils". J.Hydrol., Vol. 97: 199-212.
- [8] Bouma, J., 1980 "Field measurement of soil hydraulic properties characterizing water movement through swelling clay soils". Journal of Hydrology, 45: 149-158.
- [9] Bolt, G. H. and Frissel, M. J. 1960 "Thermodynamics of soil moisture" Netherlands J. Agr. Sci. Vol. 8, pp. 57-78 .
- [10] Dakshanamrthy, V., and Fredlund, D.G., 1981 "A Mathematical model for predicting moisture flow in an unsaturated soil under hydraulic and temperature gradients". Water Resources Research, Vol. 17, N° 3: 714-722.
- [11] Delage, P., 1987 "Aspects du comportement des sols non saturés". Revue Française de Géotechnique N°40: 33-43.
- [12] Dempsey, B.J., 1978 "A Mathematical model for predicting coupled heat and water movement in unsaturated soil". Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., Vol. 2(1): 19-34.
- [13] Gadala, M.S., Dokainish, M.A. and Oravas, G.AE., 1984 "Formulation methods of geometric and material nonlinearity problems". Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 20: 887-914.
- [14] Groenevelt, P. H. and Bolt, G. H. 1972 "Water retention in soil". Soil Sci. N° 113: pp.238-245 .
- [15] Groenevelt, P. H. and Parlange, J. Y. 1974 "Thermodynamic stability of swelling soils". Soil sci. 118[1] : pp. 1-5 .

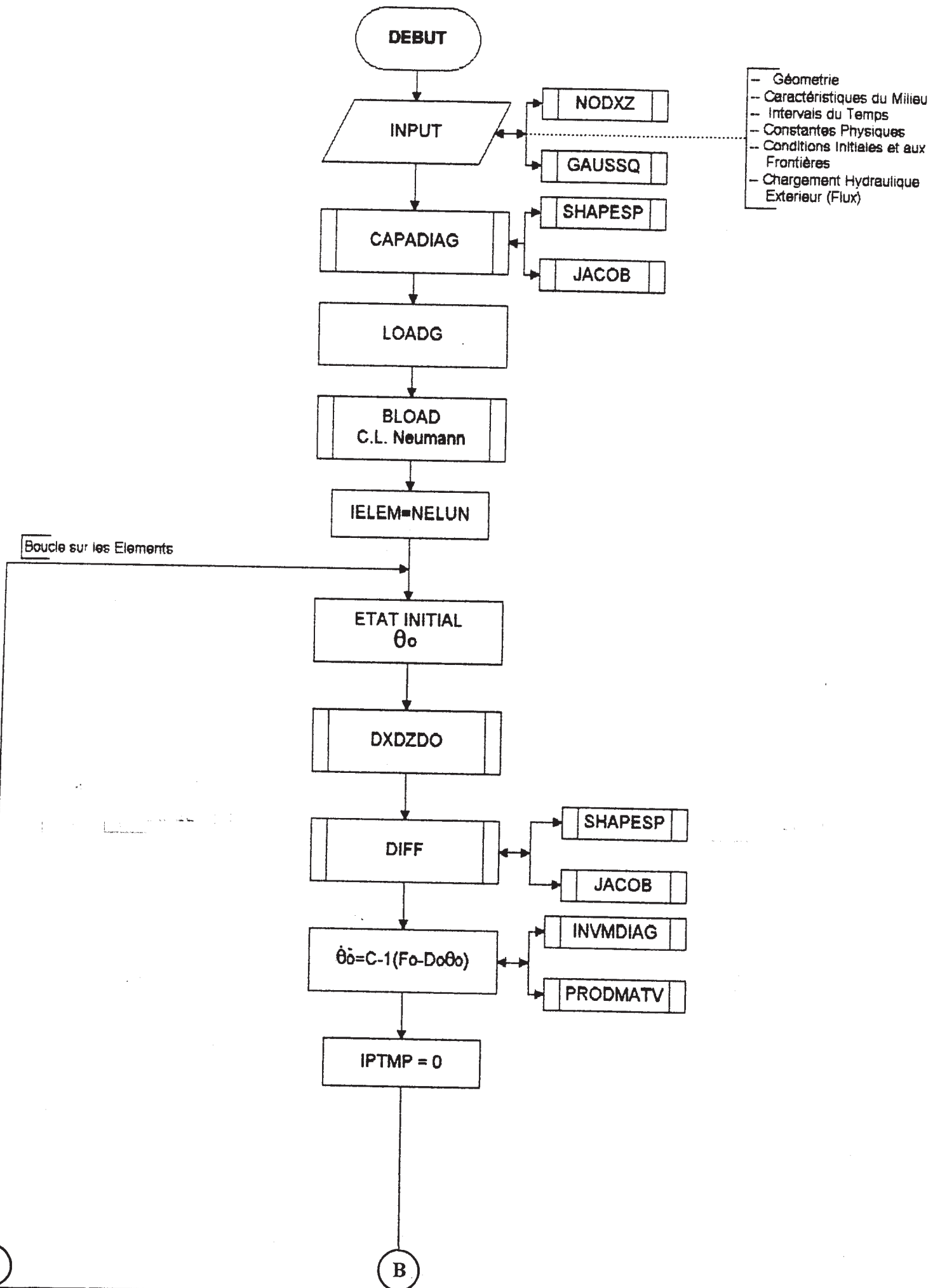
- [16] Hafsi, A., 1993 "Double Layer Theory and Swelling of Non-Saturated Clays". Euromech Colloquium N° 290 on Mechanics of Swelling. Rhodes, Greece 23-27 August.
- [17] Houpeurt, A., 1975 "*Elément de mécanique des fluides dans les milieux poreux*". Editions Technip, Paris, France.
- [18] Hughes, T.J.R., 1987 "*The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*". Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- [19] Jacob, U., Raphael, B., and Sam, F., 1987 "*Characterization of Constrained Swelling of Clay*". Transportation Research Record, N° 1137: 52-58.
- [20] Jean-charles sisi, 1981 "*Principe de thermodynamique*" Mc Graw-hill, Editeurs : 388 pp
- [21] Karalis, T.K., 1992 "*Thermodynamics of soils swelling non hydrostatically*". Nato ASI Series, Vol. H64, Mechanics of swelling, Edited by T.K. Karalis, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [22] Karalis, T.K., 1993 "*Water Flow in non-saturated swelling soil*". Int. J. Engng Sci., Vol. 31, N° 5:751-774.
- [23] Lambe, T.W., and Whitman, R.V., 1979 "*Soil Mechanics, SI version*". John Wiley & Sons, New York.
- [24] Lauffenburger, Y. 1983 "Introduction à la thermodynamique chimique" O.P.U Algerie : 131 pp.
- [25] Leonards, G. A. 1962 "*Engeneering Properties of Soils*". Foundation Engineering. McGraw - Hill Book Company, Chapter 2.
- [26] Lloret, A., and Alonso, E.E., 1980 "*Consolidation of unsaturated soils including swelling and collapse behaviour*". Géotechnique, Vol. 30, N° 4:449-477.
- [27] Lo, S.H., 1985 "*A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains*". Int. J. Numer. Meth. Engr., Vol. 21: 1403-1426.
- [28] Low, P.F., 1955 "Effect of Osmotic Pressure on Diffusion Rate of Water". Soil Science, 80: 95-100.
- [29] Lyness, J.F., Owen, D.R.J., and Zienkewicz, O.C., 1975 "*The finite element analysis of engineering systems governed by a non linear quasi-harmonic equation*". Computers and structures, Vol. 5: 65-79, Pergamon Press.
- [30] Narasimhan, T.N., Witherspoon, P.N., and Edwards, A.L., 1978 "*Numerical model for saturated-unsaturated flow in porous media .2. The algorithm*". Water Resour. Res., Vol. 14, N°2: 255-261.

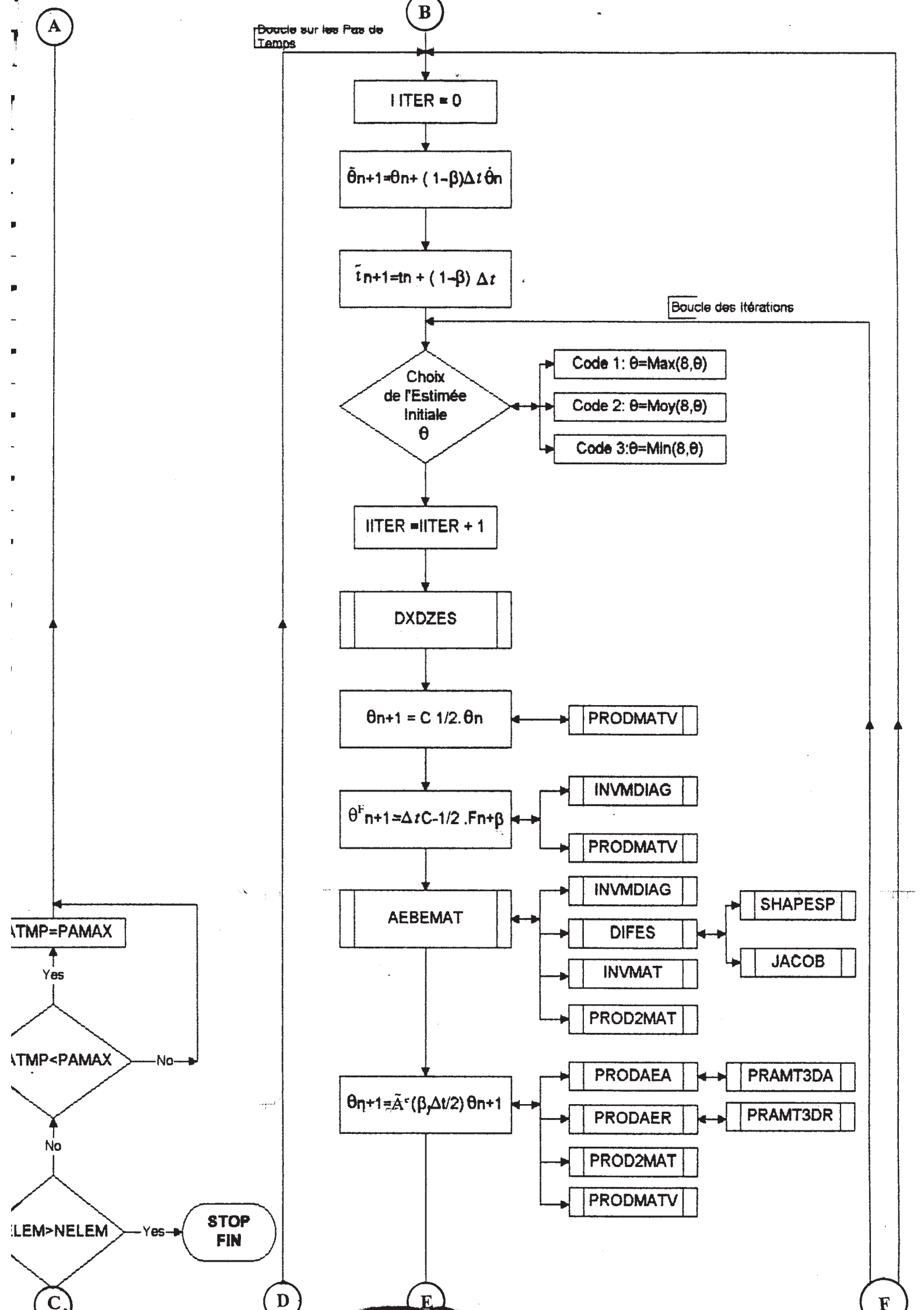
- [31] Neuman, S.P., Feddes, R.A., and Bresler, E., 1975 "*Finite element analysis of two-dimensional flow in soils considering water uptake by roots, 1. Theory*". Soil Sci. Soc. Amer. Proc., Vol. 32, N° 2: 224-237.
- [32] Philip, J.R., 1969 "*Moisture equilibrium in the vertical in swelling soils .1. Basic theory*". Aust. J. Soil Res., Vol. 7: 99-120.
- [33] Philip, J.R., 1969 "*Hydrostatics and hydrodynamics in swelling soils*". Water Resour. Res., Vol. 5, N° 5: 1070-1077.
- [34] Pidgeon, J.T., 1980 "*The rational design of raft foundations for houses on heaving soil*". Seventh Regional Conf. for Africa on soil Mechanics and Found. Engr., Accra: 291-299.
- [35] Push, R., 1981 "*Unsaturated and saturated flow in swelling clay*". Proc. Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng. 10th, Vol. 2: 369-373.
- [36] Saix, C., et Jouana, P., 1989 "*Modélisation thermo-hydro-mécanique d'un sol par méthode mixte*". Can. Géotech. J., Vol. 26: 418-426.
- [37] Sposito, C. 1972 " *Thermodynamics of swelling clay-water systems* " . Soil Sci. 114(4) :pp. 243-249.
- [38] Sposito, C. 1973 " *Volume change in swelling clays* " Soil Sci. 115(4) : pp.315-320 .
- [39] Thomas, V.E., Nelson, J.D., and McWorter, D.B., 1989 "*Nonisothermal consolidation in unsaturated soil*". Journal of Geotechnical Engineering, Vol. 115, N° 10: 1351-1372.
- [40] Wind, G.P., and Doorne, W.V., 1975 "*A numerical model for the simulation of unsaturated vertical of moisture in soils*". Journal of Hydrology, 24: 1-20.
- [41] Zeitlen, J.C., and Komornik, A., 1961 "*Deformation and moisture movements in expansive clays*". Proc. 5th Int. Conf. Soils Mech. and Found. Eng., Vol. 1, Paris, France: 873-879.
- [42] Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L., 1989 "*The Finite Element Method*". 4th ed., McGraw - Hill Book Company.

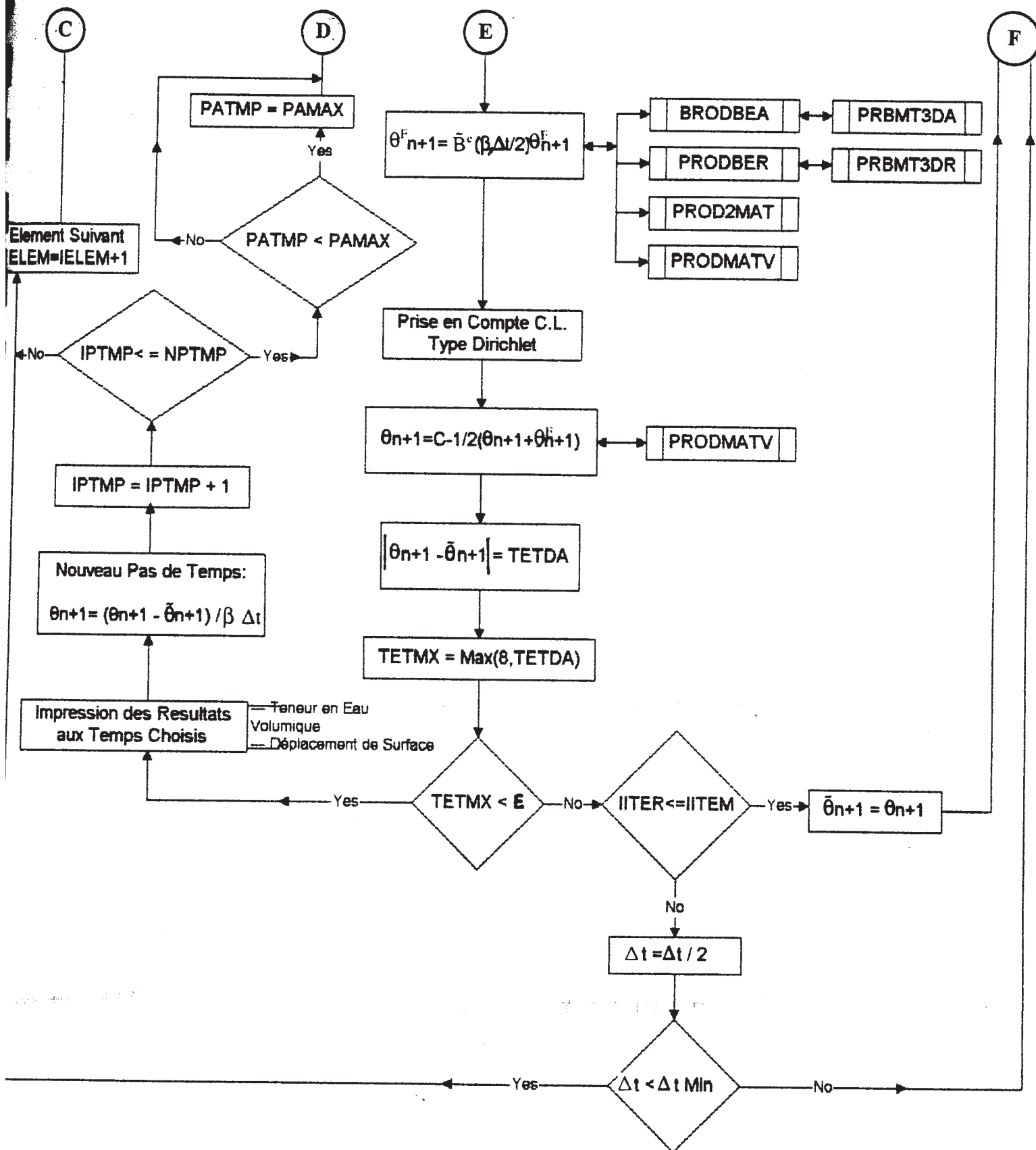
ANNEXE

ORGANIGRAMME DETAILLE ET LISTING
DU CODE DE CALCUL

Organigramme Détaillé du Code de Calcul







PROGRAM FLOWFR97M

PROGRAMME DE RESOLUTION DES EQUATIONS D'ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL
DE L'EAU DANS UN MILIEU GONFLANT NON SATURE AVEC CALCUL DE LA
DEFORMATION DE GONFLEMENT PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
COUPLEE A UN ALGORITHME IMPLICITE ELEMENT PAR ELEMENT

NSS MODEL

* PAR *

***** A.HAFSI *****

Post-Graduant Chercheur

ECOLE NATIONALE DES TRAVAUX PUBLICS

DEPARTEMENT DE LA RECHERCHE

ALGER

RECHERCHE DIRIGEE PAR LE PROFESSEUR T.K.KARALIS

(DEMOCRITOS UNIVERSITY OF THRACE : XANTHI/GREECE)

AVRIL 1995

-----PROGRAMME PRINCIPAL-----

-----*****-----

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

DIMENSION TPROV(8),DTPRV(8),DETAL(8,36001)

COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,

BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,

NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN

COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF

COMMON/TABDIM/COORD(100,2),PRESC(30),ATETA(8),NOFIX(30),

LNODS(10,8),DIFFD(40),TETTD(40),NCODE(40),NOPRS(40,3)

COMMON/PROB/PRESS(40),NEAST(40),NELSP(10),SOURC(10)

COMMON/WORK/ELCOD(2,8),SHAPE(8),DERIV(2,8),CARTD(2,8),POSGP(4),

WEIGP(4),GPCOD(2,4),EDIFF(8,8),ECAPA(8,8),CAPAR(8,8),

ECAPD(8,8),ECAPI(8,8),ELFOG(10,8),XDOTO(8),FMDTO(8),

TELFO(10,8),ELFOQ(10,8),TETAD(8),TETAT(8,36001),DTETO(8),

DTETT(8,36001),TETES(8,36001),TMPES(100),ECAPR(8,8),

TETFP(8),TEMPS(100),EFNPG(10,8),TETFF(8,36001),TETAR(8),

TETFR(8),TETAS(8,36001),TETAP(8),ECAMR(8,8),TETPP(8),

TETDA(8,36001),TETDF(8,36001),EFNPP(8)

COMMON/ALGO/AMATR(8,8),BMATR(8,8),XAXBM(8,8),BVECT(8),XMATV(8),

MATID(8,8),CINVM(8,8),CDMAT(8,8),CDCMT(8,8),

EBMAP(8,8),EBMAT(8,8),EAMAP(8,8),EAMAT(8,8),

EB3DM(8,8,10),EA3DM(8,8,10),PIBEA(8,8),PIBER(8,8),

PIAEA(8,8),PIAER(8,8),XAEAR(8,8),XBEAR(8,8)

APPEL DE LA SUBROUTINE DE LECTURE DES DONNEES

CALL INPUT(NHEUR,TETTD,NCODE,PRESS,NEAST,NOPRS,TANTE,NPAEM)

WRITE(*,*) ' * * * EXECUTION EN COURS ! Patientez...'

S V P * * * '

WRITE(4,*) ' ***** LE FICHIER RESULTATS *****'

*****'

WRITE(4,*) ' '

WRITE(4,*) ' TEMPS EN SECONDE RACINE DU TEMPS TENE

UR EN EAU'

WRITE(4,*) ' '


```

C      WRITE(5,*)' ***** LE FICHIER RESULTATS *****
C      *****
C      WRITE(5,*)'
C      WRITE(5,*)' TENEUR EN EAU          DEFORMATION DE GONFLEMENT
C      WRITE(5,*)'

```

```

C      CALCUL DE LA MATRICE CAPACITE HYDRAULIQUE [C]
C      (Elle est la meme pour tous les Elements)

```

```

C      CALL CAPADIAG(NELUN,ECAPD)

```

```

C      CALCUL DE LA CONTRIBUTION DU " CHARGEMENT " PONCTUEL INTERNE

```

```

C      CALL LOADG(NELSP,SOURC)

```

```

C      CALCUL DE LA CONTRIBUTION DU " CHARGEMENT " DE SURFACE

```

```

C      CALL BLOAD(NEAST,NCODE,PRESS,NOPRS)

```

```

C      CALCUL DU VECTEUR "CHARGEMENT " TOTAL ELEMENTAIRE

```

```

C      INITIALISATION DU VECTEUR CHARGEMENT TOTAL

```

```

C      DO 12 IELEM = 1,NELEM
C      DO 12 IEVAB = 1,NEVAB
12      TELFO(IELEM,IEVAB) = 0.0

```

```

C      SOMMATION DES DEUX VECTEURS

```

```

C      DO 13 IELEM = 1,NELEM
C      DO 13 IEVAB = 1,NEVAB
13      TELFO(IELEM,IEVAB)=ELFOG(IELEM,IEVAB)+ELFOQ(IELEM,IEVAB)

```

```

C      BOUCLE SUR LES ELEMENTS ( DEBUT DE L'ALGORITHME DE CALCUL )
C      ( NELUN :Numero du Premier Element a etre calcule )
C      ( Avantage de la methode EBE )

```

```

C      IELEM = NELUN

```

```

C      ETAT INITIAL DES TENEURS EN EAU NODALES ( To ) T= TETA

```

```

15      IF (IELEM.EQ.NELUN) THEN
C      DO 17 IEVAB =1,NEVAB
17      TETAD(IEVAB)= TETAI
C      TPSAT:TemPs A LA SATURATION DE L'ELEMENT
C      TPSAT=0.0
C      ELSE
18      DO 18 IEVAB =1,NEVAB
C      TETAD(IEVAB)= TETAI
18      TPSAT=TPSAT+(PECRI-PECRF)*NPTMP*PATMP+TANTE
C      ENDIF

```

```

C      CALCUL DES DIFFUSIVITEES HORIZONTALE ET VERTICALE

```

```

C      CALL DXDZDO(TETAI,MTETD,BETAC,DIFFX,DIFFZ,NCDEF)

```

```

C      APPEL DE LA SUBROUTINE DE CALCUL DES MATICES ELEMENTAIRES [D]

```

```

C      CALL DIFF(IELEM,DIFFX,DIFFZ)

```


INITIALISATION DU COMPTEUR DES HEURS

IHEUR = 0

FIXATION DE L'INTERVAL D'ECRITURE DES RESULTATS SUR FICHIER
(F ds PECRF : Fixe et P ds PECRI : Pas)

PECRI=INTER/(NPTMP*PATMP)
PECRF=PECRI

CALCUL DU TERME $(dT/dt)_0 = C^{*-1}*(Fo-Do*To)$

CALL INVMDIAG(ECAPD,ECAPI)
CALL PRODMATV(EDIFF,TETAD,XDOTO)
DO 20 IEVAB=1,NEVAB

20 FMDTO(IEVAB)=TELFO(IELEM,IEVAB)-XDOTO(IEVAB)

CALL PRODMATV(ECAPI,FMDTO,DTETO)

CREATION DE NOUVEAUX TABLEAUX PAR AFFECTATION DE TABLEAU CONNUS
T: Transformee.(Introduction de l'indice pas de temps PATMP)

DO 30 IEVAB=1,NEVAB
TETAT(IEVAB,0)=TETAD(IEVAB)
30 DTETT(IEVAB,0)=DTETO(IEVAB)

INITIALISATION DE LA BOUCLE SUR LES PAS DE TEMPS

IPTMP=0

INITIALISATION DE LA BOUCLE SUR LES ITERATIONS

35 IITER=0

CALCUL DU TERME :T estimee = Voir Algorithme

DO 40 IEVAB=1,NEVAB
40 TETES(IEVAB,IPTMP+1)=TETAT(IEVAB,IPTMP)+(1-GAMAD)*PATMP*
DTETT(IEVAB,IPTMP)

CALCUL DU TERME :t estimee = Voir Algorithme
(Ce calcul est effectue en cas d'un chargement de surface
Variable avec le temps : Fonction sinusoidale P.e)

TEMPS(0)=0.0
TMPES(IPTMP+1)=TEMPS(IPTMP)+(1-GAMAD)*PATMP

CHOIX DE L'ESTIMEE INITIALE

43 IF (NKOCV.EQ.1) THEN
L'estimee est la plus grande des valeurs
TTES1=DMAX1(TETES(1,IPTMP+1),TETES(2,IPTMP+1),TETES(3,IPTMP+1),
TETES(4,IPTMP+1),TETES(5,IPTMP+1),TETES(6,IPTMP+1),
TETES(7,IPTMP+1),TETES(8,IPTMP+1))
ELSEIF (NKOCV.EQ.2) THEN
L'estimee est la moyenne des valeurs
TTES1=(TETES(1,IPTMP+1)+TETES(2,IPTMP+1)+TETES(3,IPTMP+1)+
TETES(4,IPTMP+1)+TETES(5,IPTMP+1)+TETES(6,IPTMP+1)+
TETES(7,IPTMP+1)+TETES(8,IPTMP+1))/8.0

ELSE

C L'estimee est la plus petite des valeurs
TTES1=DMIN1(TETES(1,IPTMP+1),TETES(2,IPTMP+1),TETES(3,IPTMP+1),
TETES(4,IPTMP+1),TETES(5,IPTMP+1),TETES(6,IPTMP+1),
TETES(7,IPTMP+1),TETES(8,IPTMP+1))
ENDIF

C
C AVANCEMENT DES ITERATIONS
C

IITER = IITER+1

C
C APPEL DU S/P DE CALCUL DES DIFFUSIVITEES ESTIMEES
C
C

TESTER AVANT LA VALEUR DE TTES1 et DE NPTMP !

C
IF ((IPTMP.EQ.NPTMP).OR.(TTES1.EQ.0.0)) THEN
IF(IPTMP.EQ.NPTMP) THEN

IHEUR = IHEUR+1

IF(IHEUR.GT.NHEUR) THEN

C LE TEMPS TOTAL EST TERMINE PASSAGE A L'ELEMENT SUIVANT

GO TO 240

ELSE

KODE1=1

GO TO 49

ENDIF

ELSE

IHEUR = IHEUR+1

IF(IHEUR.GT.NHEUR) THEN

C LE TEMPS TOTAL EST TERMINE PASSAGE A L'ELEMENT SUIVANT

GO TO 240

ELSE

DO 45 IEVAB=1,NEVAB

TETAT(IEVAB,0)=TETAT(IEVAB,NPTMP)

45 DTETT(IEVAB,0)=DTETT(IEVAB,NPTMP)

DO 46 IEVAB=1,NEVAB

TPROV (IEVAB)=TETAT(IEVAB,0)

46 DTPRV (IEVAB)=DTETT(IEVAB,0)

C INITIALISATION DES TABLEAUX DE TRAVAIL

DO 47 IEVAB =1,NEVAB

DO 47 IPTMP =1,NPTMP

TETAT(IEVAB,IPTMP)=0.0

DTETT(IEVAB,IPTMP)=0.0

TETES(IEVAB,IPTMP)=0.0

TETFF(IEVAB,IPTMP)=0.0

TETAS(IEVAB,IPTMP)=0.0

TETDF(IEVAB,IPTMP)=0.0

TETDA(IEVAB,IPTMP)=0.0

47 CONTINUE

DO 48 IEVAB=1,NEVAB

TETAT(IEVAB,0)= TPROV(IEVAB)

48 DTETT(IEVAB,0)= DTPRV(IEVAB)

IPTMP = 0

GO TO 35

ENDIF

ENDIF

ELSE

GO TO 49

ENDIF


```

49      IF(TTES1.GT.TETTD(MTETD)) THEN
WRITE(*,*)'ON A ATTEINT LA SATURATION DANS L"ELEMENT',IELEM
WRITE(*,*)'LA DERNIERE TENEUR EN EAU CALCULEE EST :',TTES1
WRITE(*,*)'APRES ', PECRI*NPTMP*PATMP+TANTE+TPSAT,'Secondes'
WRITE(3,*)'DERNIERE TENEUR EN EAU AVANT SATURATION'
WRITE(3,*)'APRES ', PECRI*NPTMP*PATMP+TANTE+TPSAT,'Secondes'
      DO 50 IEVAB=1,NEVAB
50      WRITE(3,*) TETAT(IEVAB,IPTMP)
WRITE(*,*)'PASSAGE A L"ELEMENT SUIVANT ! NUMERO : ',IELEM+1
      GO TO 240
      ELSE
      IF(TTES1.LT.TETTD(1)) THEN
WRITE(*,*) 'TTES1 = ',TTES1
WRITE(*,*)'LA VALEUR EST HORS TABLEAU REVOIR VOS DONNEES ! '
      GO TO 243
      ELSE
      GO TO 52
      ENDIF
      ENDIF

C
C 52      CALL DXDZES(TTES1,MTETD,BETAC,DFESX,DFESZ,IPTMP,NCDEF)
C
C      CALCUL DU TERME :  $T(n+1)=C**1/2*T(n)$ 
C
      DO 54 IEVAB=1,NEVAB
      DO 54 JEVAB=1,NEVAB
54      ECAPR(IEVAB,JEVAB)=DSQRT(ECAPD(IEVAB,JEVAB))
C
C      REAFFECTATION D'UN TABLEAU 2D A UN TABLEAU 1D POUR UNE
C      CONCORDANCE DES ARGUMENTS DU S/P PRODMATV (P ds TETAP:Partiel)
C
      DO 60 IEVAB=1,NEVAB
60      TETAP(IEVAB)=TETAT(IEVAB,IPTMP)
      CALL PRODMATV(ECAPR,TETAP,TETAR)
C
C      RETOUR AU TABLEAU A 2D
C
      DO 70 IEVAB=1,NEVAB
70      TETAT(IEVAB,IPTMP+1)=TETAR(IEVAB)
C
C      CALCUL DU TERME :  $Tf(n+1)=$  Voir Algorithme
C
C      CALCUL DE  $C**(-1/2)=(C**1/2)**-1$  (MR ds ECAMR:Moin Racine)
C
      CALL INVMDIAG(ECAPR,ECAMR)
C
C      CALCUL DU TERME :  $F_{n+1}+GAMAD$  (Voir Algorithme)
C
      DO 80 IEVAB=1,NEVAB
80      EFNPG(IELEM,IEVAB)=(1-GAMAD)*TELFO(IELEM,IEVAB)+GAMAD*
      TELFO(IELEM,IEVAB)
C
C      RETOUR A UN TABLEAU 1D POUR EFNPG
C      (P ds EFNPP : Partielle)
C
      DO 85 IEVAB=1,NEVAB
85      EFNPP(IEVAB)=EFNPG(IELEM,IEVAB)
C
C      CALCUL DU TEERME :  $C**(-1/2)*F_{n+1}+GAMAD$ 
C

```



```

      CALL PRODMATV(ECAMR,EFNPP,TETFP)
C
C   AFFECTATION AU TABLEAU 2D
C
      DO 90 IEVAB=1,NEVAB
90      TETFF(IEVAB,IPTMP+1)=PATMP*TETFP(IEVAB)
C
C   CALCUL DES MATRICES Ae et Be DE L'ALGORITHME
C
      CALL AEBEMAT(DFESX,DFESZ,ECAPD)
C
C   CALCUL DE T(n+1)= Voir Algorithme
C   AR ds XAEAR : Aller et Retour
C
      CALL PRODAEA(EA3DM,PIAEA)
      CALL PRODAER(EA3DM,PIAER)
      CALL PROD2MAT(PIAEA,PIAER,XAEAR)
C
C   REAFFECTATION D'UN TABLEAU 2D A 1D (Pour concordance d'arguments
C   dans le S/P PRODMATV
C
      DO 95 IEVAB=1,NEVAB
95      TETAP(IEVAB)=0.0
      DO 100 IEVAB=1,NEVAB
100     TETAP(IEVAB)=TETAT(IEVAB,IPTMP+1)
C
C   CALCUL DU TERME : T(n+1)= XAEAR*T(n+1)
C
      CALL PRODMATV(XAEAR,TETAP,TETPP)
C
C   REAFFECTATION D'UN TABLEAU 1D A 2D
C
      DO 110 IEVAB=1,NEVAB
110     TETAT(IEVAB,IPTMP+1)=TETPP(IEVAB)
C
C   CALCUL DE Tf(n+1)= Voir Algorithme
C   AR ds XBEAR : Aller et Retour
C
      CALL PRODBEA(EB3DM,PIBEA)
      CALL PRODBER(EB3DM,PIBER)
      CALL PROD2MAT(PIBEA,PIBER,XBEAR)
C
C   REAFFECTATION D'UN TABLEAU 2D A 1D (Pour concordance d'arguments
C   dans le S/P PRODMATV)
C
      DO 120 IEVAB=1,NEVAB
120     TETFP(IEVAB)=0.0
      DO 130 IEVAB=1,NEVAB
130     TETFP(IEVAB)=TETFF(IEVAB,IPTMP+1)
C
C   CALCUL DU TERME : Tf(n+1)= XBEAR*Tf(n+1)
C
      CALL PRODMATV(XBEAR,TETFP,TETFR)
C
C   REAFFECTATION D'UN TABLEAU 1D A 2D
C
      DO 140 IEVAB=1,NEVAB
140     TETFF(IEVAB,IPTMP+1)=TETFR(IEVAB)
C
C   CALCUL DU TERME : T(n+1)= C**(-1/2)*(T(n+1) + Tf(n+1))

```



```

C      S ds TETAS : Somme
C
      DO 150 IEVAB=1,NEVAB
150    TETAS(IEVAB,IPTMP+1)=TETAT(IEVAB,IPTMP+1)+TETFF(IEVAB,IPTMP+1)
C
      REAFFECTATION D'UN TABLEAU 2D A 1D (Pour concordance d'arguments
      dans le S/P PRODMATV)
C
      DO 160 IEVAB=1,NEVAB
160    TETAP(IEVAB)=0.0
      DO 170 IEVAB=1,NEVAB
170    TETAP(IEVAB)=TETAS(IEVAB,IPTMP+1)
C
      DO 180 IEVAB=1,NEVAB
180    TETAR(IEVAB)=0.0
      CALL PRODMATV(ECAMR,TETAP,TETAR)
C
      REAFFECTATION D'UN TABLEAU 1D A 2D
C
      DO 190 IEVAB=1,NEVAB
190    TETAT(IEVAB,IPTMP+1)=TETAR(IEVAB)
C
      DO 191 IEVAB=1,NEVAB
191    WRITE(*,*) 'TETAT=',TETAT(IEVAB,IPTMP+1)
      INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES DE TYPE DIRICHLET
C
      DO 195 INODE=1,NNODE
      DO 195 IVFIX=1,NVFIX
          IF (LNODS(IELEM,INODE).EQ.NOFIX(IVFIX)) THEN
              IEVAB=INODE
              TETAT(IEVAB,IPTMP+1)=PRESC(IVFIX)
              ELSE
                  GO TO 195
          ENDIF
195    CONTINUE
C
      TEST DE CONVERGENCE
C
      CALCUL DU TERME T(n+1) - TES(n+1)
      DF ds. TETDF : Difference ( Calcul de la NORME du Vecteur )
C
      DO 200 IEVAB=1,NEVAB
200    TETDF(IEVAB,IPTMP+1)=TETAT(IEVAB,IPTMP+1)-TETES(IEVAB,IPTMP+1)
C
      CALCUL DE LA VALEUR ABSOLUE DE LA DIFFERENCE
      DA ds. TETDA : Difference Absolue ( Norme )
C
      DO 210 IEVAB=1,NEVAB
210    TETDA(IEVAB,IPTMP+1)=DABS(TETDF(IEVAB,IPTMP+1))
C
      CALCUL DE LA VALEUR MAXIMALE DE LA DIFFERENCE ( NORME TYPE 1)
C
      TETMX=DMAX1(TETDA(1,IPTMP+1),TETDA(2,IPTMP+1),TETDA(3,IPTMP+1),
      TETDA(4,IPTMP+1),TETDA(5,IPTMP+1),TETDA(6,IPTMP+1),
      TETDA(7,IPTMP+1),TETDA(8,IPTMP+1))
C
      COMPARAISON AVEC LA PRECISION epsilon
C
      IF(TETMX.LT.EPSIP) THEN
          WRITE(*,*) 'CONVERGENCE DANS L"ELEMENT ',IELEM

```



```

C      PECRI= Interval d'ecriture des Resultats( n fois le pas )
C      TECRI=(IPTMP+IHEUR*NPTMP)*PATMP
      TECRI=IHEUR
      IF((TECRI.LE.PECRI+1).AND.(TECRI.GE.PECRI-1)) THEN
        WRITE(3,*) ' ELEMENT N° : ',IELEM
        X=PECRI*NPTMP*PATMP+TANTE+TPSAT
        WRITE(3,*) 'TENEUR EN EAU APRES',X , 'Secondes'
        WRITE(3,*) 'POUR UN PAS DE TEMPS DE : ',PATMP
        WRITE(*,*) 'EXECUTION EN COURS : ELEMENT N° ',IELEM
        WRITE(*,*) 'APRES : ',X , 'Secondes'
        DO 220 IEVAB=1,NEVAB
220      WRITE(3,*) TETAT(IEVAB,IPTMP+1)
C      LA VALEUR MOYENNE DES TENEURS EN EAU
      TETAV =(TETAT(1,IPTMP+1)+TETAT (2,IPTMP+1)+TETAT (3,IPTMP+1)+
        TETAT (4,IPTMP+1)+TETAT (5,IPTMP+1)+TETAT (6,IPTMP+1)+
        TETAT (7,IPTMP+1)+TETAT (8,IPTMP+1))/8.0
      WRITE(3,*) 'LA VALEUR MOYENNE DANS L"ELEMENT EST : ',TETAV
C
C      IMPRESSION DES RESULTATS :TENEUR EN EAU EN FONCTION DE LA
C      RACINE CARREE DU TEMPS DANS UN FICHIER INDEPENDANT EN VUE
C      DU TRACAGE DE LA COURBE CORRESPONDANTE.
C
      XX=DSQRT(X)
      WRITE(4,*) X, XX, TETAV
C
C      CALCUL DES DEPLACEMENTS DE SURFACE
C
      IF(NCDEF.EQ.1) THEN
        WRITE(3,*) 'LE DEPLACEMENT DE SURFACE (cm) EST : '
        DO 222 IEVAB=1,NEVAB
222      DETAL(IEVAB,IPTMP+1)=ZDIME*BETAC*(TETAT(IEVAB,IPTMP+1)-TETAI)
C      LA VALEUR MOYENNE DU DEPLACEMENT DE SURFACE
      DETAV =(DETAL (1,IPTMP+1)+DETAL (2,IPTMP+1)+DETAL (3,IPTMP+1)+
        DETAL (4,IPTMP+1)+DETAL (5,IPTMP+1)+DETAL (6,IPTMP+1)+
        DETAL (7,IPTMP+1)+DETAL (8,IPTMP+1))/8.0
      WRITE(3,*) 'LA VALEUR MOYENNE DANS L"ELEMENT EST : ',DETAV
C
C      IMPRESSION DE LA TENEUR EN EAU EN FONCTION DU DEPLACEMENT DE
C      SURFACE (dl/l) DANS UN FICHIER INDEPENDANT, CECI EST POUR TRACER
C      LA COURBE CORRESPONDANTE.
      YY= DETAV/ZDIME
      WRITE(5,*) TETAV, YY
C
      PECRI=PECRI+PECRF
      ELSE
      PECRI=PECRI+PECRF
      ENDIF
      ELSE
      GO TO 225
      ENDIF
C
C      PASSAGE AU PAS DE TEMPS SUIVANT
C
225      DO 230 IEVAB=1,NEVAB
230      DTETT(IEVAB,IPTMP+1)=TETDF(IEVAB,IPTMP+1)/(GAMAD*PATMP)
      IPTMP=IPTMP+1
      IF (KODE1.EQ.1) THEN
        DO 235 IEVAB=1,NEVAB

```



```

235      TETAT(IEVAB,0)=TETAT(IEVAB,NPTMP)
      DTETT(IEVAB,0)=DTETT(IEVAB,NPTMP)
      DO 236 IEVAB=1,NEVAB
236      TPROV (IEVAB)=TETAT(IEVAB,0)
      DTPRV (IEVAB)=DTETT(IEVAB,0)
C      INITIALISATION DES TABLEAUX DE TRAVAIL
      DO 237 IEVAB =1,NEVAB
      DO 237 IPTMP =1,NPTMP
      TETAT(IEVAB,IPTMP )=0.0
      DTETT(IEVAB,IPTMP )=0.0
      TETES(IEVAB,IPTMP )=0.0
      TETFF(IEVAB,IPTMP )=0.0
      TETAS(IEVAB,IPTMP )=0.0
      TETDF(IEVAB,IPTMP )=0.0
      TETDA(IEVAB,IPTMP )=0.0
237      CONTINUE
      DO 238 IEVAB=1,NEVAB
      TETAT(IEVAB,0)= TPROV(IEVAB)
238      DTETT(IEVAB,0)= DTPRV(IEVAB)
      IPTMP = 0
      KODE1 = 0
      ELSE
      GO TO 239
      ENDIF
239      IF(IPTMP.LE.NPTMP) THEN
      IF (PATMP.LT.PAMAX) THEN
      PATMP=PAMAX
      GO TO 35
      ELSE
      GO TO 35
      ENDIF
      ELSE
240      IELEM=IELEM+NPAEM
      IF (IELEM.GT.NELEM) THEN
      WRITE(*,*) ' FIN DU CALCUL POUR TOUS LES ELEMENTS '
      CLOSE (3)
      CLOSE (4)
243      STOP
      ELSE
      IF (PATMP.LT.PAMAX ) THEN
      PATMP=PAMAX
C      INITIALISATION DES TABLEAUX DE TRAVAIL
      DO 244 IEVAB =1,NEVAB
      DO 244 IPTMP =1,NPTMP
      TETAT(IEVAB,IPTMP )=0.0
      DTETT(IEVAB,IPTMP )=0.0
      TETES(IEVAB,IPTMP )=0.0
      TETFF(IEVAB,IPTMP )=0.0
      TETAS(IEVAB,IPTMP )=0.0
      TETDF(IEVAB,IPTMP )=0.0
      TETDA(IEVAB,IPTMP )=0.0
244      CONTINUE
      GO TO 15
      ELSE
C      INITIALISATION DES TABLEAUX DE TRAVAIL
      DO 246 IEVAB =1,NEVAB
      DO 246 IPTMP =1,NPTMP
      TETAT(IEVAB,IPTMP )=0.0
      DTETT(IEVAB,IPTMP )=0.0
      TETES(IEVAB,IPTMP )=0.0

```



```

TETFF(IEVAB,IPTMP )=0.0
TETAS(IEVAB,IPTMP )=0.0
TETDF(IEVAB,IPTMP )=0.0
TETDA(IEVAB,IPTMP )=0.0

```

246 CONTINUE

GO TO 15

ENDIF

ENDIF

ENDIF

ELSEIF (IITER.LE.NITEM) THEN

WRITE(*,*) 'NON CONVERGENCE 1 ! ITERATION n ',IITER

RECHERCHE DE LA CONVERGENCE PAR LA METHODE DES SUBSTITUTIONS
DIRECTES

DO 250 IEVAB=1,NEVAB

250 TETES(IEVAB,IPTMP+1)=TETAT(IEVAB,IPTMP+1)

GO TO 43

ELSE

WRITE(*,*) 'NON CONVERGENCE 2 ! PATMP/2 =', PATMP

PATMP=PATMP/2

IF (PATMP.LT.PAMIN) THEN

GOTO 240

ELSE

GO TO 35

ENDIF

ENDIF

FIN DU PROGRAMME PRINCIPAL

END

----- LES SUBROUTINES -----

SUBROUTINE INPUT(NHEUR,TETTD,NCODE,PRESS,NEAST,NOPRS,TANTE,NPAEM)

LECTURE DE TOUTES LES DONNEES DE L'APPLICATION A PARTIR
D'UN FICHIER

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

CHARACTER *80 FID,FIR,FIR2,FIR3

DIMENSION TETTD(40),NCODE(40),PRESS(40),NEAST(40),

NOPRS(40,3)

COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,

BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,

NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN

COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF

COMMON/TABDIM/COORD(100,2),PRESC(30),ATETA(8),NOFIX(30),

LNODS(10,8),DIFFD(40)

COMMON/PROB/NELSP(10),SOURC(10)

COMMON/WORK/ELCOD(2,8),SHAPE(8),DERIV(2,8),CARTD(2,8),POSGP(4),

WEIGP(4),GPCOD(2,4),EDIFF(8,8),ECAPA(8,8),ECAPD(8,8),

ECAPI(8,8),ELFOG(10,8),CAPAR(8,8),XDOTO(8),FMDTO(8),

TELFO(10,8),ELFOQ(10,8),TETAD(8),TETAT(8,36001),DTETO(8),

DTETT(8,36001),TETES(8,36001),TMPES(100),ECAPR(8,8),

TETFP(8),TEMPS(100),EFNPG(10,8),TETFF(8,36001),TETAR(8),

TETFR(8),TETAS(8,36001),TETAP(8),ECAMR(8,8),TETPP(8),

TETDA(8,36001),TETDF(8,36001),EFNPP(8)

OUVERTURE DES FCHERS DES DONNEES ET DES RESULTATS

C

```

10 FORMAT (A80)
   WRITE(*,*) 'NOM DU FICHIER DE DONNEES > ?'
   READ(*,10) FID
   OPEN(2,FILE=FID,STATUS='OLD')
   REWIND (2)
   WRITE(*,*) 'NOM DU FICHIER RESULTATS N 1 > ?'
   READ(*,10) FIR
   OPEN(3,FILE=FIR,STATUS='NEW')
   REWIND (3)
   WRITE(*,*) 'NOM DU FICHIER RESULTATS N 2 > ?'
   READ(*,10) FIR2
   OPEN(4,FILE=FIR2,STATUS='NEW')
   REWIND (4)
   WRITE(*,*) 'NOM DU FICHIER RESULTATS N 3 > ?'
   READ(*,10) FIR3
   OPEN(5,FILE=FIR3,STATUS='NEW')
   REWIND (5)

```

C

C LECTURE DES DONNEES A PARTIR DU FICHIER DE DONNEES

C ----- 1 - VARIABLES DE CONTROLE -----

C

```

   READ(2,*) NPOIN,NELEM,ZDIME,ETHIC,NNODE,NDOFN,NDIME,NELUN,NCDEF
   WRITE(3,*) '***** LE FICHIER RESULTAT
   *****'
   WRITE(3,*) '
   WRITE(3,*) '          NPOIN  NELEM  ZDIME          ETHIC          NNODE  NDO
   FN  NDIME  NELUN  NCDEF'
   WRITE(3,15) NPOIN,NELEM,ZDIME,ETHIC,NNODE,NDOFN,NDIME,NELUN,NCDEF
15  FORMAT(5X,14,3X,13,5X,D10.5,2X,D10.5,5X,I1,7X,I1,6X,I1,4X,I3,
        6X,I1)
   READ(2,*) MTETD,TETAI
   WRITE(3,*) '          MTETD  TETAI'
   WRITE(3,17) MTETD,TETAI
17  FORMAT(5X,13,5X,D14.7)
   READ(2,*) NVFIX
   WRITE(3,*) '          NVFIX'
   WRITE(3,19) NVFIX
19  FORMAT(4X,I3)
   READ(2,*) NGAUS,NPAEM
   WRITE(3,*) '          NGAUS  NPAEM'
   WRITE(3,23) NGAUS,NPAEM
23  FORMAT(6X,I1,5X,I4)
   READ(2,*) BETAC,GAMAD
   WRITE(3,*) '          BETAC          GAMAD'
   WRITE(3,25) BETAC,GAMAD
25  FORMAT(5X,D14.7,3X,D14.7)
   READ(2,*) TMPTT,PATMP,PAMIN,PAMAX
   WRITE(3,*) '          TMPTT          PATMP          PAMIN
          PAMAX'
   WRITE(3,27) TMPTT,PATMP,PAMIN,PAMAX
27  FORMAT(2X,4(3X,D14.7))
   READ(2,*) TANTE
   WRITE(3,*) '          TANTE'
   WRITE(3,28) TANTE
28  FORMAT(2X,3(3X,D14.7))
   READ(2,*) NITEM,EPSIP,NKOCV,INTER
   WRITE(3,*) '          NITEM  EPSIP          NKOCV          INTER'
   WRITE(3,29) NITEM,EPSIP,NKOCV,INTER
29  FORMAT(5X,I3,5X,D14.7,5X,I1,9X,I6)

```


NEVAB = NDOFN*NNODE

RPTMP = 360/PATMP

C 360 CAR LA DIMENSION MAXIMALE DES TABLEAUX PERMISE EST 36001
C ET ELLE CORRESPOND A UN PAS DE TEMPS DE 0.01s QUI EST UNE
C VALEUR MAXIMALE DANS NOTRE CAS.

NPTMP = IDINT(RPTMP)

RHEUR = TMPTT/(NPTMP*PATMP)

NHEUR = IDINT(RHEUR)

WRITE(3,*)' NPTMP NHEUR'

WRITE(3,31) NPTMP,NHEUR

31 FORMAT(I10,5X,I10)

C
C ----- 2 - TABLEAU DES VALEURS DE LA FONCTION DIFFUSIVITEE EN
C FONCTION DE LA TENEUR EN EAU [D(T) DU MILIEU ETUDIE]
C

DO 40 I = 1,MTETD

40 READ(2,*) TETTD(I),DIFFD(I)

WRITE(3,*)' TETTD(I) DIFFD(I)'

DO 42 I = 1,MTETD

42 WRITE(3,43) TETTD(I),DIFFD(I)

43 FORMAT(5X,D14.7,8X,D14.7)

C
C ----- 3 - CONNEXIONS NODALES DES ELEMENTS -----
C (TABLE DE CORRESPONDANCE)
C

DO 60 IELEM = 1,NELEM

60 READ(2,*) IELEM,(LNODS(IELEM,INODE),INODE=1,NNODE)

WRITE(3,*)' IELEM CONNEXIONS NODALES'

DO 62 IELEM = 1,NELEM

62 WRITE(3,63) IELEM,(LNODS(IELEM,INODE),INODE=1,NNODE)

63 FORMAT(2X,I4,8(2X,I4))

C
C ----- 4 - COORDONEES DES NOEUDS -----
C 4-1 MISE A ZERO DES COORDONEES
C

DO 70 IPOIN = 1,NPOIN

DO 70 IDIME = 1,NDIME

70 COORD(IPOIN,IDIME)=0.0

C
C 4-2 VALEUR DES COORDONEES
C

DO 80 IPOIN = 1,NPOIN

80 READ(2,*) IPOIN,(COORD(IPOIN,IDIME),IDIME=1,NDIME)

C
C 4-3 INTERPOLATION DES COORDONEES DES NOEUDS
C INTERMEDIAIRES DE L'ELEMENT
C

CALL NODXZ

C
C WRITE(3,*)' COORDONNEES DES POINTS (NOEUDS)'
C WRITE(3,*)' IPOIN X Z'

DO 82 IPOIN = 1,NPOIN

82 WRITE(3,83) IPOIN,(COORD(IPOIN,IDIME),IDIME=1,NDIME)

83 FORMAT(5X,I4,2(5X,D14.7))

C
C ----- 5 - LECTURE DES CONDITIONS AUX FRONTIERES -----
C (NOEUDS A VALEURS PRESCRITES)
C


```

DO 90 IVFIX = 1,NVFIX
90 READ(2,*) NOFIX(IVFIX),PRESC(IVFIX)
C
WRITE(3,*)'      NOFIX      PRESC'
DO 92 IVFIX = 1,NVFIX
92 WRITE(3,93) NOFIX(IVFIX),PRESC(IVFIX)
93 FORMAT(5X,I4,8X,D14.7)
C
C ----- 6 - LECTURE DES DONNEES SUR LE CHARGEMENT DE SURFACE--
C
READ(2,*) NEDGE,NODEG
WRITE(3,*)'      NEDGE      NODEG'
WRITE(3,95) NEDGE,NODEG
95 FORMAT(5X,I3,5X,I2)
DO 100 IEDGE = 1,NEDGE
C
LECTURE DES DONNEES SUR LE POSITIONNEMENT DES FACES CHARGEES
ET DE LEUR CHARGEMENT
C
READ(2,*) NEAST(IEDGE),(NOPRS(IEDGE,IODEG),IODEG=1,NODEG)
100 READ(2,*) PRESS(IEDGE),NCODE(IEDGE)
C
DO 110 IEDGE = 1,NEDGE
WRITE(3,*)'      NEAST(IEDGE)      NOPRS(IEDGE,IODEG)'
WRITE(3,112) NEAST(IEDGE),(NOPRS(IEDGE,IODEG),IODEG=1,NODEG)
WRITE(3,*)'      PRESS(IEDGE)      NCODE(IEDGE)'
110 WRITE(3,113) PRESS(IEDGE),NCODE(IEDGE)
112 FORMAT(5X,I3,10X,3(2X,I4))
113 FORMAT(5X,D14.7,5X,I1)
C
C ----- 7 - LECTURE DES DONNEES DU CHARGEMENT DE VOLUME -----
C
C ( Source Ponctuelle )
C
READ(2,*) NSOUR
WRITE(3,*)'      NSOUR'
WRITE(3,120) NSOUR
120 FORMAT(5X,I3)
C
LECTURE DES DONNEES SUR LE POSITIONNEMENT DES SOURCES
C
DO 130 ISOUR=1,NSOUR
WRITE(3,*)'      NELSP(ISOUR)      SOURC(ISOUR)'
READ(2,*) NELSP(ISOUR),SOURC(ISOUR)
130 WRITE(3,140) NELSP(ISOUR),SOURC(ISOUR)
140 FORMAT(5X,I4,5X,D14.7)
C
C ----- 8 - LA DONNEE DES PARAMETRES DE GAUSS -----
C
CALL GAUSSQ
C
CLOSE (2)
RETURN
END
C -----
SUBROUTINE NODXZ
C
INTERPOLATION DES COORDONNEES DES NOEUDS INTERMEDIAIRES
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,

```



```

      BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
      NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF
COMMON/TABDIM/COORD(100,2),PRESC(30),ATETA(8),NOFIX(30),
      LNODS(10,8),DIFFD(40),TETTD(40),NCODE(40),NOPRS(40,3)
COMMON/PROB/PRESS(40),NEAST(40):NELSP(10),SOURC(10)

```

```

C
C BOUCLE SUR CHAQUE ELEMENT
C

```

```

      DO 30 IELEM = 1,NELEM

```

```

C
C BOUCLE SUR CHAQUE FACE DE L'ELEMENT( 4 FACES )
C

```

```

      DO 20 INODE = 1,4

```

```

C
C RECHERCHE DU N° DE NOEUD DU 1° NOEUD
C

```

```

      NODST = LNODS(IELEM,INODE)
      IGASH = INODE + 1
      IF (IGASH.EQ.5) IGASH = 1

```

```

C
C RECHERCHE DU N° DE NOEUD DU DERNIER NOEUD
C

```

```

      NODFN = LNODS(IELEM,IGASH)
      MIDPT = INODE + 4

```

```

C
C CALCUL DU N° DE NOEUD DU NOEUD INTERMEDIAIRE
C

```

```

      NODMD = LNODS(IELEM,MIDPT)
      TOTAL = ABS(COORD(NODMD,1)) + ABS(COORD(NODMD,2))

```

```

C
C SI LES COORD.DU NOEUD INT. SONT TT DEUX NULS INTERP. PAR
C LINE DROITE
C

```

```

      IF(TOTAL.GT.0.0) GO TO 20
      KOUNT = 1

```

```

10 COORD(NODMD,KOUNT)=(COORD(NODST,KOUNT)+COORD(NODFN,KOUNT))/2.0

```

```

      KOUNT = KOUNT + 1

```

```

      IF (KOUNT.EQ.2) GO TO 10

```

```

20 CONTINUE

```

```

30 CONTINUE

```

```

      RETURN

```

```

      END

```

```

C-----
SUBROUTINE GAUSSQ

```

```

C
C LA DONNEE DES PARAMETRES DE GAUSS POUR L'INTEGRATION
C NUMERIQUE ( 2 fois 2 pour notre cas )
C

```

```

      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
      BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
      NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF
COMMON/TABDIM/COORD(100,2),PRESC(30),ATETA(8),NOFIX(30),
      LNODS(10,8),DIFFD(40),TETTD(40),NCODE(40),NOPRS(40,3)
COMMON/PROB/PRESS(40),NEAST(40),NELSP(10),SOURC(10)
COMMON/WORK/ELCOD(2,8),SHAPE(8),DERIV(2,8),CARTD(2,8),POSGP(4),
      WEIGP(4),GPCOD(2,4),EDIFF(8,8),ECAPA(8,8),ECAPD(8,8),
      ECAPI(8,8),ELFOG(10,8),CAPAR(8,8),XDOTO(8),FMDTO(8),

```



```

      TELFO(10,8),ELFOQ(10,8),TETAD(8),TETAT(8,36001),DTETO(8),
      DTETT(8,36001),TETES(8,36001),TMPES(100),ECAPR(8,8),
      TETFP(8),TEMPS(100),EFNPG(10,8),TETFF(8,36001),TETAR(8),
      TETFR(8),TETAS(8,36001),TETAP(8),ECAMR(8,8),TETPP(8),
      TETDA(8,36001),TETDF(8,36001),EFNPP(8)

```

```

C
      IF (NGAUS.GT.2) GO TO 10
      POSGP(1) = -0.577350269189626
      WEIGP(1) = 1.0
      GOTO 20
10  POSGP(1) = -0.774596669241483
      POSGP(2) = 0.0
      WEIGP(1) = 0.5555555555555556
      WEIGP(2) = 0.8888888888888889
20  KGAUS = NGAUS/2
      DO 30 IGASH = 1,KGAUS
          JGASH = NGAUS + 1 - IGASH
          POSGP(JGASH) = - POSGP(IGASH)
          WEIGP(JGASH) = WEIGP(IGASH)
30  CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

C-----
      SUBROUTINE SHAPESP(ERRSP,ESSSP)

```

```

C
C      CALCUL DES FONCTIONS DE FORME ET DE LEURS DERIVEES (2D)
C

```

```

      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
      BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
      NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
      COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF
      COMMON/TABDIM/COORD(100,2),PRESC(30),ATETA(8),NOFIX(30),
      LNODS(10,8),DIFFD(40),TETTD(40),NCODE(40),NOPRS(40,3)
      COMMON/PROB/PRESS(40),NEAST(40),NELSP(10),SOURC(10)
      COMMON/WORK/ELCOD(2,8),SHAPE(8),DERIV(2,8),CARTD(2,8),POSGP(4),
      WEIGP(4),GPCOD(2,4),EDIFF(8,8),ECAPA(8,8),ECAPD(8,8),
      ECAPI(8,8),ELFOG(10,8),CAPAR(8,8),XDOTO(8),FMDTO(8),
      TELFO(10,8),ELFOQ(10,8),TETAD(8),TETAT(8,36001),DTETO(8),
      DTETT(8,36001),TETES(8,36001),TMPES(100),ECAPR(8,8),
      TETFP(8),TEMPS(100),EFNPG(10,8),TETFF(8,36001),TETAR(8),
      TETFR(8),TETAS(8,36001),TETAP(8),ECAMR(8,8),TETPP(8),
      TETDA(8,36001),TETDF(8,36001),EFNPP(8)

```

```

C
      R=ERRSP
      S=ESSSP
      S2 = S*2.0
      R2 = R*2.0
      SS = S*S
      RR = R*R
      SR = S*R
      SSR = S*S*R
      RRS = R*R*S
      SR2 = S*R*2.0

```

```

C
C      FONCTIONS DE FORME
C

```

```

      SHAPE(1) = (-1.0+SR+SS+RR-SSR-RRS)/4.0
      SHAPE(2) = (-1.0-SR+SS+RR+SSR-RRS)/4.0
      SHAPE(3) = (-1.0+SR+SS+RR+SSR+RRS)/4.0

```



```

SHAPE(4) = (-1.0-SR+SS+RR-SSR+RRS)/4.0
SHAPE(5) = (1.0-S-RR+RRS)/2.0
SHAPE(6) = (1.0+R-SS-SSR)/2.0
SHAPE(7) = (1.0+S-RR-RRS)/2.0
SHAPE(8) = (1.0-R-SS+SSR)/2.0

```

DERIVEES DES FONCTIONS DE FORME

```

DERIV(1,1) = ( S+R2-SS-SR2)/4.0
DERIV(1,2) = (-S+R2+SS-SR2)/4.0
DERIV(1,3) = ( S+R2+SS+SR2)/4.0
DERIV(1,4) = (-S+R2-SS+SR2)/4.0
DERIV(1,5) = -R +SR
DERIV(1,6) = (1.0-SS)/2.0
DERIV(1,7) = -R -SR
DERIV(1,8) = (-1.0+SS)/2.0
DERIV(2,1) = ( R+S2-SR2-RR)/4.0
DERIV(2,2) = (-R+S2+SR2-RR)/4.0
DERIV(2,3) = ( R+S2+RR+SR2)/4.0
DERIV(2,4) = (-R+S2+RR-SR2)/4.0
DERIV(2,5) = (-1.0+RR)/2.0
DERIV(2,6) = -S-SR
DERIV(2,7) = (1.0-RR)/2.0
DERIV(2,8) = -S+SR
RETURN
END

```

SUBROUTINE JACOB(IELEM,DJACB,KGASP)

CALCUL DES COORD. DES POINTS DE GAUSS ,LA MARTICE JACOBIENNE ,
SON DETERMINANT ,ET SON INVERSE .

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION XJACM(2,2),XJACI(2,2)
COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
      BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
      NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF
COMMON/TABDIM/COORD(100,2),PRESC(30),ATETA(8),NOFIX(30),
      LNODS(10,8),DIFFD(40),TETTD(40),NCODE(40),NOPRS(40,3)
COMMON/PROB/PRESS(40),NEAST(40),NELSP(10),SOURC(10)
COMMON/WORK/ELCOD(2,8),SHAPE(8),DERIV(2,8),CARTD(2,8),POSGP(4),
      WEIGP(4),GPCOD(2,4),EDIFF(8,8),ECAPA(8,8),ECAPD(8,8),
      ECAPI(8,8),ELFOG(10,8),CAPAR(8,8),XDOTO(8),FMDTO(8),
      TELFO(10,8),ELFOQ(10,8),TETAD(8),TETAT(8,36001),DTETO(8),
      DTETT(8,36001),TETES(8,36001),TMPES(100),ECAPR(8,8),
      TETFP(8),TEMPS(100),EFNPG(10,8),TETFF(8,36001),TETAR(8),
      TETFR(8),TETAS(8,36001),TETAP(8),ECAMR(8,8),TETPP(8),
      TETDA(8,36001),TETDF(8,36001),EFNPP(8)

```

CALCUL DES COORD. DES PTS DE GAUSS .

```

DO 10 IDIME = 1,NDIME
  GPCOD(IDIME,KGASP) = 0.0
  DO 10 INODE = 1,NNODE
    GPCOD(IDIME,KGASP) = GPCOD(IDIME,KGASP)+ELCOD(IDIME,INODE)
    *SHAPE(INODE)

```

10 CONTINUE

FORMATION DE LA MATRICE JACOBIENNE XJACM

```

DO 20 IDIME = 1,NDIME
  DO 20 JDIME = 1,NDIME
    XJACM(IDIME,JDIME) = 0.0
  DO 25 INODE = 1,NNODE
    XJACM(IDIME,JDIME) = XJACM(IDIME,JDIME)+DERIV(IDIME,INODE)
      *ELCOD(JDIME,INODE)

```

25 CONTINUE

20 CONTINUE

CALCUL DU DETERMINANT ET DE L'INVERSE DE LA MATRICE JACOBIENNE

```

DJACB = XJACM(1,1)*XJACM(2,2)-XJACM(1,2)*XJACM(2,1)
IF (DJACB.GT.0.0) GO TO 30
WRITE(*,*) 'ARRET EN JACOB NEG.ou NULL' , IELEM
WRITE(*,*) 'DJACB= ',DJACB
STOP

```

```

30 XJACI(1,1)=XJACM(2,2)/DJACB
  XJACI(2,2)=XJACM(1,1)/DJACB
  XJACI(1,2)=XJACM(1,2)/DJACB
  XJACI(2,1)=XJACM(2,1)/DJACB

```

CALCUL DES DERIVEES CARTESIENNES DES FONCTIONS DE FOREME

```

DO 40 IDIME = 1,NDIME
  DO 40 INODE = 1,NNODE
    CARTD(IDIME,INODE) = 0.0
  DO 40 JDIME = 1,NDIME
    CARTD(IDIME,INODE) = CARTD(IDIME,INODE)+XJACI(IDIME,JDIME)
      * DERIV(JDIME,INODE)

```

40 CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE DIFF(IELEM,DIFFX,DIFFZ)

CALCUL DES MATRICES DE DIFFUSIVITES [D] POUR L'ETAT INITIAL

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
  BETAC,TETA1,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
  NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF
COMMON/TABDIM/COORD(100,2),PRESC(30),ATETA(8),NOFIX(30),
  LNODS(10,8),DIFFD(40),TETTD(40),NCODE(40),NOPRS(40,3)
COMMON/PROB/PRESS(40),NEAST(40),NELSP(10),SOURC(10)
COMMON/WORK/ELCOD(2,8),SHAPE(8),DERIV(2,8),CARTD(2,8),POSGP(4),
  WEIGP(4),GPCOD(2,4),EDIFF(8,8),ECAPA(8,8),ECAPD(8,8),
  ECAPI(8,8),ELFOG(10,8),CAPAR(8,8),XDOTO(8),FMDTO(8),
  TELFO(10,8),ELFOQ(10,8),TETAD(8),TETAT(8,36001),DTETO(8),
  DTETT(8,36001),TETES(8,36001),TMPES(100),ECAPR(8,8),
  TETFP(8),TEMPS(100),EFNPG(10,8),TETFF(8,36001),TETAR(8),
  TETFR(8),TETAS(8,36001),TETAP(8),ECAMR(8,8),TETPP(8),
  TETDA(8,36001),TETDF(8,36001),EFNPP(8)

```

EVALUATION DES COORD.DES NOUEDES DE L'ELEMENT

```

DO 10 INODE = 1,NNODE
  LNODE = LNODS(IELEM,INODE)

```



```

      DO 10 IDIME = 1,NDIME
10  ELCOD(IDIME,INODE) = COORD(LNODE,IDIME)

```

```

      INITIALISATION DES MATRICES DE DIFF. [D]

```

```

      DO 20 IEVAB = 1,NEVAB
      DO 20 JEVAB = 1,NEVAB
20  EDIFF(IEVAB,JEVAB) = 0.0
      KGASP = 0

```

```

      DEBUT DE L'INTEGRATION DE GAUSS

```

```

      DO 50 IGAUS = 1,NGAUS
      DO 50 JGAUS = 1,NGAUS
          KGASP = KGASP+1
          ERRSP = POSGP(IGAUS)
          ESSSP = POSGP(JGAUS)

```

```

      EVALUATION DES FONCTION DE FORME , ELEMENT DE VOLUME , ETC....

```

```

      CALL SHAPESP(ERRSP,ESSSP)

```

```

      CALL JACOB(IELEM,DJACB,KGASP)

```

```

      DVOLU = DJACB*WEIGP(IGAUS)*WEIGP(JGAUS)*ETHIC

```

```

      CALCUL DE LA MATRICE DE DIFF. [D] ( Triangle Superieur )

```

```

      DO 60 IEVAB = 1,NEVAB
      DO 60 JEVAB = IEVAB ,NEVAB
          EDIFF(IEVAB,JEVAB)= EDIFF(IEVAB,JEVAB)+(DIFFX*CARTD(1,IEVAB)
          *CARTD(1,JEVAB)+DIFFZ*CARTD(2,IEVAB)*CARTD(2,JEVAB))*DVOLU
60  CONTINUE
50  CONTINUE

```

```

      CONSTRUCTION DU TRIANGLE INFERIEUR DE [ D ]

```

```

      DO 70 IEVAB = 1,NEVAB
      DO 70 JEVAB = 1,NEVAB
      DO 70 JEVAB = 1 ,NEVAB
70  EDIFF(JEVAB,IEVAB)= EDIFF(IEVAR,JEVAB)
      RETURN
      END

```

```

      SUBROUTINE DIFES(IELEM,DFESX,DFESZ)

```

```

      CALCUL DES MATRICES DE DIFFUSIVITES [ D ] POUR LA CONVERGENCE
      DE LA SOLUTION ( fonction de la diffusivite estimee )

```

```

      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
      BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
      NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
      COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF
      COMMON/TABDIM/COORD(100,2),PRESC(30),ATETA(8),NOFIX(30),
      LNODS(10,8),DIFFD(40),TETTD(40),NCODE(40),NOPRS(40,3)
      COMMON/PROB/PRESS(40),NEAST(40),NELSP(10),SOURC(10)
      COMMON/WORK/ELCOD(2,8),SHAPE(8),DERIV(2,8),CARTD(2,8),POSGP(4),
      WEIGP(4),GPCOD(2,4),EDIFF(8,8),ECAPA(8,8),ECAPD(8,8),

```



```

      ECAP1(8,8),ELFOG(10,8),CAPAR(8,8),XDOTO(8),FMDTO(8),
      TELFO(10,8),ELFOQ(10,8),TETAD(8),TETAT(8,36001),DTETO(8),
      DTETT(8,36001),TETES(8,36001),TMPES(100),ECAPR(8,8),
      TETFP(8),TEMPS(100),EFNPG(10,8),TETFF(8,36001),TETAR(8),
      TETFR(8),TETAS(8,36001),TETAP(8),ECAMR(8,8),TETPP(8),
      TETDA(8,36001),TETDF(8,36001),EFNPP(8)

```

```

C
C EVALUATION DES COORD.DES NOUEDES DE L'ELEMENT
C

```

```

      DO 10 INODE = 1,NNODE
      LNODE = LNODS(IELEM,INODE)
      DO 10 IDIME = 1,NDIME
10  ELCOD(IDIME,INODE) = COORD(LNODE,IDIME)

```

```

C
C INITIALISATION DES MATRICES DE DIFF. [D]
C

```

```

      DO 20 IEVAB = 1,NEVAB
      DO 20 JEVAB = 1,NEVAB
20  EDIFF(IEVAB,JEVAB) = 0.0
      KGASP = 0

```

```

C
C DEBUT DE L'INTEGRATION DE GAUSS
C

```

```

      DO 50 IGAUS = 1,NGAUS
      DO 50 JGAUS = 1,NGAUS
      KGASP = KGASP+1
      ERRSP = POSGP(IGAUS)
      ESSSP = POSGP(JGAUS)

```

```

C
C EVALUATION DES FONCTION DE FORME , ELEMENT DE VOLUME , ETC....
C

```

```

      CALL SHAPESP(ERRSP,ESSSP)
      CALL JACOB(IELEM,DJACB,KGASP)
      DVOLU = DJACB*WEIGP(IGAUS)*WEIGP(JGAUS)*ETHIC

```

```

C
C CALCUL DE LA MATRICES DE DIFF. [D] ( Triangle Superieur )
C

```

```

      DO 60 IEVAB = 1,NEVAB
      DO 60 JEVAB = IEVAB ,NEVAB
      EDIFF(IEVAB,JEVAB)= EDIFF(IEVAB,JEVAB)+(DFESX*CARTD(1,IEVAB)
      *CARTD(1,JEVAB)+DFESZ*CARTD(2,IEVAB)*CARTD(2,JEVAB))*DVOLU
60  CONTINUE
50  CONTINUE

```

```

C
C CONSTRUCTION DU TRIANGLE INFERIEUR DE [ D ]
C

```

```

      DO 70 IEVAB = 1,NEVAB
      DO 70 JEVAB = 1 ,NEVAB
70  EDIFF(JEVAB,IEVAB)= EDIFF(IEVAB,JEVAB)
      RETURN
      END

```

```

C-----
C SUBROUTINE CAPADIAG(IELEM,ECAPD)
C

```

```

C GENERATION DE LA MATRICE CAPACITE DIAGONALE [ C ] PAR LE
C SCHEMA DE DIAGONALISATION H R Z
C

```

```

C IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```



```

DIMENSION DIAGM(8),ECAPT(8),ECAPD(8,8)
COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
      BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
      NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF
COMMON/TABDIM/COORD(100,2),PRESG(30),ATETA(8),NOFIX(30),
      LNODS(10,8),DIFFD(40),TETTD(40),NCODE(40),NOPRS(40,3)
COMMON/PROB/PRESS(40),NEAST(40),NELSP(10),SOURC(10)
COMMON/WORK/ELCOD(2,8),SHAPE(8),DERIV(2,8),CARTD(2,8),POSGP(4),
      WEIGP(4),GPCOD(2,4),EDIFF(8,8),ECAPA(8,8),
      ECAP1(8,8),ELFOG(10,8),CAPAR(8,8),XDOTO(8),FMDTO(8),
      TELFO(10,8),ELFOQ(10,8),TETAD(8),TETAT(8,36001),DTETO(8),
      DTETT(8,36001),TETES(8,36001),TMPES(100),ECAPR(8,8),

```

```

TETFP(8),TEMPS(100),EFNPG(10,8),TETFF(8,36001),TETAR(8),
      TETFR(8),TETAS(8,36001),TETAP(8),ECAMR(8,8),TETPP(8),
      TETDA(8,36001),TETDF(8,36001),EFNPP(8)

```

```

EVALUATION DES COORD.DES NOUEDES DE L'ELEMENT

```

```

      DO 10 INODE = 1,NNODE
        LNODE = LNODS(IELEM,INODE)
        DO 10 IDIME = 1,NDIME
10    ELCOD(IDIME,INODE) = COORD(LNODE,IDIME)

```

```

INITIALISATION DE LA MATRICE CAPACITE DIAGONALE

```

```

      DO 20 IEVAB = 1,NEVAB
        DO 20 JEVAB = 1,NEVAB
20    ECAPD(IEVAB,JEVAB) = 0.0
      KGASP=0

```

```

INITIALISATION DE L'ELEMENT DE VOLUME

```

```

      ELMAS=0.0

```

```

INITIALISATION DU VECTEUR COMPORTANT LES ELEMENTS DE LA
DIAGONALE DE LA MATRICE CAPACITE ( T : Temporaire )

```

```

      DO 30 IEVAB = 1,NEVAB
        DIAGM(IEVAB) = 0.0
30    ECAPT(IEVAB) = 0.0

```

```

DEBUT DE L'INTEGRATION DE GAUSS

```

```

      DO 70 IGAUS=1,NGAUS
        ERRSP=POSGP(IGAUS)
        DO 70 JGAUS=1,NGAUS
          KGASP=KGASP+1
          ESSSP=POSGP(JGAUS)

```

```

EVALUATION DES FONCTION DE FORME , ELEMENT DE VOLUME , etc...

```

```

      CALL SHAPESP(ERRSP,ESSSP)
      CALL JACOB(IELEM,DJACB,KGASP)
      DVOLU=DJACB*WEIGP(IGAUS)*WEIGP(JGAUS)*ETHIC

```

```

CALCUL DES ELEMENTS DE LA DIAGONALE DE LA MATRICE CAPACITE

```



```

      DO 40 IEVAB=1,NEVAB
        SHAPI=SHAPE(IEVAB)
40    DIAGM(IEVAB)=DIAGM(IEVAB)+SHAPI*SHAPI*DVLU
        ELMAS=ELMAS+DVLU
70  CONTINUE

```

```

C
C  GENERATION DE LA MATRICE CAPACITE DIAGONALE SELON LE SCHEMA
C  H.R.Z (Special Lumping Technique)
C

```

```

C  1) Somme des elements de la diagonale
C

```

```

      SUMAS=0.0
      DO 50 IEVAB=1,NEVAB
50    SUMAS=SUMAS+DIAGM(IEVAB)

```

```

C  2) Calcul du rapport: Masse de l'element (element de volume) a la
C  Somme des elements de la diagonale.
C

```

```

      SUMAS=ELMAS/SUMAS

```

```

C  3) GENERATION DE LA MATRICE DIAGONALE
C

```

```

      DO 60 IEVAB=1,NEVAB
        ECAPT(IEVAB)=ECAPT(IEVAB)+DIAGM(IEVAB)*SUMAS
60  CONTINUE
      DO 80 IEVAB=1,NEVAB
        DO 80 JEVAB=1,NEVAB
          IF (IEVAB.EQ.JEVAB) THEN
            ECAPD(IEVAB,JEVAB)=ECAPT(IEVAB)
          ELSE
            ECAPD(IEVAB,JEVAB)=0.0
          ENDIF
80    CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

-----
      SUBROUTINE LOADG(NELSP,SOURC)

```

```

C  CALCUL DE LA CONTRIBUTION DU CHARGEMENT INTERNE PONCTUEL
C

```

```

      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION NELSP(10),SOURC(10)
      COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
      BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
      NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
      COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF
      COMMON/TABDIM/COORD(100,2),PRESC(30),ATETA(8),NOFIX(30),
      LNODS(10,8),DIFFD(40),TETTD(40),NCODE(40),NOPRS(40,3)
      COMMON/PROB/PRESS(40),NEAST(40)
      COMMON/WORK/ELCOD(2,8),SHAPE(8),DERIV(2,8),CARTD(2,8),POSGP(4),
      WEIGP(4),GPCOD(2,4),EDIFF(8,8),ECAPA(8,8),ECAPD(8,8),
      ECAP1(8,8),ELFOG(10,8),CAPAR(8,8),XDOTO(8),FMDTO(8),
      TELFO(10,8),ELFOQ(10,8),TETAD(8),TETAT(8,36001),DTETO(8),
      DTETT(8,36001),TETES(8,36001),TMPES(100),ECAPR(8,8),
      TETFP(8),TEMPS(100),EFNPG(10,8),TETFF(8,36001),TETAR(8),
      TETFR(8),TETAS(8,36001),TETAP(8),ECAMR(8,8),TETPP(8),
      TETDA(8,36001),TETDF(8,36001),EFNPP(8)

```

```

C  BOUCLE POUR L'ENSEMBLE DES ELEMENTS AYANT UNE SOURCE PONCTUELLE
C

```



```
DO 5 ISOUR=1,NSOUR
  ELESF=NELSP(ISOUR)
```

```
EVALUATION DES COORD.DES NOUEDS DE L'ELEMENT
```

```
DO 10 INODE = 1,NNODE
  LNODE = LNODS(ELESF,INODE)
  DO 10 IDIME = 1,NDIME
10 ELCOD(IDIME,INODE) = COORD(LNODE,IDIME)
```

```
INITIALISATION DU VECTEUR CHARGEMENT HYDRAULIQUE {FG}
```

```
DO 20 IEVAB = 1,NEVAB
20 ELFOG(ELESF,IEVAB) = 0.0
  KGASF = 0
```

```
DEBUT DE L'INTEGRATION DE GAUSS
```

```
DO 50 IGAUS = 1,NGAUS
  DO 50 JGAUS = 1,NGAUS
    KGASF = KGASF+1
    ERRSP = POSGP(IGAUS)
    ESSSP = POSGP(JGAUS)
```

```
EVALUATION DES FONCTION DE FORME , ELEMENT DE VOLUME , ETC....
```

```
CALL SHAPESP(ERRSP,ESSSP)
```

```
CALL JACOB(ELESF,DJACB,KGASF)
```

```
DVOLUME = DJACB*WEIGP(IGAUS)*WEIGP(JGAUS)*ETHIC
```

```
CALCUL DU VECTEUR CHARGEMENT HYDRAULIQUE {FG}
```

```
DO 60 IEVAB = 1,NEVAB
  ELFOG(ELESF,IEVAB) = ELFOG(ELESF,IEVAB)+SOURC(ISOUR)*SHAPE(IEVAB)*
    DVOLUME
```

```
60 CONTINUE
50 CONTINUE
5 CONTINUE
  RETURN
  END
```

```
-----
SUBROUTINE BLOAD(NEAST,NCODE,PRESS,NOPRS)
```

```
CALCUL DE LA CONTRIBUTION DU CHARGEMENT DE SURFACE
```

```
(LES QUATRES FACES D'UN ELEMENT PEUVENT ETRE SOUMISES AU CHARGEMENT)
```

```
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION NEAST(40),NCODE(40),PRESS(40),NOPRS(40,3)
COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
  BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
  NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESF,NELUN
COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF
COMMON/TABDIM/COORD(100,2),PRESC(30),ATETA(8),NOFIX(30),
  LNODS(10,8),DIFFD(40),TETTD(40)
COMMON/PROB/NELSP(10),SOURC(10)
COMMON/WORK/ELCOD(2,8),SHAPE(8),DERIV(2,8),CARTD(2,8),POSGP(4),
  WEIGP(4),GPCOD(2,4),EDIFF(8,8),ECAPA(8,8),ECAPD(8,8),
```



```

      ECAP1(8,8),ELFOG(10,8),CAPAR(8,8),XDOTO(8),FMDTO(8),
      TELFO(10,8),ELFOQ(10,8),TETAD(8),TETAT(8,36001),DTETO(8),
      DTETT(8,36001),TETES(8,36001),TMPES(100),ECAPR(8,8),
      TETFP(8),TEMPS(100),EFNPG(10,8),TETFF(8,36001),TETAR(8),
      TETFR(8),TETAS(8,36001),TETAP(8),ECAMR(8,8),TETPP(8),
      TETDA(8,36001),TETDF(8,36001),EFNPP(8)

```

```

C
C INITIALISATION DU VECTEUR ELEMENTAIRE CHARGEMENT DE SURFACE
C

```

```

      DO 10 IELEM = 1,NELEM
      DO 10 IEVAB = 1,NEVAB
10      ELFOQ(IELEM,IEVAB)= 0.0

```

```

C
C BOUCLE SUR CHAQUE FACE
C

```

```

      DO 90 IEDGE = 1,NEDGE
      NEASS=NEAST(IEDGE)
      NCOCH=NCODE(IEDGE)
      IF(NCOCH.EQ.0) THEN
          ESSSP=1.0
          GO TO 15
      ELSEIF (NCOCH.EQ.1) THEN
          ERRSP=-1.0
          GO TO 15
      ELSEIF (NCOCH.EQ.2) THEN
          ERRSP=1.0
          GO TO 15
      ELSE
          ESSSP=-1.0

```

```

      ENDIF

```

```

C
C CALCUL DES COORDONNEES DES NOEUDS DE LA FACE CONSIDEREE
C

```

```

15      DO 20 IODEG = 1,NODEG
          LNODE = NOPRS(IEDGE,IODEG)
          DO 20 IDIME = 1,NDIME
20      ELCOD(IDIME,IODEG) = COORD(LNODE,IDIME)

```

```

C
C BOUCLE SUR L'INTEGRATION NUMERIQUE LINEAIRE
C

```

```

      DO 80 IGAUS = 1,NGAUS
      IF(NCOCH.EQ.0) THEN
          ERRSP=POSGP(IGAUS)
          GO TO 30
      ELSEIF (NCOCH.EQ.1) THEN
          ESSSP=POSGP(IGAUS)
          GO TO 30
      ELSEIF (NCOCH.EQ.2) THEN
          ESSSP=POSGP(IGAUS)
          GO TO 30
      ELSE
          ERRSP=POSGP(IGAUS)

```

```

      ENDIF

```

```

C
C EVALUATION DES FONCTIONS DE FORME AUX POINTS DE GAUSS .
C

```

```

30      CALL SHAPESP(ERRSP,ESSSP)

```

```

C
C CALCUL DES COMPOSANTES DU CHARGEMENT NODAL EQUIVALENT
C ( NFORM : N FONCTION DE FORME A DERIVER POUR CHAQUE FACE )
C

```


IF ((NCOCH.EQ.0).OR.(NCOCH.EQ.3)) THEN

ORDRE=0

DJACB = 0.0

DO 40 IODEG = 1,NODEG

ORDRE=ORDRE+1

IF(NCOCH.EQ.0) THEN

IF(ORDRE.EQ.1) NFORM = 3

IF(ORDRE.EQ.2) NFORM = 7

IF(ORDRE.EQ.3) NFORM = 4

ELSE

IF(ORDRE.EQ.1) NFORM = 1

IF(ORDRE.EQ.2) NFORM = 5

IF(ORDRE.EQ.3) NFORM = 2

ENDIF

DJACB = DJACB+ELCOD(1,IODEG)*DERIV(1,NFORM)

DVOLU = WEIGP(IGAUS)*DJACB*ETHIC

ELSE

ORDRE=0

DJACB = 0.0

DO 43 IODEG = 1,NODEG

ORDRE=ORDRE+1

IF(NCOCH.EQ.1) THEN

IF(ORDRE.EQ.1) NFORM = 4

IF(ORDRE.EQ.2) NFORM = 8

IF(ORDRE.EQ.3) NFORM = 1

ELSE

IF(ORDRE.EQ.1) NFORM = 2

IF(ORDRE.EQ.2) NFORM = 6

IF(ORDRE.EQ.3) NFORM = 3

ENDIF

DJACB = DJACB+ELCOD(2,IODEG)*DERIV(2,NFORM)

DVOLU = WEIGP(IGAUS)*DJACB*ETHIC

ENDIF

ASSOCIER LE CHARGEMENT DE LA FACE A L'ELEMENT CORRESPONDANT

DO 50 INODE = 1,NNODE

NLOCA = LNODS(NEASS,INODE)

IF(NLOCA.EQ.NOPRS(IEDGE,1)) GO TO 60

50 CONTINUE

60 JNODE = INODE + 2

KOUNT = 0

DO 70 KNODE = INODE,JNODE

KOUNT = KOUNT +1

IF(NCOCH.EQ.0) THEN

IF(KOUNT.EQ.1) NOEUD = 3

IF(KOUNT.EQ.2) NOEUD = 7

IF(KOUNT.EQ.3) NOEUD = 4

GO TO 70

ELSEIF (NCOCH.EQ.1) THEN

IF(KOUNT.EQ.1) NOEUD = 4

IF(KOUNT.EQ.2) NOEUD = 8

IF(KOUNT.EQ.3) NOEUD = 1

GO TO 70

ELSEIF (NCOCH.EQ.2) THEN

IF(KOUNT.EQ.1) NOEUD = 2

IF(KOUNT.EQ.2) NOEUD = 6

IF(KOUNT.EQ.3) NOEUD = 3

GO TO 70


```

                ELSE
                IF(KOUNT.EQ.1) NOEUD = 1
                IF(KOUNT.EQ.2) NOEUD = 5
                IF(KOUNT.EQ.3) NOEUD = 2
            ENDIF
70    ELFOQ(NEASS,NOEUD)=ELFOQ(NEASS,NOEUD)+SHAPE(NOEU)*
                PRESS(IEDGE)*DVOLU
80    CONTINUE
90    CONTINUE
        RETURN
        END

```

```

C -----
C    SUBROUTINE DXDZDO(TETAI,MTETD,BETAC,DIFFX,DIFFZ,NCDEF)
C
C    LECTURE ET INTERPOLATION DES VALEURS DE D(T) DU TABLEAU DU
C    FICHIER DE DONNEES .( ETAT INITIAL )
C
C    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C    COMMON/UN/PAMAX,TTSAT
C    COMMON/TABDIM/COORD(100,2),PRESC(30),ATETA(8),NOFIX(30),
C        LNODS(10,8),DIFFD(40),TETTD(40),NCODE(40),NOPRS(40,3)
C    COMMON/PROB/PRESS(40),NEAST(40),NELSP(10),SOURC(10)
C
C    RECHERCHE DE LA VALEUR DE D(T) DANS LE TABLEAU
C
C    DO 10 I = 1,MTETD
C        IF (TETAI.EQ.TETTD(I)) THEN
C            GO TO 40
C        ELSE
C
C            INTERPOLATION DE LA VALEUR DE D(T)
C
C            IF (TETAI.GT.TETTD(I). AND .TETAI.LT.TETTD(I+1)) GOTO 30
C        ENDIF
10    CONTINUE
        WRITE(*,25)
        WRITE(*,*) ' TETAI = ',TETAI
        STOP
25    FORMAT('VALEUR DE TETA  HORS TABLEAU ! VEUILLEZ LA CHANGER ')
30    TIPUN=TETTD(I+1)
        TEDEI=TETTD(I)
        VALDT=DIFFD(I)+(TETAI - TEDEI) *(DIFFD(I+1)-DIFFD(I))
            /((TIPUN-TEDEI)
        GOTO 50
40    VALDT = DIFFD(I)
50    IF (NCDEF.EQ.0) THEN
C        POUR SOL NON GONFLANT
            DIFFX=VALDT
            GO TO 60
        ELSE
C        POUR SOL GONFLANT
            DIFFX = VALDT/(1+BETAC*TETAI)
            GO TO 60
        ENDIF
60    DIFFZ = DIFFX
        RETURN
        END
C -----
C    SUBROUTINE DXDZES(TTES1,MTETD,BETAC,DFESX,DFESZ,IPTMP,NCDEF)
C

```


LECTURE ET INTERPOLATION DES VALEURS DE D(T) DU TABLEAU DU
FICHIER DE DONNEES .(RECHRCHE POUR CONVERGENCE)

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON/UN/PAMAX,TTSAT
COMMON/TABDIM/COORD(100,2),PRES(30),ATETA(8),NOFIX(30),
LNODS(10,8),DIFFD(40),TETTD(40),NCODE(40),NOPRS(40,3)
COMMON/PROB/PRESS(40),NEAST(40),NELSP(10),SOURC(10)

RECHERCHE DE LA VALEUR DE D(T) DANS LE TABLEAU

DO 10 I = 1,MTETD
IF (TTES1.EQ.TETTD(I)) THEN
GO TO 40
ELSE

INTERPOLATION DE LA VALEUR DE D(T)

IF (TTES1.GT.TETTD(I). AND .TTES1.LT.TETTD(I+1)) GOTO 30
ENDIF
10 CONTINUE
30 TIPUN=TETTD(I+1)
TEDEI=TETTD(I)
VALDT=DIFFD(I)+(TTES1 - TEDEI) *(DIFFD(I+1)-DIFFD(I))
/(TIPUN-TEDEI)
GOTO 50
40 VALDT = DIFFD(I)
50 IF (NCDEF.EQ.0) THEN
POUR SOL NON GONFLANT
DFESX = VALDT
GO TO 60
ELSE
POUR SOL GONFLANT
DFESX = VALDT/(1+BETAC*TTES1)
GO TO 60
ENDIF
60 DFESZ = DFESX
RETURN
END

SUBROUTINE PRODMATV(AMATR,BVECT,XMATV)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION AMATR(8,8),BVECT(8),XMATV(8)

CETTE SUBROUTINE EFFECTUE LE PRODUIT D'UNE MATRICES PAR UN
VECTEUR

COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF

DO 20 IEVAB = 1,NEVAB
XMATV(IEVAB) = 0.0
DO 10 JEVAB = 1,NEVAB
XMATV(IEVAB)=XMATV(IEVAB)+AMATR(IEVAB,JEVAB)*BVECT(JEVAB)
10 CONTINUE
20 CONTINUE
RETURN
END


```

C -----
SUBROUTINE PROD2MAT (AMATR,BMATR,XAXBM)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION AMATR(8,8),BMATR(8,8),XAXBM(8,8)

```

```

C
C CETTE SUBROUTINE EFFECTUE LE PRODUIT DE DEUX MATRICES
C

```

```

COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF

```

```

C
DO 20 IEVAB = 1,NEVAB
DO 20 JEVAB = 1,NEVAB
XAXBM(IEVAB,JEVAB) = 0.0
DO 10 KEVAB = 1,NEVAB
XAXBM(IEVAB,JEVAB)=XAXBM(IEVAB,JEVAB)+AMATR(IEVAB,KEVAB)*
BMATR(KEVAB,JEVAB)
10 CONTINUE
20 CONTINUE
RETURN
END

```

```

C -----
SUBROUTINE INVMAT (AMATX,BMATX)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION AMATX(8,8),BMATX(8,8)

```

```

C
C CETTE SUBROUTINE EFFECTUE L'INVERSE D'UNE MATRICE (JORDAN)
C

```

```

COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF

```

```

C
DO 10 IEVAB = 1,NEVAB
DO 10 JEVAB = 1,NEVAB
BMATX(IEVAB,JEVAB) = 0.0
10 IF(IEVAB.EQ.JEVAB) BMATX(IEVAB,JEVAB) = 1.0
DO 20 IEVAB= 1,NEVAB
DENOM = AMATX(IEVAB,IEVAB)
DO 30 JEVAB = 1, NEVAB
AMATX(IEVAB,JEVAB)=AMATX(IEVAB,JEVAB)/DENOM
30 BMATX(IEVAB,JEVAB)=BMATX(IEVAB,JEVAB)/DENOM
KEVAB = IEVAB + 1
IF (KEVAB.GT.NEVAB) GO TO 40
DO 20 JEVAB = KEVAB,NEVAB
CONST= AMATX(JEVAB,IEVAB)
DO 20 LEVAB = IEVAB,NEVAB
AMATX(JEVAB,LEVAB)=AMATX(JEVAB,LEVAB)-AMATX(IEVAB,LEVAB)*CONST
20 BMATX(JEVAB,LEVAB)=BMATX(JEVAB,LEVAB)-BMATX(IEVAB,LEVAB)*CONST
40 CONTINUE
DO 50 IEVAB=2,NEVAB
KEVAB=NEVAB-IEVAB+2
LIMIT=KEVAB-1
DO 50 LEVAB=1,LIMIT
CONST=AMATX(LEVAB,KEVAB)
DO 50 JEVAB = 1,KEVAB
AMATX(LEVAB,JEVAB)=AMATX(LEVAB,JEVAB)-AMATX(KEVAB,JEVAB)*CONST
50 BMATX(LEVAB,JEVAB)=BMATX(LEVAB,JEVAB)-BMATX(KEVAB,JEVAB)*CONST
RETURN

```


END

SUBROUTINE INVMDIAG (AMATX,BMATX)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION AMATX(8,8),BMATX(8,8)

CETTE SUBROUTINE EFFECTUE L'INVERSE D'UNE MATRICE DIAGONALE

COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF

DO 10 IEVAB = 1,NEVAB
DO 10 JEVAB = 1,NEVAB
BMATX(IEVAB,JEVAB) = 0.0
DO 20 IEVAB=1,NEVAB
DO 20 JEVAB=1,NEVAB
IF (IEVAB.EQ.JEVAB) THEN
BMATX(IEVAB,JEVAB)= 1/AMATX(IEVAB,JEVAB)
ELSE
BMATX(IEVAB,JEVAB)= 0.0
ENDIF
20 CONTINUE
RETURN
END

SUBROUTINE PRAMT3DA(EA3DM,XAA3D,IELEM)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION EA3DM(8,8,10),XAA3D(8,8)

CETTE SUBROUTINE EFFECTUE LE PRODUIT DE DEUX MATRICES
A TROIS DIMENSION (A: POUR LE PRODUIT ALLER)

COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF

I=IELEM+1
IF (IELEM.EQ.1) THEN
GO TO 12
ELSE
DO 10 IEVAB=1,NEVAB
DO 10 JEVAB=1,NEVAB
10 EA3DM(IEVAB,JEVAB,1)=XAA3D(IEVAB,JEVAB)
ENDIF
12
DO 20 IEVAB = 1,NEVAB
DO 20 JEVAB = 1,NEVAB
XAA3D(IEVAB,JEVAB) = 0.0
DO 15 KEVAB = 1,NEVAB
XAA3D(IEVAB,JEVAB)=XAA3D(IEVAB,JEVAB)+EA3DM(IEVAB,KEVAB,1)
*EA3DM(KEVAB,JEVAB,1)
15 CONTINUE
20 CONTINUE
RETURN
END

SUBROUTINE PRBMT3DA(EB3DM,XBB3D,IELEM)

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION EB3DM(8,8,10),XBB3D(8,8)

CETTE SUBROUTINE EFFECTUE LE PRODUIT DE DEUX MATRICES
A TROIS DIMENSION (A: POUR LE PRODUIT ALLER)

COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF

I=IELEM+1
IF (IELEM.EQ.1) THEN
GO TO 12
ELSE
DO 10 IEVAB=1,NEVAB
DO 10 JEVAB=1,NEVAB
10 EB3DM(IEVAB,JEVAB,1)=XBB3D(IEVAB,JEVAB)
ENDIF
12 DO 20 IEVAB = 1,NEVAB
DO 20 JEVAB = 1,NEVAB
XBB3D(IEVAB,JEVAB) = 0.0
DO 15 KEVAB = 1,NEVAB
XBB3D(IEVAB,JEVAB)=XBB3D(IEVAB,JEVAB)+EB3DM(IEVAB,KEVAB,1)
*EB3DM(KEVAB,JEVAB,1)
15 CONTINUE
20 CONTINUE
RETURN
END

SUBROUTINE PRAMT3DR(EA3DM,XAA3D,IELEM)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION EA3DM(8,8,10),XAA3D(8,8)

CETTE SUBROUTINE EFFECTUE LE PRODUIT DE DEUX MATRICES
A TROIS DIMENSION (R: POUR LE PRODUIT RETOUR)

COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF

I=IELEM-1
IF(IELEM.EQ.NELEM) THEN
GO TO 12
ELSE
DO 10 IEVAB = 1,NEVAB
DO 10 JEVAB = 1,NEVAB
10 EA3DM(IEVAB,JEVAB,NELEM)=XAA3D(IEVAB,JEVAB)
ENDIF
12 DO 20 IEVAB = 1,NEVAB
DO 20 JEVAB = 1,NEVAB
XAA3D(IEVAB,JEVAB) = 0.0
DO 15 KEVAB = 1,NEVAB
15 XAA3D(IEVAB,JEVAB)=XAA3D(IEVAB,JEVAB)+EA3DM(IEVAB,KEVAB,1)*
EA3DM(KEVAB,JEVAB,NELEM)
20 CONTINUE
RETURN
END

```

SUBROUTINE PRBMT3DR(EB3DM,XBB3D,IELEM)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION EB3DM(8,8,10),XBB3D(8,8)

```

```

CETTE SUBROUTINE EFFECTUE LE PRODUIT DE DEUX MATRICES
A TROIS DIMENSION ( R: POUR LE PRODUIT RETOUR )

```

```

COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
      BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
      NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF

```

```

I=IELEM-1

```

```

IF(IELEM.EQ.NELEM) THEN

```

```

      GO TO 12

```

```

      ELSE

```

```

        DO 10 IEVAB = 1,NEVAB

```

```

          DO 10 JEVAB = 1,NEVAB

```

```

10      EB3DM(IEVAB,JEVAB,NELEM)=XBB3D(IEVAB,JEVAB)

```

```

      ENDIF

```

```

12      DO 20 IEVAB = 1,NEVAB

```

```

        DO 20 JEVAB = 1,NEVAB

```

```

          XBB3D(IEVAB,JEVAB) = 0.0

```

```

          DO 15 KEVAB = 1,NEVAB

```

```

15      XBB3D(IEVAB,JEVAB)=XBB3D(IEVAB,JEVAB)+EB3DM(IEVAB,KEVAB,I)*
          EB3DM(KEVAB,JEVAB,NELEM)

```

```

20      CONTINUE

```

```

      RETURN

```

```

      END

```

```

-----
SUBROUTINE AEBEMAT(DFESX,DFESZ,ECAPD)

```

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```

```

CALCUL DES MATRICES Ae et Be DE L'ALGORITHME DE RESOLUTION
ATTENTION POUR PATMP ou PATMP/2 .

```

```

DIMENSION ECAPD(8,8)

```

```

COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
      BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
      NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF

```

```

COMMON/TABDIM/COORD(100,2),PRESC(30),ATETA(8),NOFIX(30),

```

```

      LNODS(10,8),DIFFD(40),TETTD(40),NCODE(40),NOPRS(40,3)

```

```

COMMON/PROB/PRESS(40),NEAST(40),NELSP(10),SOURC(10)

```

```

COMMON/WORK/ELCOD(2,8),SHAPE(8),DERIV(2,8),CARTD(2,8),POSGP(4),

```

```

      WEIGP(4),GPCOD(2,4),EDIFF(8,8),ECAPA(8,8),

```

```

      ECAPI(8,8),ELFOG(10,8),CAPAR(8,8),XDOTO(8),FMDTO(8),

```

```

      TELFO(10,8),ELFOQ(10,8),TETAD(8),TETAT(8,36001),DTETO(8),

```

```

      DTETT(8,36001),TETES(8,36001),TMPES(100),ECAPR(8,8),

```

```

      TETFP(8),TEMPS(100),EFNPG(10,8),TETFF(8,36001),TETAR(8),

```

```

      TETFR(8),TETAS(8,36001),TETAP(8),ECAMR(8,8),TETPP(8),

```

```

      TETDA(8,36001),TETDF(8,36001),EFNPP(8)

```

```

COMMON/ALGO/AMATR(8,8),BMATR(8,8),XAXB(8,8),BVECT(8),XMATV(8),

```

```

      MATID(8,8),CINVM(8,8),CDMAT(8,8),CDCMT(8,8),

```

```

      EBMAP(8,8),EBMAT(8,8),EAMAP(8,8),EAMAT(8,8),

```

```

      EB3DM(8,8,10),EA3DM(8,8,10),PIBEA(8,8),PIBER(8,8),

```

```

      PIAEA(8,8),PIAER(8,8),XAEAR(8,8),XBEAR(8,8)

```

```

GENERATION DE LA MATRICE IDENTITE

```



```

C      DO 10 IEVAB = 1,NEVAB
C      DO 10 JEVAB = 1,NEVAB
C      IF (IEVAB.EQ.JEVAB) THEN
C          MATID(IEVAB,JEVAB) = 1.0
C          ELSE
C          MATID(IEVAB,JEVAB) = 0.0
C      ENDIF
10 CONTINUE
C
C      BOUCLE SUR LES ELEMENTS
C
C      DO 20 IELEM = 1,NELEM
C
C      CALCUL DES MATRICES [D] ET [C] CORRESPONDANT A L'ELEMENT
C      EN COURS.
C
C      CALL DIFES(IELEM,DFESX,DFESZ)
C
C      WRITE(3,*) 'ECAPD=', ((ECAPD(IEVAB,JEVAB),IEVAB=1,NEVAB),
C      JEVAB=1,NEVAB)
C      CALCUL DE  $E = C^{**(-1/2)} * D * C^{**(-1/2)}$ 
C
C      DO 30 IEVAB = 1,NEVAB
C      DO 30 JEVAB = 1,NEVAB
30      CAPAR(IEVAB,JEVAB)= DSQRT(ECAPD(IEVAB,JEVAB))
C
C      CALL INVMDIAG(CAPAR,CINVM)
C
C      CALCUL DE  $C^{**(-1/2)} * D$ 
C
C      CALL PROD2MAT(CINVM,EDIFF,CDMAT)
C
C      CALCUL DE  $C^{**(-1/2)} * D * C^{**(-1/2)} = E$ 
C
C      CALL PROD2MAT(CDMAT,CINVM,CDCMT)
C
C      CALCUL DE LA MATRICE Be : TERME AVANT INVERSION  $(I+GdtE)=EBMAP$ 
C      P : PARTIELLE CAR Be =  $(I+GdtE)^{-1}$ 
C
C      DO 40 IEVAB = 1,NEVAB
C      DO 40 JEVAB = 1,NEVAB
40      EBMAP(IEVAB,JEVAB)=MATID(IEVAB,JEVAB)+GAMAD*(PATMP/2)*
C      CDCMT(IEVAB,JEVAB)
C
C      ----- LE PATMP=dt EST DIVISE PAR DEUX SUIVANT L'ALGORITHME !
C
C      CALCUL DE LA MATRICE Be FINALE:INVERSE DE LA MATRICE EBMAP
C      Be=EBMAT
C
C      CALL INVMAT (EBMAP,EBMAT)
C
C      STOCKAGE DE LA MATRICE ELEMENTAIRE Be DANS UN TABLEAU A TROIS
C      DIMENSION EN VUE DE SON UTILISATION DANS LE S/P DU PRODUIT DE
C      TOUTES LES MATRICES Be : PI Be
C
C      DO 50 IEVAB = 1,NEVAB
C      DO 50 JEVAB = 1,NEVAB
50      EB3DM(IEVAB,JEVAB,IELEM)=0.0
C      DO 60 IEVAB = 1,NEVAB

```


DO 60 JEVAB = 1,NEVAB

60

EB3DM(IEVAB,JEVAB,IELEM)=EBMAT(IEVAB,JEVAB)

CALCUL DE LA MATRICE Ae = Be[I-(1-G)dtE]

CALCUL DU TERME : [I-(1-G)dtE] = EAMAP (P:PARTIELLE)

DO 70 IEVAB = 1,NEVAB

DO 70 JEVAB = 1,NEVAB

70 EAMAP(IEVAB,JEVAB)=MATID(IEVAB,JEVAB)-((1-GAMAD)*(PATMP/2)*
CDCMT(IEVAB,JEVAB))

CALCUL DE LA MATRICE Ae FINALE : PRODUIT DE EAMAP PAR EBMAT

CALL PROD2MAT(EBMAT,EAMAP,EAMAT)

STOCKAGE DE LA MATRICE ELEMENTAIRE Ae DANS UN TABLEAU A TROIS
DIMENSION EN VUE DE SON UTILISATION DANS LE S/P DU PRODUIT DE
TOUTES LES MATRICES Ae : PI Ae

DO 80 IEVAB = 1,NEVAB

DO 80 JEVAB = 1,NEVAB

80 EA3DM(IEVAB,JEVAB,IELEM)=0.0

DO 90 IEVAB = 1,NEVAB

DO 90 JEVAB = 1,NEVAB

90 EA3DM(IEVAB,JEVAB,IELEM)=EAMAT(IEVAB,JEVAB)

FIN DE LA BOUCLE SUR LES ELEMENTS

20 CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE PRODBEA(EB3DM,PIBEA)

PI= (PRODUIT) A: ALLER C.A.D DE IELEM=1,NELEM

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

DIMENSION EB3DM(8,8,10),PIBEA(8,8)

CETTE SUBROUTINE EFFECTUE LE PRODUIT DES MATRICES Be
ETAPE ALLER

COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF
COMMON/TABDIM/COORD(100,2),PRESC(30),ATETA(8),NOFIX(30),
LNODS(10,8),DIFFD(40),TETTD(40),NCODE(40),NOPRS(40,3)
COMMON/PROB/PRESS(40),NEAST(40),NELSP(10),SOURC(10)
COMMON/WORK/ELCOD(2,8),SHAPE(8),DERIV(2,8),CARTD(2,8),POSGP(4),
WEIGP(4),GPCOD(2,4),EDIFF(8,8),ECAPA(8,8),ECAPD(8,8),
ECAPI(8,8),ELFOG(10,8),CAPAR(8,8),XDOTO(8),FMDTO(8),
TELFO(10,8),ELFOQ(10,8),TETAD(8),TETAT(8,36001),DTETO(8),
DTETT(8,36001),TETES(8,36001),TMPES(100),ECAPR(8,8),
TETFP(8),TEMPS(100),EFNPG(10,8),TETFF(8,36001),TETAR(8),
TETFR(8),TETAS(8,36001),TETAP(8),ECAMR(8,8),TETPP(8),
TETDA(8,36001),TETDF(8,36001),EFNPP(8)
COMMON/ALGO/AMATR(8,8),BMATR(8,8),XAXBM(8,8),BVECT(8),XMATV(8),


```

MATID(8,8),CINVM(8,8),DMAT(8,8),CDCMT(8,8),
EBMAP(8,8),EBMAT(8,8),EAMAP(8,8),EAMAT(8,8),
EA3DM(8,8,10),PIBER(8,8),
PIAEA(8,8),PIAER(8,8),XAEAR(8,8),XBEAR(8,8)

```

```

C      IELEM = 1

```

```

C      INITIALISATION DE LA MATRICE PIBEA

```

```

C      DO 4 IEVAB = 1,NEVAB

```

```

C      DO 4 JEVAB = 1,NEVAB

```

```

4      PIBEA(IEVAB,JEVAB) = 0.0

```

```

C      5 CALL PRBMT3DA(EB3DM,PIBEA,IELEM)

```

```

C      IELEM = IELEM + 1

```

```

C      IF (IELEM.GT.NELEM-1) THEN

```

```

C          GO TO 40

```

```

C          ELSE

```

```

C          GO TO 5

```

```

C      ENDIF

```

```

40 RETURN

```

```

END

```

```

C -----
C      SUBROUTINE PRODBER(EB3DM,PIBER)

```

```

C      PI= (PRODUIT) R: RETOUR C.A.D DE IELEM=NELEM,1,-1

```

```

C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```

```

C      DIMENSION EB3DM(8,8,10),PIBER(8,8)

```

```

C      CETTE SUBROUTINE EFFECTUE LE PRODUIT DES MATRICES Be
C      ETAPE RETOUR

```

```

C      COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
C      BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
C      NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
C      COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF
C      COMMON/TABDIM/COORD(100,2),PRESC(30),ATETA(8),NOFIX(30),
C      LNODS(10,8),DIFFD(40),TETTD(40),NCODE(40),NOPRS(40,3)
C      COMMON/PROB/PRESS(40),NEAST(40),NELSP(10),SOURC(10)
C      COMMON/WORK/ELCOD(2,8),SHAPE(8),DERIV(2,8),CARTD(2,8),POSGP(4),
C      WEIGP(4),GPCOD(2,4),EDIFF(8,8),ECAPA(8,8),ECAPD(8,8),
C      ECAP1(8,8),ELFOG(10,8),CAPAR(8,8),XDOTO(8),FMDTO(8),
C      TELFO(10,8),ELFOQ(10,8),TETAD(8),TETAT(8,36001),DTETO(8),
C      DTETT(8,36001),TETES(8,36001),TMPES(100),ECAPR(8,8),
C      TETFP(8),TEMPS(100),EFNPG(10,8),TETFF(8,36001),TETAR(8),
C      TETFR(8),TETAS(8,36001),TETAP(8),ECAMR(8,8),TETPP(8),
C      TETDA(8,36001),TETDF(8,36001),EFNPP(8)
C      COMMON/ALGO/AMATR(8,8),BMATR(8,8),XAXBM(8,8),BVECT(8),XMATV(8),
C      MATID(8,8),CINVM(8,8),CDMAT(8,8),CDCMT(8,8),
C      EBMAP(8,8),EBMAT(8,8),EAMAP(8,8),EAMAT(8,8),
C      EA3DM(8,8,10),PIBEA(8,8),
C      PIAEA(8,8),PIAER(8,8),XAEAR(8,8),XBEAR(8,8)

```

```

C      IELEM = NELEM

```

```

C      INITIALISATION DE LA MATRICE PIBER

```

```

C      DO 4 IEVAB = 1,NEVAB

```



```

      DO 4 JEVAB = 1,NEVAB
      PIBER(IEVAB,JEVAB) = 0.0
C
C
5 CALL PRBMT3DR(EB3DM,PIBER,IELEM)
C
      IELEM = IELEM - 1
      IF (IELEM.LT.2) THEN
          GO TO 40
      ELSE
          GO TO 5
      ENDIF
40 RETURN
END
-----
      SUBROUTINE PRODAEA(EA3DM,PIAEA)
C
C
      PI= (PRODUIT) A: ALLER C.A.D DE IELEM=1,NELEM
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION EA3DM(8,8,10),PIAEA(8,8)
C
C
      CETTE SUBROUTINE EFFECTUE LE PRODUIT DES MATRICES Ae
      ETAPE ALLER
C
      COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
      BETAC,TETAI,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
      NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
      COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF
      COMMON/TABDIM/COORD(100,2),PRESC(30),ATETA(8),NOFIX(30),
      LNODS(10,8),DIFFD(40),TETTD(40),NCODE(40),NOPRS(40,3)
      COMMON/PROB/PRESS(40),NEAST(40),NELSP(10),SOURC(10)
      COMMON/WORK/ELCOD(2,8),SHAPE(8),DERIV(2,8),CARTD(2,8),POSGP(4),
      WEIGP(4),GPCOD(2,4),EDIFF(8,8),ECAPA(8,8),ECAPD(8,8),
      ECAPI(8,8),ELFOG(10,8),CAPAR(8,8),XDOTO(8),FMDTO(8),
      TELFO(10,8),ELFOQ(10,8),TETAD(8),TETAT(8,36001),DTETO(8),
      DTETT(8,36001),TETES(8,36001),TMPES(100),ECAPR(8,8),
      TETFP(8),TEMPS(100),EFNPG(10,8),TETFF(8,36001),TETAR(8),
      TETFR(8),TETAS(8,36001),TETAP(8),ECAMR(8,8),TETPP(8),
      TETDA(8,36001),TETDF(8,36001),EFNPP(8)
      COMMON/ALGO/AMATR(8,8),BMATR(8,8),XAXBM(8,8),BVECT(8),XMATV(8),
      MATID(8,8),CINVM(8,8),CDMAT(8,8),CDCMT(8,8),
      EBMAP(8,8),EBMAT(8,8),EAMAP(8,8),EAMAT(8,8),
      EB3DM(8,8,10),PIBEA(8,8),PIBER(8,8),
      PIAER(8,8),XAEAR(8,8),XBEAR(8,8)
C
      IELEM = 1
C
C
      INITIALISATION DE LA MATRICE PIAEA
C
      DO 4 IEVAB = 1,NEVAB
      DO 4 JEVAB = 1,NEVAB
      PIAEA(IEVAB,JEVAB) = 0.0
C
C
5 CALL PRAMT3DA(EA3DM,PIAEA,IELEM)
C
      IELEM = IELEM + 1
      IF (IELEM.GT.NELEM-1) THEN
          GO TO 40
      ELSE
          GO TO 5
      ENDIF

```


ENDIF
40 RETURN
END

SUBROUTINE PRODAER(EA3DM,PIAER)

PI= (PRODUIT) R: RETOUR C.A.D DE IELEM=NELEM,1,-1

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION EA3DM(8,8,10),PIAER(8,8)

CETTE SUBROUTINE EFFECTUE LE PRODUIT DES MATRICES Ae
ETAPE RETOUR

COMMON/CONTRO/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NDIME,NGAUS,NVFIX,NEVAB,
BETAC,TETA1,PATMP,EPSIP,PAMIN,NITEM,MTETD,TMPTT,NEDGE,
NODEG,NEASS,NPTMP,GAMAD,NSOUR,NKOCV,INTER,NCOCH,ELESP,NELUN
COMMON/UN/PAMAX,TTSAT,ETHIC,ZDIME,NCDEF
COMMON/TABDIM/COORD(100,2),PRESC(30),ATETA(8),NOFIX(30),
LNODS(10,8),DIFFD(40),TETTD(40),NCODE(40),NOPRS(40,3)
COMMON/PROB/PRESS(40),NEAST(40),NELSP(10),SOURC(10)
COMMON/WORK/ELCOD(2,8),SHAPE(8),DERIV(2,8),CARTD(2,8),POSGP(4),
WEIGP(4),GPCOD(2,4),EDIFF(8,8),ECAPA(8,8),ECAPD(8,8),
ECAPI(8,8),ELFOG(10,8),CAPAR(8,8),XDOTO(8),FMDTO(8),
TELFO(10,8),ELFOQ WEIGP(4),GPCOD(2,4),EDIFF(8,8),E
ECAPI(8,8),ELFOG(10,8),CAPAR(8,8),XDOTO(8),FMDTO(8),
TELFO(10,8),ELFOQ(10,8),TETAD(8),TETAT(8,36001),DTETO(8),
DTETT(8,36001),TETES(8,36001),TMPES(100),ECAPR(8,8),
TETFP(8),TEMPS(100),EFNPG(10,8),TETFF(8,36001),TETAR(8),
TETFR(8),TETAS(8,36001),TETAP(8),ECAMR(8,8),TETPP(8),
TETDA(8,36001),TETDF(8,36001)
COMMON/ALGO/AMATR(8,8),BMATR(8,8),XAXBM(8,8),BVECT(8),XMATV(8),
MATID(8,8),CINVM(8,8),CDMAT(8,8),CDCMT(8,8),
EBMAP(8,8),EBMAT(8,8),EAMAP(8,8),EAMAT(8,8),
EB3DM(8,8,10),PIBEA(8,8),PIBER(8,8),
PIAEA(8,8),XAEAR(8,8),XBEAR(8,8)

IELEM = NELEM

INITIALISATION DE LA MATRICE PIAER

DO 4 IEVAB = 1,NEVAB

DO 4 JEVAB = 1,NEVAB

4 PIAER(IEVAB,JEVAB) = 0.0

5 CALL PRAMT3DR(EA3DM,PIAER,IELEM)

IELEM = IELEM - 1

IF (IELEM.LT.2) THEN

GO TO 40

ELSE

GO TO 5

ENDIF

40 RETURN

END

FIN DU LISTING