VIBRATIONS FLEXIONNELLES ET LONGITUDINALES DES POUTRES PROFONDES

Par
Abderrahim HOUMAT
PhD Université de Californie
Enseignant, Institut de Génie Civil, Université de Tlemcen

Résumé

Une méthode de Fourier est présentée pour la détermination des fréquences naturelles exactes pour les vibrations longitudinales et flexionnelles d'une poutre profonde dont les surfaces limites sont libres de traction. La méthode converge vers les solutions exactes en utilisant un nombre très petit de termes. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux de la théorie des barres pour les vibrations longitudinales et avec ceux des théories de Timoshenko et de Bernoulli-Euler pour les vibrations flexionnelles. Les comparaisons montrent que les théories des barres et de Bernoulli-Euler sont en accord avec la méthode de Fourier dans le seul cas des modes fondamentaux alors que la théorie de Timoshenko est en accord avec la méthode de Fourier dans tous les cas.

Mots clés : poutre profonde - vibration - méthode de fourier.

1 INTRODUCTION

Une méthode de Fourier pour la détermination des fréquences naturelles pour les vibrations longitudinales et flexionnelles d'une poutre élastique isotrope profonde est développée. La méthode converge rapidement vers les solutions exactes. Cette méthode était appliquée par Hutchinson et Zillmer [1] aux vibrations d'un parallélépipède avec beaucoup de succès.

Le problème de vibrations flexionnelles d'une poutre en fonction des équations d'élasticité a été examiné par Hutchinson et Zillmer [2]. Leur méthode de calcul consistait à former en premier lieu une solution de l'état de déformation plane à partir de solutions exactes et à satisfaire les conditions aux limites sur les surfaces latérales de la poutre. Les conditions aux limites sur les autres surfaces étaient satisfaites dans un sens relaxé de Saint-Venant, c'est-à-dire que les moments et efforts tranchants étaient considérés à la place des contraintes. La méthode était ensuite convertie à une solution d'un état de contrainte plane par un simple changement de constantes élastiques. Les comparaisons avec la théorie d'élasticité tri-dimensionnelle montraient que la méthode développée et la théorie de Timoshenko avaient le même intervalle d'application.

2 FORMULATION

Dans cette analyse tous les symboles sont sans dimension. Les déplacements : u et v, les coordonnées x et y, et les dimensions globales sont rendus sans dimension en les divisant par la hauteur 2a de la poutre. Les contraintes sont rendues sans dimension en les divisant par le module de cisaillement. La fréquence Ω est rendue sans dimension en la multipliant par 2a et en la divisant par la vitesse d'onde de cisaillement. Les nombres d'onde α, β, δ et γ sont rendus sans dimension en les multipliant par 2a. La dépendance du temps est supprimée en supposant que les déplacements varient sinusoïdalement avec le temps.

Le problème est formulé en fonction d'une série de solutions exactes des équations différentielles de l'état de contrainte plane en coordonnées cartésiennes. Les formes de ces solutions sont données dans le tableau 1. La constante ν est le coefficient de Poisson.

	Forme 1	Forme 1
u	$\alpha \begin{Bmatrix} -\sin(\alpha x) \\ \cos(\alpha x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(\beta y) \\ \cos(\beta y) \end{Bmatrix}$	$\alpha \begin{Bmatrix} \sin(\delta x) \\ \cos(\delta x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin(\gamma y) \\ \cos(\gamma y) \end{Bmatrix}$
v	$\beta \begin{Bmatrix} \cos(\alpha x) \\ \sin(\alpha x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\beta y) \\ -\sin(\beta y) \end{Bmatrix}$	$-\delta \begin{Bmatrix} \cos(\delta x) \\ -\sin(\delta x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\gamma y) \\ \sin(\gamma y) \end{Bmatrix}$
σ_x	$-(\nu\Omega^2 + 2\alpha^2) \begin{Bmatrix} \cos(\alpha x) \\ \sin(\alpha x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(\beta y) \\ \cos(\beta y) \end{Bmatrix}$	$2\delta\gamma \begin{Bmatrix} \cos(\delta x) \\ -\sin(\delta x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin(\gamma y) \\ \cos(\gamma y) \end{Bmatrix}$
σ_y	$-(\nu\Omega^2 + 2\beta^2) \begin{Bmatrix} \cos(\alpha x) \\ \sin(\alpha x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(\beta y) \\ \cos(\beta y) \end{Bmatrix}$	$-2\delta\gamma \begin{Bmatrix} \cos(\delta x) \\ -\sin(\delta x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin(\gamma y) \\ \cos(\gamma y) \end{Bmatrix}$
τ_{xy}	$2\alpha\beta \begin{Bmatrix} -\sin(\alpha x) \\ \cos(\alpha x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\beta y) \\ -\sin(\beta y) \end{Bmatrix}$	$(\delta^2 - \gamma^2) \begin{Bmatrix} \sin(\delta x) \\ \cos(\delta x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\gamma y) \\ \sin(\gamma y) \end{Bmatrix}$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1-\nu}{2}\Omega^2 \; ; \; \delta^2 + \gamma^2 = \Omega^2$$

Tableau 1 : Solutions des équations différentielles de l'état de contrainte plane en coordonnées cartésiennes.

Les dimensions et les coordonnées utilisées sont montrées dans la figure 1. En centrant le système de coordonnées il est nécessaire de considérer seulement un quart de la poutre comme le montre la figure 1.

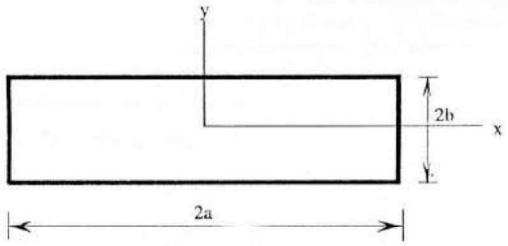


Figure 1 : Coordonnées et dimensions de la poutre.

Les conditions aux limites sont exprimées comme suit :

$$\tau_{xy}(a, y) = 0 \qquad (1)$$

$$\tau_{xy}(x, b) = 0 \qquad (2)$$

$$\sigma_x(a, y) = 0 \qquad (3)$$

$$\sigma_y(x, b) = 0 \qquad (4)$$

La solution est formée en prenant des combinaisons linéaires des deux formes du tableau 1. Il existe quatre combinaisons possibles des deux termes dans chacun des deux groupes de crochets. Chacun des quatre cas possibles correspond à un mode de vibration longitudinale si le déplacement u est une fonction paire de y ou un mode de vibration flexionnelle si le déplacement v est une fonction paire de y. Aussi, chaque cas peut être celui d'un mode symétrique si le déplacement correspondant est une fonction paire de x ou un mode antisymétrique si le déplacement est une fonction impaire de x. En raison de la complexité du développement des équations et la similitude entre les quatre cas, le développement des équations dans cet article sera limité à un seul cas. Le cas considéré est formé à partir du terme supérieur dans chacun des deux groupes de crochets et correspond au mode symétrique de vibration flexionnelle. Des combinaisons linéaires des deux types de solution sont choisies en deux séries. l'expression de la contrainte de cisaillement τ_{xy} est donnée ci-dessous :

$$\tau_{xy} = \Sigma A_i \tau_{xyAi} + \Sigma B_j \tau_{xyBj} \qquad (5)$$

où :

$$\tau_{xyAi} = \left[-D_1 2\alpha_{Ai}^2 \cos(\beta_{Ai} y) + D_2 \left(\alpha_{Ai}^2 - \delta_{Ai}^2\right) \cos\left(\delta_{Ai} y\right) \right] \frac{\sin\left(\alpha_{Ai} x\right)}{\alpha_{Ai}} \qquad (6)$$

$$\tau_{xyBj} = \left[-D_3 2\beta_{Bj}^2 \frac{\sin\left(\beta_{Bj} x\right)}{\beta_{Bj}} + D_4 \left(\delta_{Bj}^2 - \alpha_{Bj}^2\right) \frac{\sin\left(\delta_{Bj} x\right)}{\delta_{Bj}} \right] \cos\left(\alpha_{Bj} y\right) \qquad (7)$$

Le premier terme de la série A est celui de la forme 1 du tableau 1 et le second terme est celui de la forme 2 avec δ et γ remplacées par α et δ respectivement. Le premier terme de la série B est celui de la forme 1 du tableau 1 avec α et β remplacées par β et α respectivement et le second terme est celui de la forme 2 avec δ et γ remplacées par δ et α respectivement. Les autres termes de contraintes et de déplacements sont formés de la même manière.

Les constantes D_1 - D_4 et les valeurs de α sont choisies de sorte que les conditions aux limites (1) et (2) soient identiquement satisfaites.

Pour la série A le nombre d'onde α est choisi comme suit :

$$\alpha_{Ai} = \frac{(i-1)\pi}{a} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, NX \tag{8}$$

Pour la série B le nombre d'onde α est choisi comme suit :

$$\alpha_{Bj} = \frac{(2j-1)\pi}{2b} \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, NY \tag{9}$$

Les constantes D_1 à D_4 sont choisies comme suit :

$$D_1 = \left(\alpha_{Ai}^2 - \delta_{Ai}^2\right) \cos\left(\delta_{Ai} b\right) \tag{10}$$

$$D_2 = 2\alpha_{Ai}^2 \cos\left(\beta_{Ai} b\right) \tag{11}$$

$$D_3 \left(\delta_{Bj}^2 - \alpha_{Bj}^2\right) \frac{\sin\left(\delta_{Bj} a\right)}{\delta_{Bj}} \tag{12}$$

$$D_4 = 2\beta_{Bj}^2 \frac{\sin\left(\beta_{Bj} a\right)}{\beta_{Bj}} \tag{13}$$

Les conditions aux limites (3) et (4) sont satisfaites par orthogonalité.

L'équation (3) est approximativement satisfaite en posant :

$$\int_o^b \sigma_x (a,y) \sin\left(\alpha_{Bj} y\right) dy = 0 \tag{14}$$

où α_{Bj} est définie par l'équation (9). Après intégration, la forme suivante est obtenue :

$$\sum_{i=1}^{NX} a_{ji} A_i + b_j B_j = 0 ; \quad j = 1, 2, 3, \ldots, NY \tag{15}$$

Les coefficients a_{ji} et b_j sont comme suit :

$$a_{ji} = \left[\frac{\alpha_{Ai}^2 - \delta_{Ai}^2}{\beta_{Ai}^2 - \alpha_{Bj}^2} \left(\nu\Omega^2 + 2\alpha_{Ai}^2\right) - \frac{4\alpha_{Ai}^2 \delta_{Ai}^2}{\delta_{Ai}^2 - \alpha_{Bj}^2} \right]$$

$$(-1)^{i+j} \cos\left(\beta_{Ai} b\right) \cos\left(\delta_{Ai} b\right) \tag{16}$$

$$b_j = \left[\left(\alpha_{Bj}^2 - \delta_{Bj}^2\right) \left(\nu\Omega^2 + 2\beta_{Bj}^2\right) \frac{\sin\left(\delta_{Bj} a\right)}{\delta_{Bj} a} \cos\left(\beta_{Ai} a\right) \right.$$

$$\left. - 4\alpha_{Bj}^2 \beta_{Bj}^2 \frac{\sin\left(\beta_{Bj} a\right)}{\beta_{Bj} a} \cos\left(\delta_{Ai} a\right) \right] \frac{ab}{2\alpha_{Bj}} \tag{17}$$

L'équation (4) est approximativement satisfaite en posant :

$$\int_o^a \sigma_y (x, b) \cos\left(\alpha_{Ai} x\right) dx = 0 \tag{18}$$

où α_{Ai} est définie par l'équation (8). Après intégration, la forme suivante est obtenue :

$$\bar{a}_i A_i + \sum_{j=1}^{NY} \bar{b}_{ij} B_j = 0 ; i = 1, 2, 3, \ldots, NX \tag{19}$$

Les coefficients $\bar{b}_{ij}$ et $\bar{a}_i$ sont comme suit

$$\bar{b}_{ij} = \left[\frac{\delta_{Bj}^2 - \alpha_{Bj}^2}{\alpha_{Ai}^2 - \beta_{Bj}^2} \left(\nu\Omega^2 + 2\alpha_{Bj}^2\right) + \frac{4\alpha_{Bj}^2 \delta_{Bj}^2}{\delta_{Bj}^2 - 2\alpha_{Ai}^2} \right]$$

$$(-1)^{i+j} \frac{a^2 \beta_{Bj}^2}{\alpha_{Bj}} \frac{\sin\left(\beta_{Bj} a\right)}{\beta_{Bj} a} \frac{\sin\left(\delta_{Bj} a\right)}{\delta_{Bj} a} \tag{20}$$

$$\bar{a}_i = \left| \left(\delta_{Ai}^2 - \alpha_{Ai}^2\right) \left(\nu\Omega^2 + 2\beta_{Ai}^2\right) \frac{\sin\left(\beta_{Ai} b\right)}{\beta_{Ai} b} \cos\left(\delta_{Ai} b\right) \right.$$

$$\left. + 4\alpha_{Ai}^2 \delta_{Ai}^2 \frac{\sin\left(\delta_{Ai} b\right)}{\delta_{Ai} b} \cos\left(\beta_{Ai} b\right) \right| \frac{ab}{2} \tag{21}$$

Les équations (15) et (19) sont écrites sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} [a] & [b] \\ [\bar{a}] & [\bar{b}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A\} \\ \{B\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{22}$$

La notation [ ] indique une matrice diagonale. L'ordre N de la matrice carrée dans l'équation (22) est comme suit :

$$N = NX + NY \tag{23}$$

Les coefficients de la matrice dans l'équation (22) sont fonctions des dimensions, propriétés et fréquences naturelles. Pour des dimensions choisies, les fréquences naturelles sont celles qui annulent le déterminant de la matrice dans l'équation (22).

3 RESULTATS

Les équations pour les quatre cas, c'est-à-dire pour les modes longitudinaux symétriques et antisymétriques et les modes flexionnels symétriques et antisymétriques de la poutre ont été programmées sur micro-ordinateur.

Le problème considéré est celui d'une poutre profonde de longueur 2a = 5 et de hauteur 2b = 1 et dont le coefficient de Poisson ν = 0.3. Les tableaux 2 et 3 montrent la convergence de la méthode de Fourier en fonction du nombre de termes longitudinaux NX et le

nombre de termes latéraux NY pour les paramètres de fréquence Ω correspondant aux trois premiers modes flexionnels symétriques et antisymétriques respectivement et comparent les résultats obtenus avec ceux des théories de Timoshenko avec K = 0.85 et de Bernoulli-Euler. Les tableaux 4 et 5 montrent la convergence de la méthode de Fourier en fonction des nombres de termes NX et NY pour les paramètres de fréquence Ω correspondant aux trois premiers modes longitudinaux symétriques et antisymétriques respectivement et comparent les résultats obtenus avec ceux de la théorie des barres. La relation utilisée pour le choix des nombres de termes NX et NY est la suivante :

$$NX.b = NY.a \qquad (24)$$

Les tableaux 2 à 5 montrent clairement que la méthode de Fourier converge rapidement vers les solutions exactes des nombres très petits de termes. Les Tableaux montrent aussi que les théories des barres et de Bernoulli-Euler sont en accord avec la méthode de Fourier dans le cas des modes fondamentaux seulement. Par contre, la théorie de Timoshenko est en accord avec la méthode de Fourier dans le cas des trois modes.

Ω	Convergence de la méthode de Fourier en fonction des nombres de termes NX et NY					Théorie de Timoshenko	Théorie de Bernoulli-Euler
	10.2	15.3	20.4	25.5	30.6		
1	0.3781	0.3732	0.3715	0.3707	0.3703	0.3688	0.4165
2	1.4533	1.4487	1.4471	1.4463	1.4459	1.4381	2.2510
3	2.6300	2.6235	2.6235	2.6227	2.6223	2.6050	5.5588

Tableau 2 : Paramètres de fréquences Ω des trois premiers modes flexionnels symétriques.

Ω	Convergence de la méthode de Fourier en fonction des nombres de termes NX et NY					Théorie de Timoshenko	Théorie de Bernoulli-Euler
	10.2	15.3	20.4	25.5	30.6		
1	0.8743	0.8698	0.8682	0.8675	0.8671	0.8635	1.1482
2	2.0476	2.0432	2.0416	2.0408	2.0404	2.0271	3.7211
3	3.0828	3.0804	3.0795	3.0791	3.0789	3.0826	7.7639

Tableau 3 : Paramètres de fréquences Ω des trois premiers modes flexionnels antisymétriques.

Ω	Convergence de la méthode de Fourier en fonction des nombres de termes NX et NY						Théorie des barres
	5.1	10.2	15.3	20.4	25.5	30.6	
1	2.0128	0.0123	2.0122	2.0122	2.0122	2.0121	2.0262
2	3.8540	3.8451	3.8435	3.8429	3.8427	3.8425	4.0525
3	5.0959	4.8358	4.8232	4.8194	4.8178	4.8169	5.0656

Tableau 4 : Paramètres de fréquences Ω des trois premiers modes longitudinaux symétriques.

Ω	Convergence de la méthode de Fourier en fonction des nombres de termes NX et NY						Théorie des barres
	5.1	10.2	15.3	20.4	25.5	30.6	
1	1.0116	1.0116	1.0116	1.0116	1.0116	1.0116	1.0131
2	2.9824	2.9798	2.9794	2.9793	2.9792	2.9792	3.0394
3	5.7403	5.6984	5.6969	5.6965	5.6962	5.6961	6.0788

Tableau 5 : Paramètres de fréquences Ω des trois premiers modes longitudinaux antisymétriques.

4 CONLCUSION

La méthode de Fourier présentée dans cet article donne d'excellents résultats pour les vibrations longitudinales et flexionnelles des poutres profondes dont les surfaces limites sont libres de traction. La formulation et la programmation de cette méthode ne sont pas très faciles mais le nombre de données exigées est très petit. Les résultats obtenus montrent que la méthode de Fourier converge rapidement vers les solutions exactes en utilisant des nombres très petits de termes. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux de la théorie des barres pour les modes longitudinaux et avec ceux des théories de Timoshenko et de Bernoulli-Euller pour les modes flexionnels. Les comparaisons montrent que les théories des barres et de Bernoulli-Euler sont en accord avec la méthode de Fourier dans le seul cas des modes fondamentaux alors que la théorie de Timoshenko est en accord avec la méthode de Fourier dans tous les cas. La méthode peut être formulée pour d'autres types de conditions aux limites. Elle peut servir comme une base de comparaison pour les méthodes numériques approchées telles que la méthode des éléments finis et la méthode des éléments de frontière ❷

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.R Hutchinson & S.D Zillmer : "*Vibration of a free rectangular parallelepiped*". Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, pp. 123-130,1983.

[2] J.R Hutchinson & S.D Zillmer : "*On the transverse vibration of beams of rectangular cross-section*". Journal of Applied Mechanics, Vol. 53, pp. 39-44, 1986.