# RIGIDITE DE GAUCHISSEMENT, CENTRE DE TORSION DE POUTRES A SECTION EN DOUBLE Té MINCE, AVANT ET APRES FISSURATION DE FLEXION

Par
**Naceur Eddine HANNACHI**
Maître de Conférences, Université de Tizi Ouzou

*Résumé*

*La vérification de stabilité, dans l'optique des méthodes modernes de calcul à l'état limite ultime, doit faire intervenir de la façon la plus exacte possible le comportement réel des matériaux et les caractéristiques mécaniques évolutives de la structure.*

*A travers la confrontation d'une théorie "aménagée" proposée dans ce document et de résultats issus de l'expérimentation [1] et [2], on peut proposer une démarche d'évaluation de la rigidité de gauchissement et tirer des enseignements importants sur la position du centre de torsion hors du domaine linéaire (fissuration de flexion).*

**Mots clés : centre de torsion • rigidité de gauchissement • fissuration • instabilité.**

## 1 INTRODUCTION

Les poutres à profil mince ouvert sont très souvent sujettes à une sollicitation combinée de flexion et torsion.

Si les calculs des effets dus à la flexion ne posent pas de problème majeur, l'évaluation des effets introduits par la sollicitation de torsion n'est pas toujours facile.

Par ailleurs, si pour les éléments à section massive ou tubulaire il est possible de négliger les déplacements dus au couple de torsion (qui accompagnent nécessairement, au second ordre, la flexion déviée) et de généraliser les méthodes de calcul applicables au problème du flambement plan, pour les poutres dont la section est un profil mince ouvert (pile de pont, poutres préfabriquées, etc.) il n'est plus possible de négliger les effets de la torsion pour l'étude de la stabilité d'ensemble.

## 2 REALISATION DES ESSAIS "OE 1"

### 2.1 Principe du dispositif d'essai "OE 1"

Ce dispositif est représenté à la figure 1.

La poutre est posée sur deux appuis A et B (un couteau à une extrémité, un rouleau à l'autre) distants de 3.90 m.

Elle est sollicitée :

- ✔ En flexion, par deux vérins verticaux agissant en porte-à-faux à 0.10 m de l'extrémité de la poutre. Ces forces de flexion sont appliquées à l'extremité des porte-à-faux, de sorte que leur excentricité éventuelle par rapport au plan moyen vertical de la poutre n'engendre un couple de torsion que dans les porte-à-faux, et pas dans la portée centrale de la poutre.
- ✔ En torsion, dans la partie médiane de la poutre, par l'intermédiaire d'un cadre métallique serré par des tiges précontraintes sur le gabarit du corps d'épreuve (Figure 2).

Deux vérins verticaux exerçant des forces égales et opposées (avec des bras de levier égaux et opposés par rapport au plan moyen de la poutre) agissent de part et d'autre de la poutre, en appliquant leurs efforts directement sur le cadre, par l'intermédiaire de leviers réducteurs.

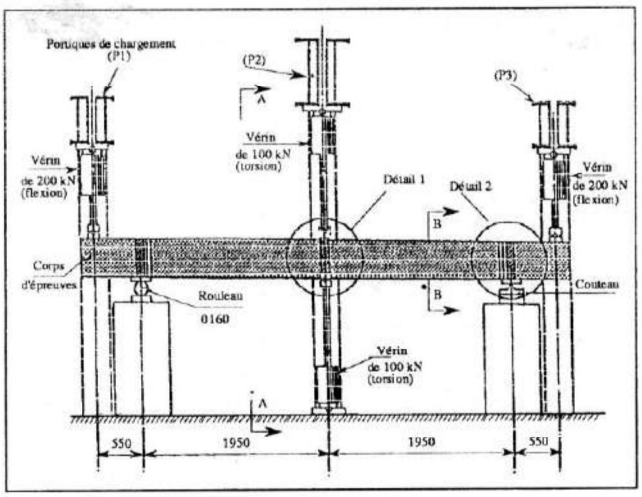



**Figure 1 :** Elévation latérale d'ensemble du dispositif d'essai.

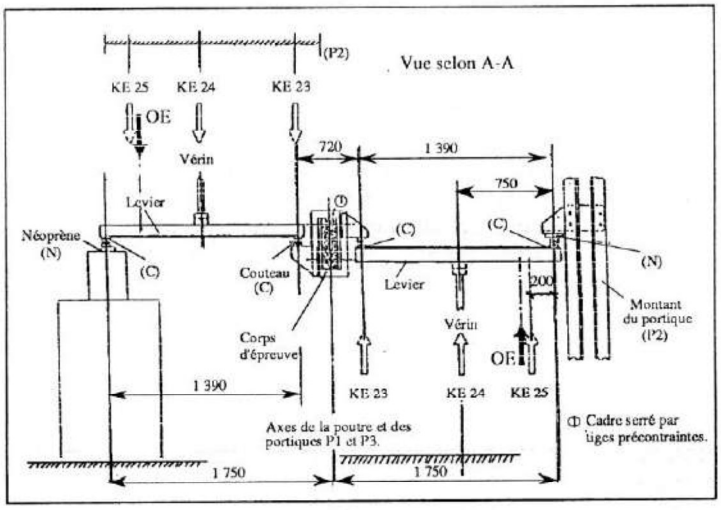



**Figure 2 :** Dispositif d'essai (détail) ; leviers de chargement.

La mesure de ces deux forces et des bras de levier permet de connaître exactement le couple appliqué.

A l'autre extrémité, ce bras porte sur un dynamomètre qui permet de contrôler, par mesure de la réaction d'appui, que le degré d'encastrement est le même aux deux extrémités de la poutre, donc que son comportement est symétrique par rapport à la section médiane.

Les conditions d'appui à la base du dynamomètre sont de sorte que la rotation de flexion est libre (Figure 3).

La réponse mécanique au chargement appliqué et aux conditions d'appui fournies est illustrée sur la figure 4.

### 2.2 Chargement et mesures

Les mesures sont effectuées dans plusieurs sections droites de la poutre. Sous chargement de flexion pure d'une part, et de torsion pure d'autre part ; ces mesures permettent d'évaluer les constantes classiques de l'élasticité linéaire : module de déformation longitudinale, coefficient de Poisson, etc.

La poutre est d'abord chargée en flexion : trois niveaux de flexion distincts A, B et C. A chacun, nous appliquons alors la sollicitation de torsion (plusieurs niveaux croissants de chargement). Dans chacune des phases de flexion, et à niveaux de torsion fixés, les mesures de déformations sont relevées automatiquement par une centrale d'acquisition de données.

### 2.3 Ferraillage de la poutre d'essai

a) <u>En section courante (Figure 5)</u> :

Le ferraillage de la zone courante comprend des armatures longitudinales :

- au niveau des ailes supérieure et inférieure : deux lits supérieur et inférieur symétriques de 5 Torsid 10 chacun, filants sur toute la longueur de la poutre d'essai.
- au niveau de l'âme : 6 barres ø 4 crantées, réparties symétriquement sur la hauteur de la poutre (espacées de 10 cm, 2 x 3 barres) et filantes sur toute la longueur.

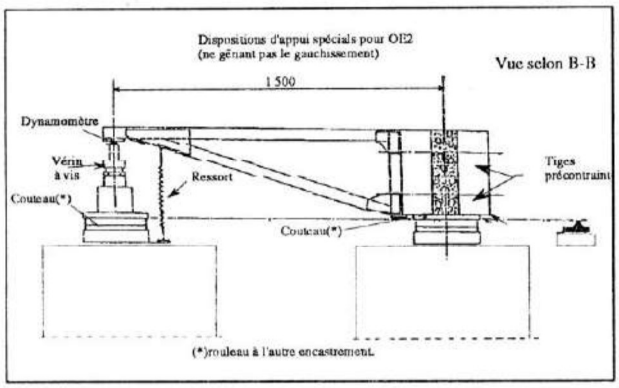



**Figure 3 :** Dispositif d'essai (détail) ; encastrement en torsion.

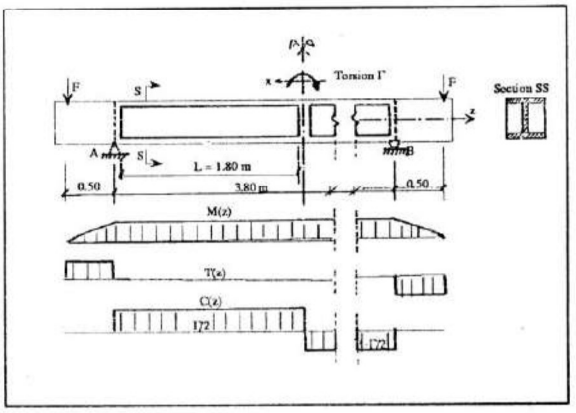



**Figure 4 :** Réponse mécanique au chargement appliqué.

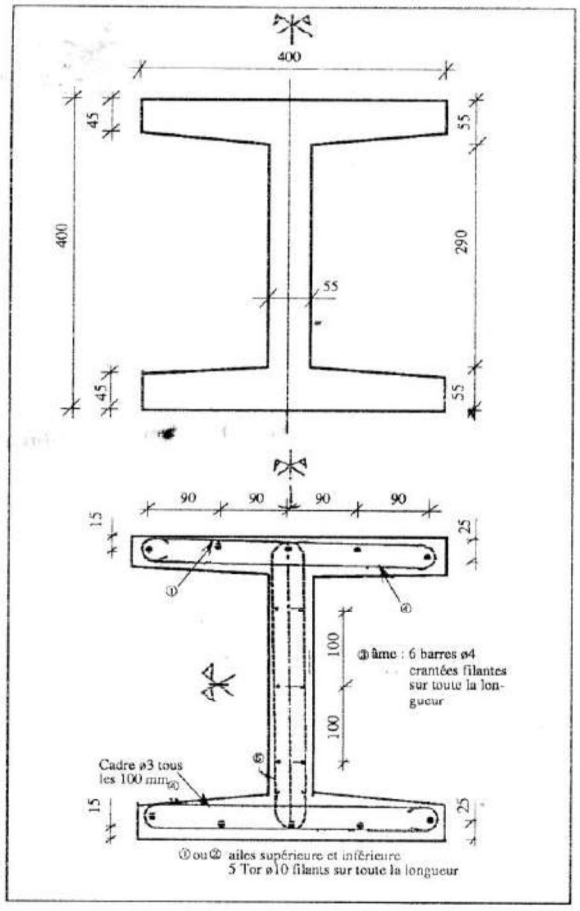



**Figure 5 :** Section courante OE1.

Les armatures transversales disposées correspondent au minimum nécessaire pour éviter que le corps d'épreuve ne présente de rupture fragile en torsion pure. Il s'agit de cadres ø 3 à l'espacement uniforme de 0.10 m.

b) Section d'about

Le ferraillage des abouts est représenté sur la figure 6.

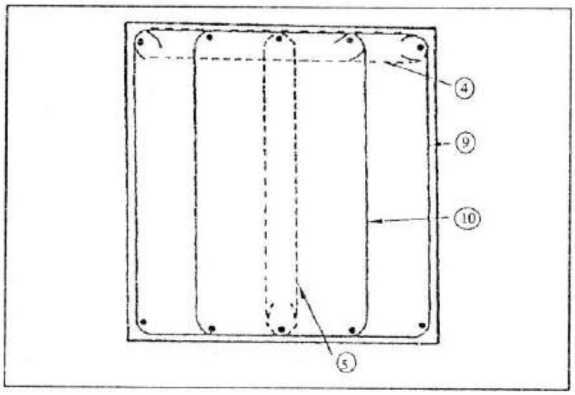



**Figure 6 :** Poutre d'essai OE1 ; section d'about.

## 3 RAPPEL DE L'EQUATION GENERALE DE LA TORSION MIXTE

Rappelons qu'il y a torsion mixte dans les sections où le couple est équilibré partiellement en torsion pure, partiellement en gauchissement gêné.

### 3.1 Equation générale

La rotation de torsion totale étant $\theta = \theta_1 + \theta_2$, on a :

- d'une part, l'équation relative au couple de torsion pure $C_1$ :

$$d\theta = - \frac{C_1}{GK} \qquad (1)$$

- d'autre part, l'équation relative au bimoment B et au couple de torsion $C_2$, ($C_2$ : partie du couple équilibrée en gauchissement gêné) :

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = \frac{B}{EK_1} - \frac{1}{GK_2} \frac{dC_2}{dz} \qquad (2)$$

Dans l'équation (2), les valeurs de $C_2$ et de B, qui résultent d'états d'auto-contraintes, ne sont pas directement calculables à partir des forces extérieures ; elles dépendent de la rotation $\theta$ cherchée, dont on connaît par ailleurs la relation (1) avec le couple de torsion pure $C_1$.

Compte tenu de ce couple total $C = C_1 + C_2$, qui est une grandeur connue en fonction des forces et de $C_2 = dB/dz$, on peut éliminer $C_1$ et $C_2$ entre les équations (1) et (2).

On obtient alors l'équation générale :

$$EK_1 \frac{d^3\theta}{dz^3}(z) - GK \frac{d\theta}{dz}(z) = C - \frac{EK_1}{GK_2} \frac{d^2C_2}{dz^2} \qquad (3)$$

### 3.2 Equation simplifiée

Généralement, on néglige la rotation $\theta_2$ (correspondant aux distorsions dues à $C_2$) devant la rotation $\theta_1$ (à laquelle correspond le bimoment B).

$$\frac{d^2C_2}{dz^2} \simeq 0$$

On obtient alors l'équation suivante :

$$EK_1 \frac{d^3\theta}{dz^3}(z) - GK \frac{d\theta}{dz}(z) = C(z) \qquad (4)$$

Cette équation est intégrable sans difficulté, dans le cas où on connaît une solution particulière de l'équation avec second membre.

La résolution de cette équation se fait aisément en connaissant les conditions aux limites de la pièce étudiée. Toutefois, dans une section quelconque, l'évaluation des déformations engendrées par le gauchissement gêné, des déformations de cisaillement et de rotation de torsion, fait appel à la connaissance des rigidités de torsion $\overline{GK}$ et de gauchissement $\overline{EK}_1$, avant et après fissuration de flexion. Le but de cette étude consiste à suggérer une approche du paramètre $\overline{EK}_1$ dans les domaines de l'élasticité à la fois linéaire et non-linéaire.

## 4 INERTIE DE GAUCHISSEMENT $K_1$

### 4.1 Evaluation de l'aire sectorielle $\Omega(x)$

On en déduit l'aire A (Figure 7) :

$$A = \frac{x}{2}\left(\frac{h}{2} - \frac{e}{2} - \frac{b}{2}\,\frac{e' - e}{b - e'}\right)$$

En posant

$$u = \frac{h}{2} - \frac{e}{2} - \frac{b}{2}\,\frac{e' - e}{b - e'}$$

$\Omega(x)$ s'écrit : $\Omega(x) = u\,x$

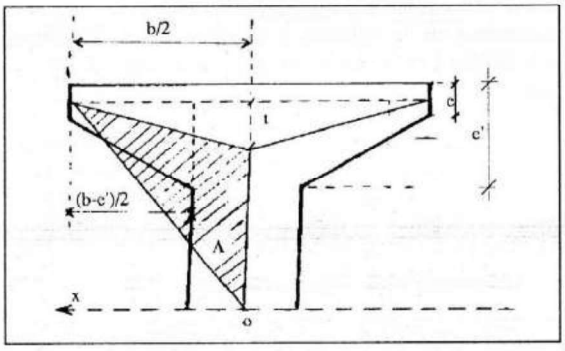



**Figure 7 :** Demi-section de la poutre.

### 4.2 Effet de l'épaisseur variable

$$x = 0 \rightarrow e(x) = e'$$
$$x = b/2 \rightarrow e(x) = e$$

et finalement : $e(x) = -2\,x\,\dfrac{(e' - e)}{b} + e'$

L'inertie de gauchissement est alors :

$$K_1 = \int_{(\Gamma)} (\Omega(s))^2\, e(s)\, ds \qquad (5)$$

Soit :

$$K_1 = 4\left[\int_0^{b/2}\left\{u^2 x^2\left[-2\,x\,(\frac{e' - e}{b}) + e'\right]\right\} dx\right]$$

On obtient alors :

$$K_1 = \frac{1}{24}(e' + 3e)\, b^3\left[\frac{h}{2} - \left(\frac{e}{2} + \frac{b}{2}\,\frac{e' - e}{b - e'}\right)\right]^2$$

Application numérique :

$$K_1 = 0.1494\ 10^{-4}\ m^6$$

### 4.3 Inertie de gauchissement (terme relatif à l'acier)

Le terme $(K_1)$ béton, peut être évalué de façon précise, en prenant en compte la variation de l'épaisseur. Cependant, pour l'évaluation de l'inertie globale de gauchissement ($K_1 = K_{1béton} + K_{1acier}$), il apparaît difficile de prendre en compte la contribution des armatures longitudinales (notée $K_{1a}$), du fait que la position des armatures ne coïncide pas toujours avec la ligne moyenne de la section de béton. En principe, il s'avère indispensable de savoir définir une moyenne de la section homogène.

Le problème étant assez délicat, il paraît possible (dans certains cas) d'envisager une projection de la position des armatures sur la ligne moyenne du béton (Figure 8).

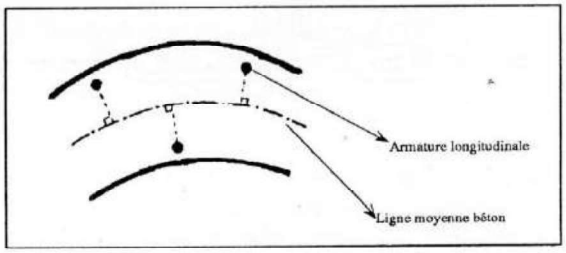



**Figure 8 :** Projection des armatures sur la ligne moyenne du béton.

Dans la mesure où cette distance "armature longitudinale - ligne moyenne du béton" est négligeable (cas des sections minces), il est possible d'entrevoir une simplification de l'expression générale de l'inertie de gauchissement $K_1$ de la section. Selon ces hypothèses, l'expression générale de l'inertie globale de gauchissement $K_1$ s'écrit :

$$K_1 = \underbrace{\int_{(\Gamma)} [\Omega(s)]^2\, e(s)\, ds}_{K_{1b}} + \underbrace{n \sum_i [\Omega(s_{ai})]^2\, A_i}_{K_{1a}} \qquad (6)$$

où :

$A_i$ : section de l'armature i
$s_{ai}$ : coordonnée sectorielle de l'armature i
n : coefficient d'équivalence

Sous une forme plus simplifiée (avec les remarques formulées précédemment), $K_{1a}$ peut s'écrire :

$$K_{1a} = 2\, J_a\, (h'/2)^2$$

avec :

$h' = h - \bar{e}$

$\bar{e}$ : épaisseur moyenne de l'aile

$J_a$ : inertie des armatures / y-y'

On obtient donc :

$K_{1\,a} = 389\,700$ n cm$^6$

$K_{1\,b} = 1\,494\ 10^4$ cm$^6$

d'où : $K_1 = 1\,640\ 10^4$ cm$^6$

soit 13 % d'écart par rapport à l'évaluation faite sans la contribution des armatures.

## 5 CENTRE DE TORSION, RIGIDITE DE GAUCHISSEMENT ET DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES DE LA SECTION EN ELASTICITE NON LINEAIRE

Il ressort des études faites en élasticité linéaire que la majorité des relations s'écrivent simplement lorsqu'on exprime les paramètres dans un système d'axes avec origine au centre de gravité (élasticité linéaire).

En élasticité non linéaire, les axes sont au centroïde G de la section.

### 5.1 Rappels de l'élasticité linéaire

Les coordonnées du centre de torsion T $(X_T, Y_T)$, avec un système d'axes ayant son origine au centre de gravité, sont données par :

$$X_T = \frac{1}{I_x} \int_o^L \Omega_G\, y\, dS \qquad Y_T = -\frac{1}{I_y} \int_o^L \Omega_G\, x\, dS \qquad (7)$$

avec :

$dS = e(s)\, ds$

G : centroïde de la section

P(s) = 0 : point origine

P(X(s), Y(s)) : point courant sur le contour du profil

Si l'aire sectorielle est définie avec le pôle principal T, des équations (7) on peut tirer :

$$\int_o^L \Omega_T\, y\, dS = \int_o^L \Omega_T\, x\, dS = 0 \qquad (8)$$

En élasticité non linéaire, on aurait des expressions similaires, mais qui prennent aussi en compte la variation du module de déformation E :

$$\int_o^L E\, \Omega_T\, y\, dS = \int_o^L E\, \Omega_T\, x\, dS = 0 \qquad (9)$$

**NOTA** : La valeur de $\Omega$ dépend du pôle et du poin origine sur le contour, mais pas des axes.

***Remarques***

- Quelle expression obtient-on avec un pôle quelcon que $I(x_o, y_o)$ ?

$$\Omega_I(s) = \int_o^s (x - x_o)\, dy - (y - y_o)\, dx$$

- Avec pôle en G ?

$$\Omega_G(s) = \int_o^s x\, dy - y\, dx \quad \text{(système d'axes en G)}$$

- Avec pôle en T ?

$$\Omega_T(s) = \int_o^s (x - X_T)\, dy - (y - Y_T)\, dx$$

- Avec pôle en T et axes en T ? (c'est-à-dire $X_T = Y_T = 0$)

$$\Omega_T(s) = \int_o^s x\, dy - y\, dx \quad \text{(quantité invariante)}$$

### 5.2 Elasticité non linéaire et introduction au gauchissement

Le déplacement élémentaire d'un point du contour dans le cas d'un profil mince ouvert, peut être évalué par la quantité dw, telle que :

$$dw = -\theta'\, d\Omega_T \qquad (10)$$

En "intégrant" ces déplacements, on obtient :

$$w(\sigma, z) = -(\Omega_T(s) + H)\, \theta'(z) \qquad (11)$$

La contrainte normale correspondante s'écrit :

$$n_1(s, z) = -E\, \frac{dw}{dz} \qquad (12)$$

où : $n_1(s, z) = E\, (\Omega_T(s) + H)\, \theta''(z) \qquad (13)$

Posons :

$$\Omega_T^*(s) = \Omega_T(s) + H$$

$n_1$ s'écrit alors :

$$n_1(s, z) = (\Omega_T^*(s))\ \theta''(z) \qquad (14)$$

Ecrivons alors que la résultante des contraintes normales sur la section est nulle, c'est-à-dire : $n_1 = 0$

Cela permet de déterminer la valeur de la constante H :

$$H = - \frac{\int_o^L \Omega_T(s)\, dS}{\int_o^L dS} = - \frac{\int_o^L \Omega_T(s)\, c(s)\, ds}{\int_o^L e(s)\, ds} \qquad (15)$$

De ce fait, on peut donc, ayant choisi un pôle P sur le contour de la section, définir un point origine $P_o$, tel que l'aire du secteur $TP_oP$ représente le double de la quantité $\Omega_T^*(s)$, c'est-à-dire :

$$2\,\Omega_T^*(s) = \text{Aire } TP_oP \qquad (16)$$

Par ailleurs, on peut introduire une condition supplémentaire, *indépendante du système d'axes choisi* :

$$\int_o^L \Omega_T^*(s)\, dS = \int_o^L \Omega_T^*(s)\, y\, dS = \int_o^L \Omega_T^*(s)\, x\, dS = 0 \qquad (17)$$

Le passage de $\Omega_r$ à $\Omega_T^*$ se fait par le choix du point origine $P_o$, ce qui amène la condition :

$$H = 0 \qquad (18)$$

L'expression (17) est écrite dans un système d'axes en T. Cette relation s'écrit plus simplement (en choisissant un système d'axes en T) :

$$\int_o^L \Omega_T^*\, Y\, dS = \int_o^L \Omega_T^*\, X\, dS = 0 \qquad (19)$$

• ***Rigidité de gauchissement***

En élasticité linéaire, la rigidité de gauchissement peut s'écrire comme le produit du module de déformation longitudinale E (constant) par l'inertie sectorielle $K_1$, celle-ci étant définie par : $K_1 = \int_o^L (\Omega_T^*)^2\, dS$

En élasticité non-linéaire, cette relation n'est plus valable. Il est indispensable de trouver une expression qui prenne en compte la variation du module de déformation longitudinale (ou transversale) dans la section transversale.

### 5.3 Remarques préliminaires sur l'élasticité non linéaire

On est amené à faire les remarques suivantes permettant de déterminer les caractéristiques de la section dans le domaine de l'élasticité non-linéaire :

• ***Module de déformation longitudinale E***

La difficulté majeure réside dans le fait que E est variable pour chaque point de la ligne moyenne de la section, dans une même section droite : E = E(s).

• ***Définition du centre de torsion***

Par les deux équations suivantes (système d'axes quelconque) :

$$\int_o^{L'} E(s)\, \Omega_T^*(s)\, y(s)\, dS = 0 \qquad \int_o^{L'} E(s)\, \Omega_T^*(s)\, x(s)\, dS = 0$$

• ***Définition du point origine $P_o$***

Indépendante du système d'axes choisi, mais pour un pôle en T :

$$\int_o^{L'} E(s)\, \Omega_T^*(s)\, dS = 0$$

• ***Expression de la rigidité de gauchissement***

$$\overline{EK}_1 = \int_o^{L'} E(s) \left[\Omega_T^*(s)\right]^2 dS \qquad (20)$$

### 5.4 Détermination du centre de torsion et de la rigidité de gauchissement

0 - E(s) est supposé connu.

1 - Détermination du centroïde G (avec système d'axes quelconque).

2 - Origine sectorielle quelconque $S_o$ et pôle en G (système d'axes en G).

→ Détermination du pôle principal ou centre de torsion T.

3 - Connaissant T (donc $\Omega_r$), déterminer l'origine sectorielle $M_0$ qui satisfait à H = 0, pour pouvoir passer de $\Omega_r$ à $\Omega_T^*$.

4 - Calculer $\Omega_r^*$ (pôle en T et origine sectorielle en $M_0$).

5 - En déduire la rigidité de gauchissement $\overline{EK}_1$, telle que :

$$\overline{EK}_1 = \int_{(C')} \left(\Omega_T^*\right)^2 E(s)\, dS$$

## 5.5 Application aux essais OE

### *5.5.1 Introduction*

Des résultats inhérents à ce paragraphe, il ressort un résultat important sur la position du centre de torsion (liée au gauchissement et probablement différente de celle qui régit les cisaillements ?).

En effet, avant la fissuration, la section droite en double Té envisagée dans notre étude présente deux axes de symétrie, dont l'intersection (le centroïde de la section) noté G, coïncide avec la position du centre de torsion ou pôle principal P.

Après fissuration en flexion d'une membrure, on assiste à un déplacement important du centre de torsion (le lieu des points P restant toujours l'axe de symétrie y'-y) vers la zone comprimée.

### *5.5.2 Evaluation des déformations de gauchissement après fissuration (phases A, B, C)*

Après fissuration, à même abscisse x, les déformations longitudinales engendrées par le gauchissement gêné de la poutre, sur les ailes supérieure et inférieure, s'écrivent respectivement :

$$\varepsilon_s = \frac{B\,\Omega_s}{\overline{EK}_1} \qquad \varepsilon_i = \frac{B\,\Omega_i}{\overline{EK}_1} \tag{21}$$

Le bimoment B et la quantité $\overline{EK}_1$, caractéristiques d'une section droite, seront identiques sur l'aile supérieure et inférieure.

Ce qui permet de déduire le rapport de ces deux déformations :

$$\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i} = \frac{\Omega_s}{\Omega_i}$$

Soit (Figure 9), avec :

$$\Omega_s = x\left[\frac{h}{2} - \frac{e}{2} - t + v\right]$$

et

$$\Omega_i = x\left[\frac{h}{2} - \frac{e}{2} - t - v\right]$$

Posant : $l = \frac{h}{2} - \frac{e}{2} - t$

On obtient une nouvelle expression du rapport $\frac{\Omega_s}{\Omega_i}$, soit :

$$\frac{\Omega_s}{\Omega_i} = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i} = \frac{l+v}{l-v} = \frac{1+\xi}{1-\xi}$$

$\xi$ représentant le déplacement relatif v/l du centre de torsion. On en déduit :

$$\xi\,(1+\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i}) = (\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i} - 1)$$

et finalement :

$$\xi = \frac{\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i} - 1}{1+\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i}} \tag{22}$$

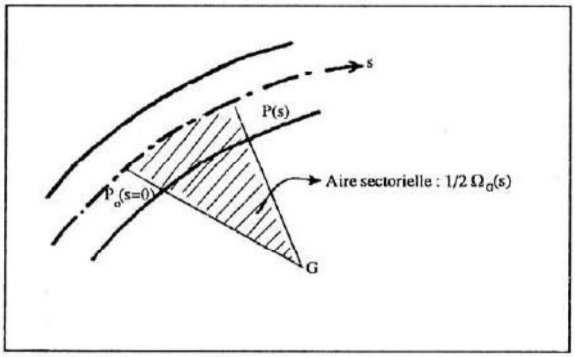



**Figure 9**

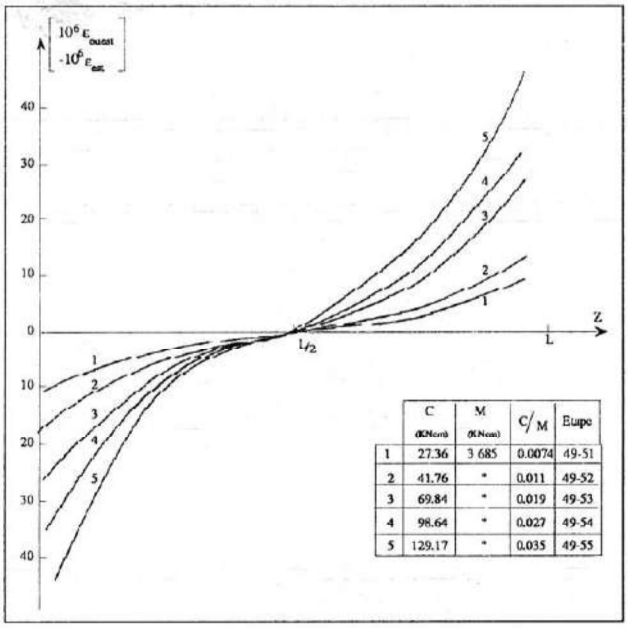
### *5.5.3 Application à l'essai OE 1*

Les figures (10) et (11) rapportent l'évolution des déformations maximales engendrées par le gauchissement gêné, le long de la poutre $OE_1$, sur les ailes supérieure et inférieure. A ce sujet, plusieurs remarques importantes peuvent être faites :

- La distribution de ces déformations de gauchissement reste linéaire sur les deux ailes, avec des signes contraires de part et d'autre de l'axe longitudinal de la poutre.
- Le long de la poutre, l'allure générale résumant la distribution de ces déformations est conservée, avec toutefois des déformations beaucoup plus importantes sur l'aile supérieure.
- Le rapport des déformations maximales dans l'aile supérieure et inférieure, dans les phases de flexion A, B et C est illustré par les figures 12, 13 et 14.

On peut y constater que ce rapport reste constant le long de la poutre, dans les trois phases de flexion, et voisin de la valeur 3.

On peut donc conclure, qu'après fissuration de l'aile supérieure, le centre de torsion se replace à une distance v vers la zone comprimée, telle que v/l = 0.5 sur toute la longueur de la poutre, et quelque soit l'état de fissuration existant.




| | C (KNcm) | M (KNcm) | C/M | Eupe |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 27.36 | 3 685 | 0.0074 | 49-51 |
| 2 | 41.76 | " | 0.011 | 49-52 |
| 3 | 69.84 | " | 0.019 | 49-53 |
| 4 | 98.64 | " | 0.027 | 49-54 |
| 5 | 129.17 | " | 0.035 | 49-55 |

**Figure 10 a :** Aile inférieure, flexion - torsion A.

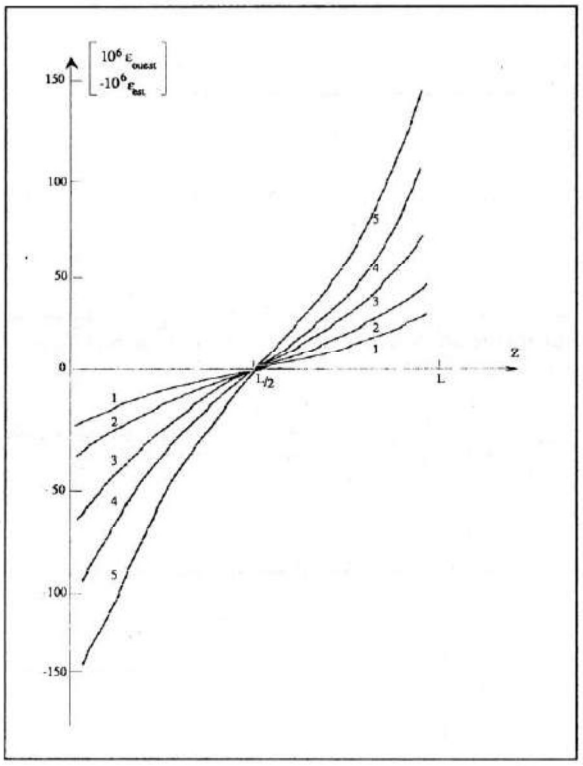



**Figure 10 b :** Aile supérieure, flexion - torsion A.

### *5.5.4 Explication physique de ce résultat*

Physiquement, ce résultat peut trouver satisfaction dans les justifications suivantes :

a) Tant que la fissure ne s'est pas refermée (c'est-à-dire tant qu'il n'existe pas de forces de compression suffisamment importantes pour refermer celle-ci), les contraintes normales (longitudinales) transitent uniquement par les armatures.

b) Le phénomène de gauchissement est lié uniquement à une "flexion des ailes". Donc la fissuration (dont l'évolution en "*profondeur*" se manifeste dans l'âme) n'intervient pas sur la position du centre de torsion dans un état de fissuration et de flexion donné.

c) Dans la phase de flexion la plus importante (phase C), on observe une légère dispersion des points expérimentaux, autour de la valeur moyenne $\varepsilon_s/\varepsilon_i = 3$. Ceci est en grande partie dû à un état de plastification se produisant au voisinage des armatures.

### *5.5.5 Détermination du centre de torsion par le calcul*

Par le calcul, et au vu des remarques formulées, nous allons essayer de retrouver la position du centre de torsion.

a) Hypothèses

Après fissuration, la transmission des efforts se fait :

(s') { - Par les armatures uniquement, sur l'aile supérieure fissurée.
- Par les armatures et le béton, sur l'aile inférieure.

b) Détermination de l'origine sectorielle $M_o$

L'origine sectorielle $M_o$ est le point du contour moyen ($\Gamma$) de la section qui satisfait à la relation :

$$H = \int_o^{L'} E(s)\ \Omega_T^*(s)\, dS = 0$$

avec $dS = e(s)ds$.

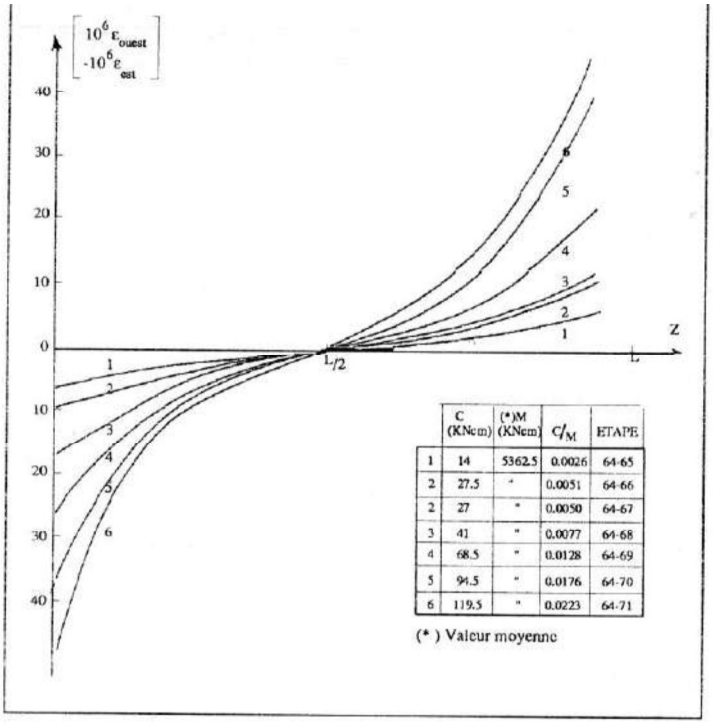
Du fait, d'une part, de la symétrie que présente la section droite par rapport à l'axe y'-y, et d'autre part, de ce que le lieu présumé des points T reste toujours sur cet axe y'-y, le point sectoriel "zéro" (noté $M_o$) est situé à l'intersection de la ligne moyenne de l'aile supérieure ou inférieure et de l'axe y'-y.

c) Position du centre de torsion

Elle est donnée par l'expression générale suivante :

$$U = \int_{(s')} E(s)\ \Omega_T^*(s)\, y(s)\, dS = 0$$

En y explicitant la contribution du béton et celle des armatures, par la relation :




| | C (KNcm) | (*)M (KNcm) | C/M | ETAPE |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 14 | 5362.5 | 0.0026 | 64-65 |
| 2 | 27.5 | " | 0.0051 | 64-66 |
| 2 | 27 | " | 0.0050 | 64-67 |
| 3 | 41 | " | 0.0077 | 64-68 |
| 4 | 68.5 | " | 0.0128 | 64-69 |
| 5 | 94.5 | " | 0.0176 | 64-70 |
| 6 | 119.5 | " | 0.0223 | 64-71 |

(*) Valeur moyenne

**Figure 11a :** Aile supérieure, flexion - torsion A.

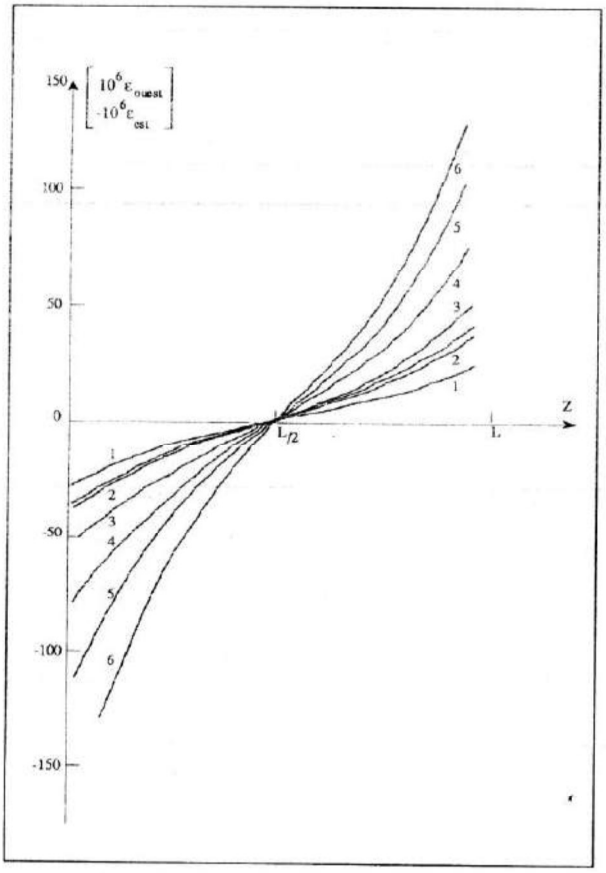



**Figure 11b :** Aile supérieure, flexion-torsion B.

$$\int_{(\Gamma)} \underbrace{\Omega_T(s)\, e(s)\, y(s) ds}_{\text{Béton sur l'aile inférieure.}} + n \underbrace{\sum_i (\Omega(s_{ai}))\, y_{ai}\, A_i}_{\text{Armatures longitudinales sur les ailes supérieure et inférieure.}} = 0$$

**NOTA :** Par commodité de calcul, nous supposerons, d'une part, les lignes moyennes horizontales dans les ailes inférieure et supérieure, et, d'autre part, que les armatures sont concentrées sur cette ligne moyenne (par projection).

**Béton aile inférieure**

$$H_1 = 2\, e\, (1-v)^2 \int_0^{b/2} x\, dx = \frac{b^2}{4}\, e\, (1-v)^2$$

**Aciers aile inférieure**

$$H_2 = 42.412\, n\, (1-v)^2$$

**Aciers aile supérieure**

$$H_3 = -42.412\, n\, (1+v)^2$$

Ecrivons que H est nulle :

$$\frac{b^2}{4}\, e\, (1-v)^2 + 42.412\, n\, (1-v)^2 - 42.412\, n\, (1+v)^2 = 0$$

Soit la résolution de l'équation suivante :

$$(1+5.895\ 10^{-3}\ b^2\, \frac{e}{n})\, (1-v)^2 = (1+v)^2$$

En posant $\xi = v/l$, on obtient :

$$\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^2 = 8.61$$

soit : $\xi = v/l = 0.492 \simeq 0.50$

A titre indicatif, nous présentons les valeurs mesurées des déformations liées au gauchissement (ailes supérieure et inférieure) dans les phases A et B de chargement (Figures 10 et 11).

Le rapport des déformations expérimentales correspondantes est donné par les figures 12, 13 et 14.

La valeur de $\xi = 0.50$ obtenue par le calcul, corr-

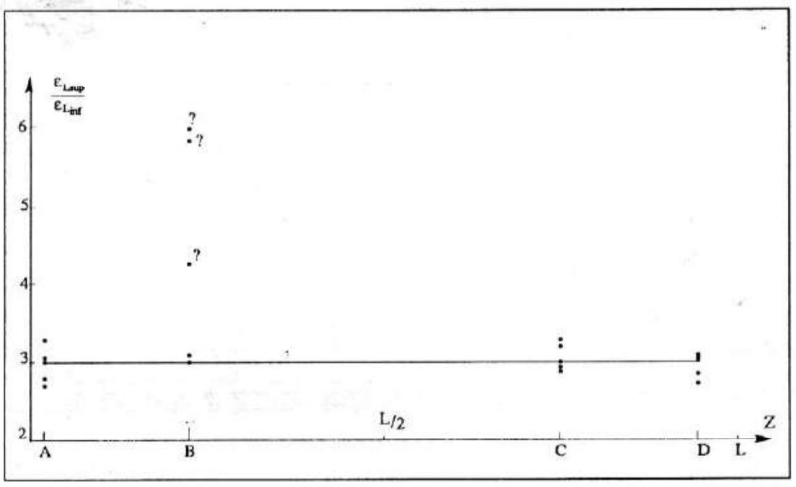



**Figure 12 :** OE1 Flexion - torsion A.

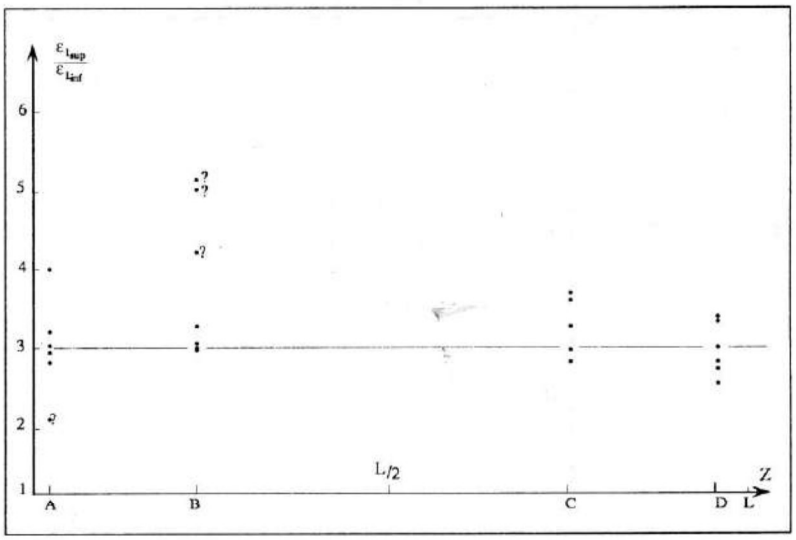



**Figure 13 :** OE1 Flexion - torsion B.

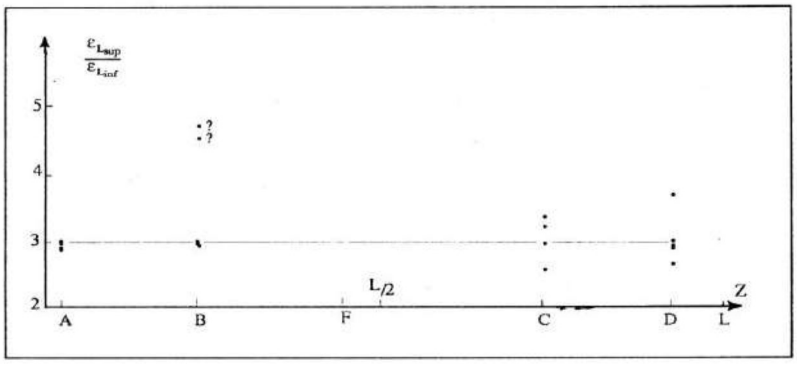



**Figure 14 :** OE1 Flexion - torsion C.

espond remarquablement à celle déduite des observations et résultats expérimentaux (Figures 12, 13 et 14).

## 6 CONCLUSIONS (*)

Dans la résolution d'un problème d'instabilité en flexion composée déviée avec fissuration de flexion, la rigidité de gauchissement et le centre de torsion d'une section en double Té mince, peuvent être déterminés en envisageant uniquement les contributions suivantes dans les calculs :

- armatures longitudinales tendues et comprimées avec module de déformation $E_a$ (valeur de l'élasticité linéaire).
- béton comprimé (de l'aile comprimée) avec module $E_{bo}$ ($E_{bo}$ : valeur de l'élasticité linéaire) ❺

(*) Conclusions valables en supposant que l'aile tendue est déjà entièrement fissurée.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] B. Foure et N.E Hannachi : "*Rigidités de gauchissement et de torsion de poutres à profil mince - domaine linéaire*". Annales de l'ITBTP, Juillet - Août 1988.

[2] B. Foure et N.E Hannachi : "*Rigidités de gauchissement et torsion de poutres à profil mince ouvert après fissuration de flexion*". Annales de l'ITBTP, Septembre 1988.

[3] M. Kavyrchine et B. Foure : "*Instabilité de forme ; déversement des poutres en béton armé*". Rapport SETRA, 1981.

[4] Kollbrunner et Basler : "*Torsion - Application à l'étude des structures*". SPES (Lausanne) et Bordas (Paris) éditeur.