

ANALYSE NON LINEAIRE DES OSSATURES PLANES EN BETON ARME ET BETON PRECONTRAIN (Première partie : méthode numérique)

Y. BOUAFIA
H. HAMMOUM
UMMTO

RÉSUMÉ

Le calcul à la rupture basé sur les principes de l'analyse limite n'est plus suffisant dans certains types de constructions. En effet, pour traiter les problèmes de sécurité vis-à-vis de la ruine des structures, il est nécessaire de connaître les déformations, ce que l'analyse limite ne permet pas. Une méthode d'analyse non linéaire des ossatures planes, en béton armé et béton précontraint, est alors développée dans la présente étude. La non linéarité est considérée sous ses deux aspects : mécanique (comportement non linéaire des matériaux) et géométrique (effet du second ordre dus aux déplacements des nœuds).

La structure est discrétisée en éléments finis (éléments barres). Le chargement est appliqué "pas-à-pas" jusqu'à la ruine de la structure. Un logiciel est ainsi élaboré et écrit suivant les normes fortran 77 et implanté sur PC. Ce logiciel se caractérise par une gestion dynamique de la mémoire centrale. Les résultats du calcul sont confrontés à des résultats d'essais sur des structures en béton armé et précontraint testées par ailleurs.

MOTS CLÉS

structures planes • béton armé • béton précontraint • béton à hautes performances • calcul non linéaire • ruine • modélisation.

1. Introduction

En dehors du modèle linéaire utilisé pour analyser le comportement des ouvrages dans les conditions de service, une place essentielle est donnée dans les règlements au calcul à la rupture, basé sur les principes de l'analyse aux états limites. En conséquence, l'utilisation de telles méthodes de calcul sera donc plus ou moins fondée, en fonction des non linéarités affectant le système [1 à 8]. Celles-ci peuvent être classées en deux catégories :

- la première concerne la non linéarité mécanique, résultant en particulier de la loi de comportement intrinsèque des matériaux et la considération du domaine post-fissuration (prise en compte du béton tendu situé entre deux fissures successives de flexion). Dans la présente étude, nous avons adopté la loi de Sargin pour le béton en compression et la loi de Grelat en traction. En ce qui concerne les aciers, nous avons utilisé les lois données par le PBEL,

- la seconde est la non linéarité géométrique due au comportement d'ensemble de la structure. Lorsque les déplacements deviennent importants, l'équilibre du système ne peut plus être décrit dans la configuration initiale, mais doit être étudiée dans la configuration déformée (théorie du second ordre des déplacements).

La structure étudiée est supposée assimilable à une ossature plane, formée d'un assemblage de barres (poteaux et poutres). Chaque barre de la structure est discrétisée en éléments finis (barres) unidimensionnels de faible longueur. Le comportement de la structure est étudié "pas à pas" en appliquant les charges au niveau des nœuds, par incréments.

L'analyse de l'état de déformation d'un élément de structure est effectuée dans un repère intrinsèque, lié à la position déformée de cet élément. Les caractéristiques de déformabilité d'un élément sont obtenues en étudiant le comportement mécanique (non linéaire) de plusieurs sections droites (3 à 5 sections en général) le long de cet élément. Les étapes de calcul de la section sont données en annexe. Dans ce repère, nous pouvons considérer :

- les déplacements sont petits et les déformations infiniment petites ;

- la non linéarité géométrique liée à la déformation propre de l'élément est négligeable (les éléments sont supposés courts et chargés seulement en leur extrémités) ;

- les déformations des nœuds situés à la jonction de plusieurs barres sont négligeables. En particulier, l'angle initial entre deux barres à leur jonction est conservé ;

- la rigidité d'effort tranchant est calculée d'après la théorie de l'élasticité linéaire.

La non linéarité matérielle est donc prise en compte en étudiant un élément "poutre" dans son repère intrinsèque (après déformation). Les effets du second ordre sont introduits lors du passage du repère intrinsèque au repère local. Ce dernier est lié à la position initiale de la barre.

La relation liant les grandeurs dans le repère local est indépendante des efforts et déplacements. Elle ne dépend que de l'orientation initiale de la barre.

La relation liant les accroissements d'efforts et déplacements, dans le repère absolu, s'obtient au moyen d'une matrice de rotation [RT], qui est fonction de l'inclinaison initiale β de la barre par rapport à l'axe Ox .

A chaque accroissement de chargement $\{\Delta P\}$ donné, le problème non linéaire est résolu en utilisant la méthode des substitutions successives reliant les accroissements d'efforts appliqués aux nœuds aux accroissements de déplacements des nœuds. La matrice de rigidité "corde" de l'élément est ainsi établie en tenant compte de la non linéarité des matériaux et des effets du second ordre dus aux déplacements des nœuds.

Notations

[] : notation matricielle,
{ } : représentation d'un vecteur,
()^T : représentation d'un vecteur transposé,
[K] : rigidité de l'élément,
[K_s] : rigidité (3x3) symétrique de la section
[S_s] : souplesse de la section,
[B] : transformation géométrique,
[RT] : passage du repère local au repère absolu,
[B'] = $f(\{\Delta Su\}^{F-1})$: transformation géométrique "approchée",
[B''] = $f(\{\Delta Su\}^F)$: transformation géométrique

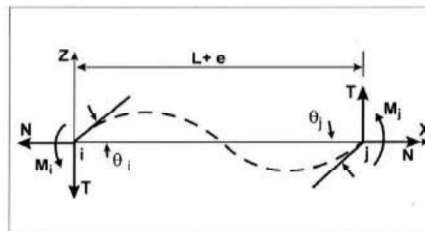


Figure 1 : Efforts et déplacements dans le repère intrinsèque.

“exacte” par rapport aux approximations envisagées (petits déplacements ou grands déplacements),

$\{\Delta P\}^r$: accroissement du chargement appliqué à l'étape r ,

$\{P\}$: chargement précédent,

$\{S_x\}$: déplacement précédent,

$\{A\}$: action de la précontrainte,

$\{\Delta U\}$: accroissements des déplacements des nœuds,

$\{\Delta F\}$: accroissements des efforts internes aux nœuds,

$\{\Delta P\}$: accroissements du chargement appliqué aux nœuds,

$\{\Delta S\}$: accroissements des déplacements aux nœuds,

$\{\delta(x)\}$: déformation dans une section d'abscisse x ,

M : moment fléchissant,

N : effort normal,

T : effort tranchant,

A_{pi} : aire de l'acier actif i ,

N_p : nombre de câbles de précontrainte concernés par la mise en tension,

Indice S : section,

Indice N : repère intrinsèque de l'élément barre,

Indice U : repère local intermédiaire,

Indice L : repère local d'un élément barre,

Indice X : repère absolu,

u, v : déplacements longitudinaux des nœuds,

e : allongement longitudinal d'un élément,

θ, ω : rotations des éléments,

β : inclinaison de élément par rapport à l'horizontale,

ϕ : courbure de la section,

Δ : accroissement de la variable,

s_{oi} : contrainte initiale dans le câble d'ordre i après pertes instantanées,

α_i : angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale de l'acier actif i .

2. Matrice de rigidité de l'élément dans le repère intrinsèque

2.1 Equilibre de l'élément barre

Le repère intrinsèque (x, z) est lié à la position déformée de l'élément. Les efforts et les déplacements correspondants, pris en compte dans l'analyse, sont représentés sur la figure 1 avec leur sens positif.

La courbure $\phi(x)$ est positive lorsque la cavité de l'axe déformé est dirigée dans le sens positif de l'axe z . Les sollicitations aux extrémités de l'élément sont données par (1).

$$\{F_N\} = (N, M_i, M_j)^T \quad (1)$$

L'effort tranchant T est fonction des moments de flexion M_i et M_j . Compte tenu de l'équilibre de l'élément, les déplacements correspondants sont donnés par (2) et (3).

$$\{S_N\} = (e, \theta_i, \theta_j)^T \quad (2)$$

$$e = u_i - u_j \quad (3)$$

u_i et u_j sont, respectivement, le déplacement longitudinal de l'extrémité origine et finale de l'élément.

Les accroissements d'efforts et des déplacements $\{\Delta F_N\}$ et $\{\Delta S_N\}$ respectivement, aux extrémités de l'élément sont :

$$\{\Delta F_N\} = (\Delta N, \Delta M_i, \Delta M_j)^T \quad (4)$$

$$\{\Delta S_N\} = (\Delta e, \Delta \theta_i, \Delta \theta_j)^T \quad (5)$$

2.2 Relation entre sollicitations dans une section et les efforts aux nœuds de l'élément

Les sollicitations dans une section transversale d'abscisse x sont linéaires. En tenant compte de la condition d'équilibre et des conventions sur les sollicitations, nous avons :

$$\begin{cases} N(x) = -N \\ M(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) M_i + \frac{x}{L} M_j \\ T(x) = \frac{1}{L} (M_i + M_j) \end{cases} \quad (6)$$

Ces relations s'écrivent sous forme matricielle (7, 8 et 9).

$$\{F_s\} = [L(x)] \cdot \{F_N\} \quad (7)$$

$$\{F_s\} = (N(x), M(x), T(x))^T \quad (8)$$

$$[L(x)] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \frac{x}{L} \\ 0 & \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (9)$$

En négligeant les variations de longueur dans le calcul des variations de sollicitations, nous pouvons écrire, compte tenu de la relation (7) :

$$\{\Delta F_s\} = [L(x)] \cdot \{\Delta F_N\} \quad (10)$$

2.3 Relation entre les déplacements des nœuds, de l'élément et les déformations des sections

Toute variation d'efforts $\{\delta F_N\}$ aux extrémités de l'élément entraîne :

- un travail virtuel des efforts extérieurs ;

$$\delta W_e = \{\delta F_N\}^T \cdot \{S_N\} \quad (11)$$

- un travail virtuel des déformations ;

δW_i tel que ;

$$\delta W_i = \int_0^L \{\delta F_s\}^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (12)$$

$\{\delta(x)\}$ est le vecteur contenant les déformations dans une section transversale d'abscisse x .

$$\{\delta(x)\} = (\varepsilon(x), \phi(x), \gamma(x))^T \quad (13)$$

En appliquant le théorème du travail virtuel complémentaire, il vient ;

$$\delta W_i = \delta W_e \quad (14)$$

$$\{\delta F_N\}^T \cdot \{S_N\} = \int_0^L \{\delta F_s\}^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (15)$$

En introduisant (10) dans (15), nous obtenons l'équation (16)

$$\{\delta F_N\}^T \cdot \{S_N\} = \{\delta F_s\}^T \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (16)$$

La variation $\{\delta F_N\}$ étant arbitraire, nous avons alors l'équation (17).

$$\{S_N\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (17)$$

En négligeant la variation de longueur dans le

calcul des déplacements des nœuds, il en résulte l'équation (18).

$$\{\Delta S_N\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{\Delta \delta(x)\} \cdot dx \quad (18)$$

2.4 Relation entre les efforts et les déplacements des nœuds de l'élément

Compte tenu de la relation (1), la relation (18) devient :

$$\{\Delta S_N\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot ([S_s] \cdot \{\Delta F_s\} + \{G_s\}) \cdot dx \quad (19)$$

En introduisant l'équation (10) dans (19), nous arrivons à l'équation (20).

$$\{\Delta S_N\} = [K_N]^{-1} \cdot \{\Delta F_N\} + \{G_N\} \quad (20)$$

$[K_N]^{-1}$ est la matrice de souplesse réduite (3x3) de l'élément dans le repère intrinsèque xy , donnée par la relation (21).

$$[K_N]^{-1} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot [S_s] \cdot [L(x)] \cdot dx \quad (21)$$

$\{G_N\}$ est une matrice colonne (3x1), définie par (22).

$$\{G_N\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{G_s\} \cdot dx \quad (22)$$

L'inversion de la matrice $[K_N]^{-1}$ nous conduit à la matrice de rigidité réduite (3x3) de l'élément dans le repère intrinsèque, notée $[K_N]$. De l'équation (20), nous arrivons à la relation matricielle (23).

$$\{\Delta F_N\} + \{A_N\} = [K_N] \cdot \{\Delta S_N\} \quad (23)$$

La matrice colonne $\{A_N\}$ est définie par la relation (24).

$$\{A_N\} = [K_N] \cdot \{G_N\} \quad (24)$$

L'intégration des éléments de la matrice $[K_N]^{-1}$ est effectuée numériquement, par la méthode de Simpson, en considérant sur un élément un nombre impaire de sections de calcul (3 ou 5 en général).

3. Matrice de rigidité dans le repère local

3.1 Equilibre de l'élément barre

La matrice de rigidité de l'élément dans le re-

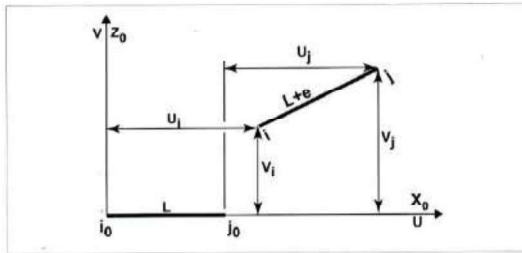


Figure 2 : Géométrie de la barre déformée.

père local, lié à la position initiale de l'élément est établie en tenant compte des effets du second ordre dus aux déplacements des nœuds. Ces effets s'introduisent dans le passage des efforts et déplacements du repère intrinsèque au repère local.

Nous considérons un élément de la structure, de nœud origine i_0 et de nœud extrémité j_0 et (x_0, z_0) le repère local de référence. Sous sollicitations, l'élément de la structure se déplace et se déforme. Les nœuds i_0 et j_0 se déplacent en des points notés i et j (voir Figure 2).

u_i, v_i (respectivement u_j, v_j) sont les composantes, dans le repère local de référence, du vecteur déplacement i_0 (j_0).

θ_{i0} (respectivement θ_{j0}) sont les rotations de la projection de la normale à la section i_0 (respectivement j_0) de la barre dans le plan (x_0, z_0) à l'instant t .

$F_{x0}, F_{z0}, M_{i0}, M_{j0}$ sont les sollicitations aux extrémités de l'élément dans son repère local de référence, à l'instant t .

$\{F_L\}$ et $\{S_L\}$ sont les matrices colonnes (6×1) contenant respectivement les sollicitations et les déplacements aux extrémités de l'élément dans le repère local (x_0, z_0) . Elles sont données par (25) et (26).

$$\{F_L\} = (F_{i0}, F_{z0}, M_{i0}, F_{j0}, F_{z0}, M_{j0})^T \quad (25)$$

$$\{S_L\} = (u_i, v_i, \theta_{i0}, u_j, v_j, \theta_{j0})^T \quad (26)$$

En introduisant les matrices colonnes $\{F_U\}$ et $\{S_U\}$ de dimension (4×1) , telles que :

$$\{F_U\} = (F_{x0}, F_{z0}, M_{i0}, M_{j0})^T \quad (27)$$

$$\{S_U\} = (u, v, \theta_{i0}, \theta_{j0})^T \quad (28)$$

$$u = u_j - u_i \quad (29)$$

$$v = v_j - v_i$$

et en tenant compte des équations (26), (28) et (29), nous avons :

$$\{S_U\} = [T_0] \cdot \{S_L\} \quad (30)$$

$$[T_0] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Compte tenu des relations (25) et (27), la condition d'équilibre de l'élément dans le repère local (x_0, z_0) nous amène à écrire l'équation (32).

$$\{F_L\} = [T_0]^T \cdot \{F_U\} \quad (32)$$

Les accroissements d'efforts $\{\Delta F_U\}$ et de déplacement $\{\Delta S_U\}$, aux extrémités de élément, sont alors donnés par (33) et (34).

$$\{\Delta F_U\} = (\Delta F_{x0}, \Delta F_{z0}, \Delta M_{i0}, \Delta M_{j0})^T \quad (33)$$

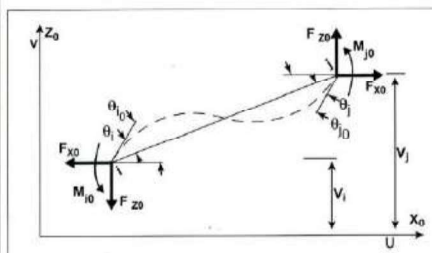
$$\{\Delta S_U\} = (\Delta u, \Delta v, \Delta \theta_{i0}, \Delta \theta_{j0})^T \quad (34)$$

3.2

Relation entre les accroissement d'efforts $\{\Delta F_U\}$ et les accroissements de déplacements $\{\Delta S_U\}$

Les figures 2 et 3 nous permettent d'écrire les relations géométriques (35).

$$\begin{cases} e = \sqrt{(L+u)^2 + v^2} - L \\ \theta_i = \theta_{i0} - \text{Arctg} \frac{v}{L+u} \\ \theta_j = \theta_{j0} - \text{Arctg} \frac{v}{L+u} \\ \theta = \text{Arctg} \frac{v}{L+u} \end{cases} \quad (35)$$

Figure 3 : Projection de la barre déformée dans le plan (x_0, z_0)

La différenciation des expressions (35) permet d'établir la relation (36).

$$\{\Delta S_N\} = [B] \cdot \{\Delta S_U\} \quad (36)$$

[B] est la matrice de transformation géométrique définie par (37).

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial e}{\partial u} & \frac{\partial e}{\partial v} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial u} & \frac{\partial \theta}{\partial v} & 1 & 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial u} & \frac{\partial \theta}{\partial v} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

D'après le théorème des travaux virtuels, les travaux des forces sont nuls dans un déplacement de corps rigide (du repère intrinsèque en équilibre au repère local). Le travail virtuel des forces {F_N} appliquées aux nœuds dans le repère local (dû à un déplacement {ΔS_U} et cc, quelque soit {ΔS_N} et {ΔS_U}). Ceci nous permet d'écrire la relation (38).

$$\{F_U\}^T \cdot \{\Delta S_N\} = \{F_U\}^T \cdot \{\Delta S_U\} \quad (38)$$

Compte tenu de la relation (36), nous pouvons écrire les relations (39) et (40).

$$\{F_U\} = [B]^T \cdot \{F_N\} \quad (39)$$

$$\{\Delta F_U\} = [B]^T \cdot \{\Delta F_N\} + [\Delta B]^T \cdot \{F_N\} \quad (40)$$

Compte tenu des relations (24) et (36), nous avons :

$$\{\Delta F_U\} = [B]^T \cdot \left[[K_N] \cdot \{\Delta S_N\} - \{A_N\} \right] + [\Delta B]^T \cdot \{F_N\} \quad (41)$$

$$[\Delta B]^T \cdot \{F_N\} = \begin{bmatrix} \Delta \left(\frac{\partial e}{\partial u} \right) & \Delta \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right) & \Delta \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right) \\ \Delta \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right) & \Delta \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right) & \Delta \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix} \quad (42)$$

Après développement des termes de la matrice [ΔV]^T, nous arrivons aux relations suivantes :

$$[\Delta B]^T \cdot \{F_N\} = \begin{bmatrix} N \cdot \Delta \frac{\partial e}{\partial u} + (M_i + M_j) \cdot \Delta \frac{\partial \theta}{\partial u} \\ N \cdot \Delta \frac{\partial e}{\partial v} + (M_i + M_j) \cdot \Delta \frac{\partial \theta}{\partial v} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Delta B]^T \cdot \{F_N\} = \begin{bmatrix} N \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial u^2} + (M_i + M_j) \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} \\ N \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial v \partial u} + (M_i + M_j) \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} \\ 0 \\ 0 \\ N \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial v^2} + (M_i + M_j) \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix}$$

$$[\Delta B]^T \cdot \{F_N\} = [D] \cdot \{\Delta S_U\} \quad (43)$$

La matrice [D] peut se mettre sous la forme suivante:

$$[D] = \begin{bmatrix} D1 & D2 & 0 & 0 \\ & D3 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{Symétrique} & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} D1 &= N \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial u^2} + (M_i + M_j) \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} \\ D2 &= N \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial u \partial v} + (M_i + M_j) \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} \\ D3 &= N \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial v^2} + (M_i + M_j) \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} \end{aligned} \quad (44)$$

En introduisant l'équation (43) dans (41), nous obtenons les relations (45, 46, et 47).

$$\{\Delta F_U\} = [B]^T \cdot [K_N] \cdot \{\Delta S_N\} - [B]^T \cdot \{A_N\} + [D] \cdot \{\Delta S_U\} \quad (45)$$

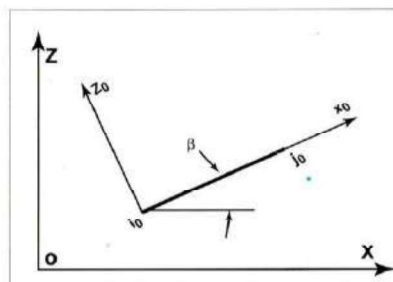
$$= ([B]^T \cdot [K_N] + [B]^T [D]) \cdot \{\Delta S_U\} - [B]^T \cdot \{A_N\}$$

$$\{\Delta F_U\} + \{A_U\} = [K_U] \cdot \{\Delta S_U\} \quad (46)$$

$$[K_U] = [B]^T \cdot [K_N] + [B]^T [D] \quad (47)$$

[K_U] est la matrice de rigidité (4x4) de l'élément poutre dans le repère local intermédiaire.

Figure 4 : Repère absolu



En utilisant les relations (30) et (32), nous aboutissons à la relation liant les accroissements d'efforts aux accroissements de déplacements des nœuds de l'élément dans le repère local (48).

$$\{\Delta F_L\} + \{A_L\} = [K_L] \cdot \{\Delta S_L\} \quad (48)$$

$[K_L]$ est la matrice de rigidité symétrique (6x6) de l'élément dans le repère local. Elle est donnée par (49).

$$[K_L] = [T_0]^T \cdot ([B]^T [K_N] [B] + [D]) [T_0] \quad (49)$$

$\{A_L\}$ représente une matrice colonne (6x1), définie par (50).

$$\{A_L\} = [T_0]^T \cdot \{A_U\} \quad (50)$$

$\{A_U\}$ représente une matrice colonne (4x1), définie par (51).

$$\{A_U\} = [B]^T \cdot \{A_N\} \quad (51)$$

3.3 Relations simplifiées des matrices [D] et [B] dans le cas des petits déplacements

Compte tenu de l'hypothèse des petits déplacements, nous pouvons nous contenter des termes du premier ordre dans le développement en série des termes des matrices [B] et [D].

Nous utiliserons alors les relations (52) et (53).

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & y/L & 0 & 0 \\ y/L^2 & -1/L & 1 & 0 \\ y/L^2 & -1/L & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 2v \cdot \frac{F_{y0}}{L^2} & \frac{F_{y0}}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{F_{y0}}{L} & \left(\frac{F_{y0}}{L} \cdot \frac{v \cdot F_{y0}}{L^2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

4. Matrice de rigidité de l'élément dans le repère absolu

4.1 Relation entre les accroissements de déplacements et d'efforts dans le repère absolu

La relation liant les grandeurs dans le repère local est indépendante des efforts et déplacements. Elle ne dépend que de l'orientation ini-

tiale de la barre.

Un élément de la structure, de nœud origine i_0 et de nœud extrémité j_0 , lié au repère local de référence (x_0, z_0) , est représenté dans le repère absolu (X, Z) lié à la structure comme schématisé à la figure 4.

$\{F_N\}$ et $\{S_N\}$ sont des matrices colonnes (6x1) contenant, respectivement, les efforts appliqués et les déplacements aux extrémités d'un élément dans le repère absolu (X, Z) .

$$\{F_N\} = (F_{ix}, F_{iz}, M_i, F_{jx}, F_{jz}, M_j)^T \quad (55)$$

$$\{S_N\} = (X_i, Z_i, \zeta_i, X_j, Z_j, \zeta_j)^T \quad (56)$$

Les incréments d'efforts et de déplacements dans le repère absolu sont donnés par (57) et (58).

$$\{\Delta F_N\} = (\Delta F_{ix}, \Delta F_{iz}, \Delta M_i, \Delta F_{jx}, \Delta F_{jz}, \Delta M_j)^T \quad (57)$$

$$\{\Delta S_N\} = (\Delta X_i, \Delta Z_i, \Delta \zeta_i, \Delta X_j, \Delta Z_j, \Delta \zeta_j)^T \quad (58)$$

La relation liant les accroissements d'efforts et déplacements, dans le repère absolu, s'obtient au moyen de la matrice de rotation $[RT]$ fonction de l'inclinaison initial β de la barre par rapport à l'axe Ox (59).

$$[RT] = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (59)$$

La relation matricielle entre les déplacements $\{S_L\}$ des nœuds dans le repère local et les déplacements $\{S_N\}$ des nœuds dans le repère absolu s'écrit :

$$\{S_L\} = [RT] \cdot \{S_N\} \quad (60)$$

Par analogie à l'équation (60), nous avons la transformation d'efforts (61).

$$\{F_x\} = [RT]^T \cdot \{F_L\} \quad (61)$$

$$\{\Delta F_x\} = [RT]^T \cdot \{\Delta F_L\} \quad (62)$$

En introduisant l'équation (48) dans l'équation (62), il vient :

$$\{\Delta F_x\} + \{A_x\} = [RT]^T \cdot [K_L] \cdot \{\Delta S_L\} \quad (63)$$

$\{A_x\}$ est la matrice colonne (6x1), définie par (64).

D'autre part, la différenciation de l'équation (60) nous amène à :

$$\{A_x\} = [RT]^T \cdot \{A_L\} \quad (64)$$

D'autre part, la différenciation de l'équation (60) nous amène à :

$$\{\Delta S_L\} = [RT]^T \cdot \{\Delta S_x\} \quad (65)$$

En reportant l'équation (65) dans l'équation (63), nous obtenons :

$$\{\Delta F_x\} + \{A_x\} = [K_x] \cdot \{\Delta S_x\} \quad (66)$$

$[K_x]$ est la matrice de rigidité (6x6) d'un élément dans le repère absolu OXZ. Elle est donnée par (67).

$$[K_x] = [RT]^T \cdot [K_L] \cdot [RT] \quad (67)$$

5. Organisation informatique de la méthode

Le calcul est effectué par étapes, caractérisées par des accroissements $\{\Delta P\}$ de la charge. Pour avoir l'état d'équilibre de la structure, une procédure itérative est utilisée à chaque étape. Au début d'une étape de calcul (repérée par l'indice r), nous supposons les accroissements de charge $\{\Delta P\}$ connus. Pour calculer le vecteur des accroissements de déplacements des nœuds $\{\Delta U\}$, nous avons à résoudre l'équation suivante :

$$\{\Delta P\} + \{A\} = [K] \cdot \{\Delta U\} \quad (68)$$

5.1 Algorithme de résolution

A chaque accroissement de chargement $\{\Delta P\}$ donné, le système non-linéaire (68) est résolu en utilisant la méthode des substitutions successives reliant les accroissements d'efforts appliqués aux nœuds aux accroissements de déplacements des nœuds.

Le problème non-linéaire consiste à déterminer l'accroissement de déplacement $\{\Delta U\}$ correspondant à l'accroissement de chargement $\{\Delta P\}$ et à l'action $\{A\}$ éventuelle de la précontrainte à la mise en tension des câbles. La méthode des substitutions, utilisant les matrices de rigidité, consiste à construire une suite de solution :

$\{\Delta U\}_0, \{\Delta U\}_1, \dots, \{\Delta U\}_i, \{\Delta U\}_{i+1}$ est calculé à partir de $\{\Delta U\}_{i-1}$, en résolvant le système linéaire (69).

$$\{\Delta P\} + \{A\}_{i-1} = [K]_{i-1} \cdot \{\Delta U\}_i \quad (69)$$

$[K]_{i-1}$ est la matrice de rigidité de la structure à l'itération $(i-1)$,

$\{A\}_{i-1}$ représente l'action de la précontrainte (éventuelle) à la mise en tension des câbles de précontrainte, correspondant à l'itération $(i-1)$.

Au début du calcul, nous avons :

$$\{\Delta U\}_0 = \{0\} \quad (70)$$

L'application de l'algorithme exige la formation, à chaque itération, d'une nouvelle matrice de rigidité de la structure $[K]$ et du vecteur $\{A\}$. La solution, en déplacement, du problème non-linéaire est obtenue lorsque entre deux solutions successives la norme euclidienne η_u des variations des déplacements est inférieure ou égale à une tolérance T_u (71)

$$\eta_u = \left(\frac{\langle \Delta U_i - \Delta U_{i-1} \rangle \cdot \langle \{A\}_i - \{A\}_{i-1} \rangle}{\langle U_k - \Delta U_i \rangle \cdot \langle \{U_k\} - \{A\}_i \rangle} \right)^{1/2} < T_u \quad (71)$$

U_s est le vecteur déplacements des nœuds de la structure, correspondant à la dernière étape stable. Si au bout d'un certain nombre d'itérations, fixé au début, la relation (71) n'est pas vérifiée, nous considérons que la solution diverge. Le processus itératif est repris avec un pas de chargement égal à la moitié du pas de chargement précédent. A chaque itération, le système linéaire (69) est modifié pour prendre en compte les conditions aux limites de la structure.

5.2 Séquences de calcul

L'analyse de la structure est effectuée "pas à pas". Nous supposons connus :

- les déplacements, sollicitations et déformations de la structure à l'étape r ;
 - les accroissements de déplacements $\{\Delta U\}_r$ des nœuds (cette valeur est prise égale à zéro pour la première itération). Elle est ensuite fournie par l'itération précédente.
- Les séquences de calcul sont données à la figure 5.

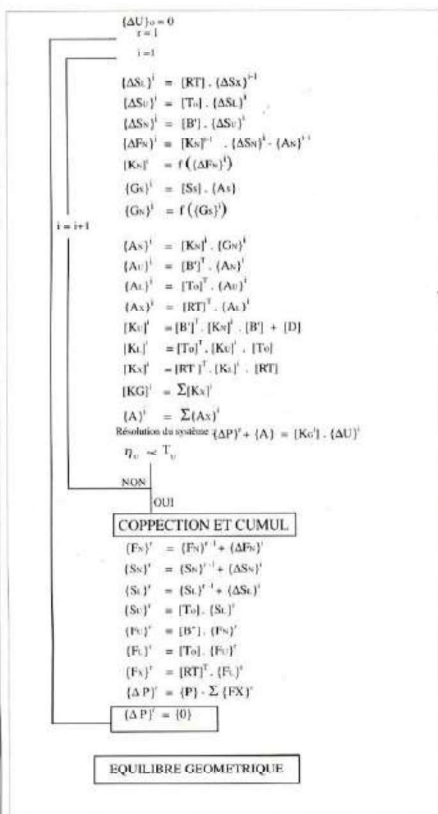


Figure 5 : Séquences de calcul

6. Conclusion

Une méthode d'analyse non linéaire des ossatures planes, en béton armé et béton précontraint, est développée. La non linéarité est considérée sous ses deux aspects : mécanique (comportement non linéaire des matériaux) et géomé-

trique (effet du second ordre dus aux déplacements des nœuds).

La structure est discrétisée en éléments finis (éléments barres). Le chargement est appliqué "pas à pas", jusqu'à la ruine de la structure. Un logiciel est ainsi élaboré et écrit suivant les normes fortran 77 et implanté sur PC. Ce logiciel se caractérise par une gestion dynamique de la mémoire centrale. Les résultats du calcul, confrontés à des résultats d'essais sur des structures en béton armé et précontraint testées par ailleurs, font l'objet de la deuxième partie de cet article ■

Annexe

Etude d'une section droite

L'étude d'une section droite d'un élément de poutre est effectuée en flexion plane. L'effet de la précontrainte est introduit par la méthode "interne". Le câble, solidaire au béton après son injection, possède une prédéformation par rapport à celui-ci. Les hypothèses admises sont :

- les déformations sont petites et le comportement est élastique non-linéaire ;
- l'hypothèse des sections planes est conservée ;
- l'adhérence entre les aciers et le béton est parfaite (absence de glissement).

Dans la présente étude, les déformations dues à l'effort tranchant font l'objet d'une analyse linéaire. Les sollicitations extérieures s'écrivent sous forme d'un vecteur $\{\Delta F_{sn}\}$ contenant les accroissements de sollicitations normales $\{\Delta F_{st}\}$ contenant les sollicitations tangentes (A1).

$$\{\Delta F_{sn}\} = (\Delta N, \Delta M)^T \quad (A1)$$

$$\{\Delta F_{st}\} = \Delta T$$

L'action de la précontrainte, lors de la mise en tension des câbles, s'écrit sous forme d'un vecteur $\{A_{sn}\}$, contenant les sollicitations normales et d'un vecteur $\{\Delta F_{st}\}$ contenant les sollicitations tangentes (A2).

$$\{A_{sn}\} = - \sum_{i=1}^{Np} \sigma_{oi} \cos \alpha_i \begin{bmatrix} 1 \\ Z_{pi} \end{bmatrix} \cdot A_{pi}$$

$$\{\Delta F_{st}\} = - \sum_{i=1}^{Np} \sigma_{oi} \sin \alpha_i \cdot A_{pi} \quad (A2)$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Virlogeux : "Calcul des structures en élasticité non linéaire". *Annales des Ponts et chaussées*, n°40-4, 1986.

[2] M. Virlogeux, A. M'rad : "Etude d'une section de poutre en élasticité non linéaire". *Annales de l'ITBTP*, n°444, mai 1986.

[3] B. Espion : "Contribution à l'analyse non linéaire des ossatures planes" Application aux structures planes en béton armé". *Thèse de Doctorat, université libre de Bruxelles*, 1986.

[4] F. Maia, A. Grelat & B. Fouré : "Analyse non linéaire des ossatures en béton armé ou précontraint compte tenu du retrait, fluage et de la relaxation". *Annales de l'ITBTP*, n°412, février 1983.

[5] H. Hammoum : "Simulation numérique du comportement non-linéaire des ossatures planes". *Thèse de magister, université de Tizi-Ouzou, Algérie* mars 1998.

[6] M.S. Kachi : "Calcul non linéaire, jusqu'à rupture, d'une section en béton armé de fibres métalliques". *Thèse de magister, université de Tizi-Ouzou, Algérie*, février 1997.



[7] Y. Bouafia :
"Simulation numérique du comportement moyen, jusqu'à rupture, d'une zone de poutre. Application au béton armé, béton précontraint et / ou béton de fibres". Mémoire de DEA, université Paris 6, Juin 1987.

[8] O. Nait-Rabah :
"Simulation numérique du comportement non linéaire des ossatures spatiales". Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, 1990.

L'équilibre de la section droite se traduit par l'égalité des accroissements d'efforts sollicitants et les accroissements d'efforts internes (A3)

$$\begin{bmatrix} \{\Delta F_{sn}\} \\ \{\Delta F_{st}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{A_{sn}\} \\ \{A_{st}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\Delta F_{mn}\} \\ \{\Delta F_{mt}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\Delta F_{an}\} \\ \{\Delta F_{at}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\Delta F_{pn}\} \\ \{\Delta F_{pt}\} \end{bmatrix} \quad (A3)$$

La relation matricielle liant les accroissements d'efforts sollicitants et les accroissements de déformations dans une section droite en béton armé et béton précontraint est donnée par (A4).

$$\begin{bmatrix} \Delta F_{sn} \\ \Delta F_{st} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{sn} \\ A_{st} \end{bmatrix} = [K_s] \begin{bmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \delta_t \end{bmatrix} \quad (A4)$$

Pour un accroissement donné d'effort sollicitant, la résolution en déformation de l'équation précédente est itérative. A l'équilibre de la section, l'accroissement de déformation $\{\Delta \delta\}$ est donné par (A5)

$$\{\Delta \delta\} = [S_s] \cdot \{\Delta F_s\} + \{G_s\} \quad \{\Delta \delta\} = \begin{bmatrix} \{\Delta \delta_n\} \\ \{\Delta \delta_t\} \end{bmatrix}$$

$$\{\Delta F_s\} = \begin{bmatrix} \{\Delta F_{sn}\} \\ \{\Delta F_{st}\} \end{bmatrix} \quad \{A_s\} = \begin{bmatrix} \{A_{sn}\} \\ \{A_{st}\} \end{bmatrix}$$

$$\{G_s\} = [S_s] \cdot \{A_s\} \quad (A5)$$

En considérant un état d'équilibre d'une section soumise à des sollicitations extérieures, ces efforts s'écrivent sous forme d'un vecteur $\{F_s\}$, et la déformation sous forme d'un vecteur $\{\Delta F_s\}$, l'accroissement de déformation $\{\Delta \delta_s\}$ de la section est recherché, en utilisant la méthode des substitutions. Cette méthode consiste à construire une suite de solutions : $\{\Delta \delta_1\}$, $\{\Delta \delta_2\}$, $\{\Delta \delta_3\}$, ..., $\{\Delta \delta_i\}$.

$\{\Delta \delta\}_i$ étant calculé à partir de $\{\Delta \delta\}_{i-1}$, en résolvant le système linéaire (A6).

$$\{\Delta F_s\} + \{A_s\} = [K_s]_{i-1} \cdot \{\Delta \delta\}_i \quad (A6)$$