

# FORMULATION MATRICIELLE D'UN ELEMENT COURBE POUR L'ANALYSE DES COQUES MINCES DE REVOLUTION

**A. BENANANE**

Ingénieur d'Etat de l'ENPT, Magister en Génie Civil de l'USTHB  
Maitre-Assistant, Institut de Génie-Civil de Mostaganem

**A. BELAHCENE**

Master of Philosophy de newcastle (Angleterre)  
Chargé de Cours au C.U de Mostaganem

**A. CHELGHOU**

Professeur, Institut de Génie-civil, Mostaganem

## Résumé

*L'exploitation des résultats issus d'une étude de convergence, réalisée sur trois exemples significatifs (membrane pure, flexion pure et flexion-membrane combinées) et traitée à l'aide d'un programme de calcul élaboré sur la base d'une formulation matricielle adéquate, a montré les grandes qualités et la performance de cet élément courbe respectivement dans le domaine linéaire et non linéaire.*

**Mots clés :** plaques • coques • éléments finis • non linéarité • stabilité.

## 1 INTRODUCTION

La modélisation habituelle consiste à représenter la surface de la coque par des "trones de cône" et introduit de ce fait des discontinuités dans la représentation géométrique. S'il est évident que l'effet des discontinuités doit s'estomper lorsque le maillage est affiné, il nous a paru cependant intéressant de développer un modèle courbe afin d'apprécier d'une part, les erreurs de modélisation et de permettre d'autre part, une plus grande souplesse dans la description de la géométrie des surfaces.

## 2 DEFINITION ANALYTIQUE DE LA GEOMETRIE DE L'ELEMENT

L'étude des coques est dans le cas général un problème spatial ou tridimensionnel. Néanmoins, l'étude des coques de révolution soumises à des chargements

axi-symétriques est un problème plan ou bidimensionnel. Considérons désormais un plan méridien quelconque (repère  $r, z$  de la Figure 1) et étudions le comportement d'une coque par la méthode des éléments finis. Trois modèles d'éléments sont envisagés : l'élément plan pour l'étude des plaques, l'élément circulaire pour l'étude des sphères et l'élément courbe pour l'étude des coques de révolution de forme quelconque.

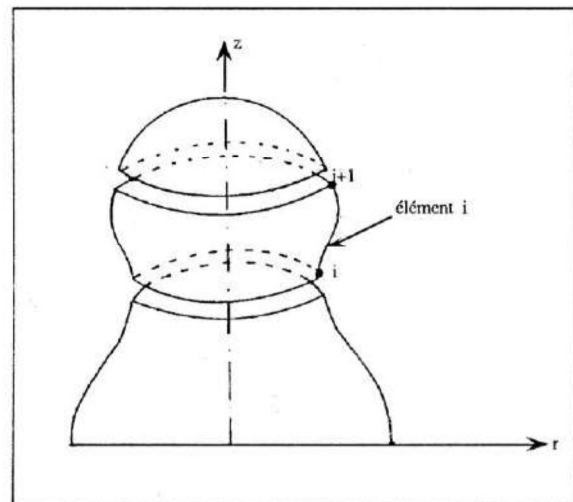


Figure 1 : Discrétisation de la coque.

### 2.1 Élément à géométrie quelconque (Type 3)

D'une part, pour obtenir une représentation géomé-

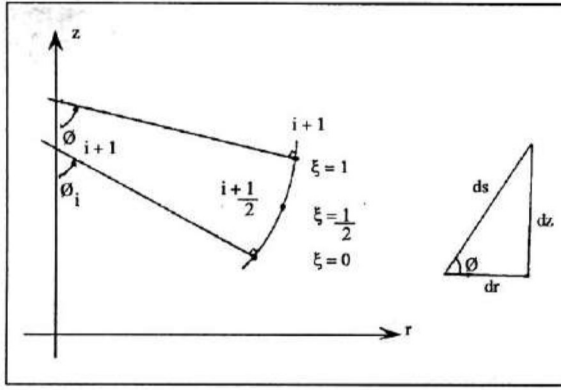


Figure 2 : Définition de l'élément courbe.

trique aussi exacte que possible de la coque et d'autre part, pour assurer la continuité de la pente du méridien entre deux éléments adjacents, nous introduisons l'approximation suivante sur la géométrie [1] soit :

$$\left[ \begin{array}{l} r(\xi) = [1-\xi^2(3-2\xi)]r_i + \xi^2(3-2\xi)\dot{r}_{i+1} + i \\ \quad \quad \quad \xi(1-\xi)^2 r_i - \xi^2(1-\xi)\dot{r}_{i+1} \\ z(\xi) = [1-\xi^2(3-2\xi)]z_i + \xi^2(3-2\xi)\dot{z}_{i+1} \\ \quad \quad \quad + \xi(1-\xi)^2 z_i - \xi^2(1-\xi)\dot{z}_{i+1} \end{array} \right. \quad (1)$$

où

$\xi$  est le paramètre de l'approximation de telle sorte que  $0 \leq \xi \leq 1$

$r_i$  et  $z_i$  sont les coordonnées des nœuds

$\dot{r}_i$  et  $\dot{z}_i$  sont leurs dérivées par rapport au paramètre de  $\xi$ .

Les quantités du type  $r_i$  et  $z_i$  sont des données du problème, elles représentent les coordonnées de chaque nœud  $i$ . Quant aux quantités du type  $\dot{r}$  et  $\dot{z}$  (dérivées de  $\dot{r}$  et  $\dot{z}$  par rapport au paramètre  $\xi$ ), elles sont données par les expressions suivantes :

$$\dot{r}_i = \frac{A \operatorname{tg} \phi_{i+1} - B}{\operatorname{tg} \phi_{i+1} - \operatorname{tg} \phi_i} \quad (2)$$

$$\dot{r}_{i+1} = \frac{A \operatorname{tg} \phi_i - B}{\operatorname{tg} \phi_{i+1} - \operatorname{tg} \phi_i} \quad (3)$$

$$\dot{z}_i = \dot{r}_i \operatorname{tg} \phi_i \quad (4)$$

$$\dot{z}_{i+1} = \dot{r}_{i+1} \operatorname{tg} \phi_{i+1} \quad (5)$$

où

$$A = 8 r_{i+\frac{1}{2}} - 4(r_i + r_{i+1}) \quad (6a)$$

$$B = 8 z_{i+\frac{1}{2}} - 4(z_i + z_{i+1}) \quad (6b)$$

et

$$\phi_i = \operatorname{Arctg} \left( \frac{\dot{z}_i}{\dot{r}_i} \right) \quad (7a)$$

$$\phi_{i+1} = \operatorname{Arctg} \left( \frac{\dot{z}_{i+1}}{\dot{r}_{i+1}} \right) \quad (7b)$$

## 2.2 Élément circulaire (type 2)

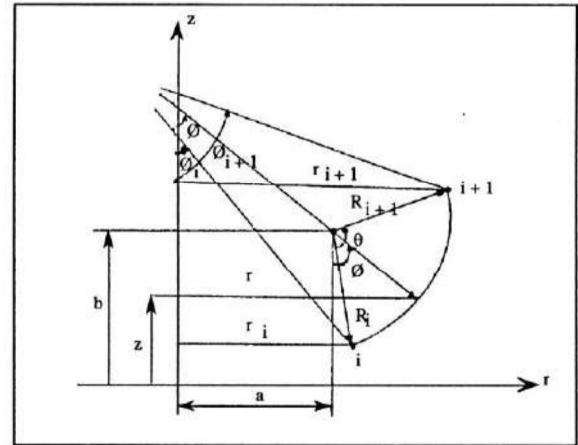


Figure 3 : Définition de l'élément circulaire.

Le but étant toujours de calculer les paramètres  $\phi_i$ ,  $\phi_{i+1}$  et les dérivées successives de  $r$  et  $z$  à partir des coordonnées nodales.

D'après la figure 3, les équations paramétriques du cercle s'écrivent :

$$\left[ \begin{array}{l} r(\xi) = a + R \sin(\phi_i + \xi\theta) \\ z(\xi) = b - R \cos(\phi_i + \xi\theta) \end{array} \right. \quad (8)$$

où

$$\phi_i = \operatorname{Arcsin} \left( \frac{r_i}{R} \right) \quad (9a)$$

$$\phi_{i+1} = \operatorname{Arcsin} \left( \frac{r_{i+1}}{R} \right) \quad (9b)$$

et

$$\begin{cases} \dot{r}_i = R \theta \cos \phi_i \\ \dot{z}_i = R \theta \sin \phi_i \end{cases} \quad (10a)$$

$$\quad (10b)$$

$$\begin{cases} \dot{r}_{i+1} = R \theta \cos \phi_{i+1} \\ \dot{z}_{i+1} = R \theta \sin \phi_{i+1} \end{cases} \quad (11a)$$

$$\quad (11b)$$

### 2.3 Élément plan (type 1)

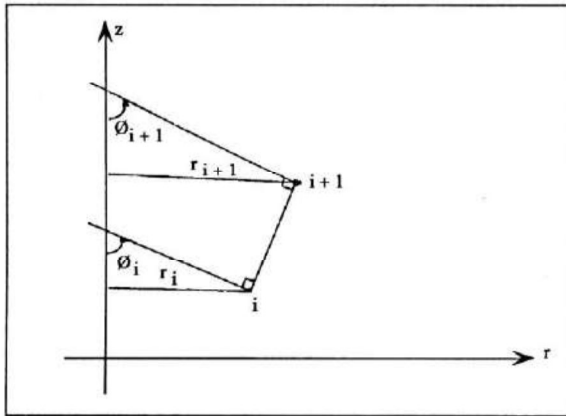


Figure 4 : Définition de l'élément plan.

D'après la figure 4, les équations paramétriques de cet élément s'écrivent :

$$\begin{cases} r(\xi) = (r_{i+1} - r_i)\xi + r_i \\ z(\xi) = (z_{i+1} - z_i)\xi + z_i \end{cases} \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (12)$$

Nous remarquons que la géométrie de cet élément est parfaitement définie à la seule connaissance des coordonnées nodales. Quant aux dérivées successives de r et z, elles sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \dot{r}_i = \dot{r}_{i+1} = r_{i+1} - r_i \\ \dot{z}_i = \dot{z}_{i+1} = z_{i+1} - z_i \end{cases} \quad (13a)$$

$$\quad (13b)$$

## 3 FORMULATION DES FONCTIONS D'INTERPOLATION

### 3.1 Choix d'un champ de déplacements

Compte tenu de ce qui a été dit au paragraphe 2,

le vecteur déplacement d'un point de la coque a donc trois composantes (Figure 5).

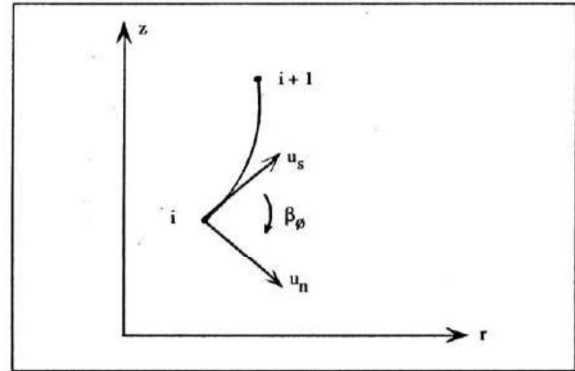


Figure 5 : Déplacements aux nœuds de l'élément dans un repère local.

Soit dans le repère local :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_s \\ u_n \\ \beta_\phi \end{Bmatrix} \quad (14)$$

où

$$\beta_\phi = \frac{\partial u_n}{\partial s} - K_\phi u_s \quad (15)$$

avec :

$u_s$  représente le déplacement suivant le méridien  
 $u_n$  représente le déplacement suivant la normale au méridien.

$\beta_\phi$  représente la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan (r, z). Elle est définie par la théorie classique des coques minces de révolution [2].

$K_\phi$  représente la courbure principale dans la direction méridienne.

Comme la rotation est dépendante des composantes de déplacement  $u_s$  et  $u_n$ , l'approximation que nous introduisons pour ces composantes est la suivante [3] :

$$u_s = \alpha_1 \sin \phi + \alpha_2 r \cos \phi + \alpha_3 \xi + \sum_{k=1}^{p-6} \alpha_{k+6} \xi^{k+1} \quad (16a)$$

$$u_n = -\alpha_1 \cos \phi + \alpha_2 r \sin \phi + \alpha_4 \xi + \alpha_5 \xi^2 + \alpha_6 \xi^3 + \sum_{k=1}^q \alpha_{p+k} \xi^{k+3} \quad (16b)$$

où

$$p \geq 6 \quad \text{et} \quad q \geq 0$$

Pour la même raison citée ci-dessus, nous pouvons exprimer la rotation en fonction du paramètre  $\xi$  soit :

$$\beta_{\theta} = \frac{1}{s} \left( \frac{du_n}{d\xi} \right) - \kappa_{\theta} u_s \quad (17)$$

où  $\dot{s}$  - dérivée de  $s$  par rapport au paramètre  $\xi$

### 3.2 Expressions des fonctions de forme

En écrivant d'une part, les composantes de déplacement ( $u_s, u_n, \beta_{\theta}$ ) sous forme matricielle  $\{u\} = [\psi]\{\alpha\}$  et les déformations infinitésimales de membrane ( $\epsilon_{\theta}, \epsilon_{\theta}, \kappa_{\theta}, \kappa_{\theta}$ ) sous forme matricielle  $\{\epsilon\} = [L]\{u\}$ . En substituant ensuite  $\{u\} = [\psi]\{\alpha\}$  dans la 2<sup>ème</sup> équation et sachant que  $\{\alpha\} = [B]\{d\}$ , nous obtenons respectivement les interpolations nodales des champs de déformations, de déplacement et des contraintes soient :

$$\{\epsilon\} = [C][B]\{d\} \quad (18)$$

$$\{u\} = [\psi][B]\{d\} \quad (19)$$

$$\{\sigma\} = [D][C][B]\{d\} \quad (20)$$

où

$[\psi]$  est une matrice de dimension  $(3 * p+q)$   
 $[C]$  est une matrice de dimension  $(4 * p+q)$   
 $[B]$  est une matrice de dimension  $(p+q * p+q)$   
 $[D]$  est une matrice de dimension  $(4 * 4)$

$$\{d\}^T = \{u_{r0}, u_{z0}, \beta_{\theta 0}, u_{r1}, u_{z1}, \beta_{\theta 1}, \alpha_7, \dots, \alpha_{p+q}\}$$

représente le vecteur des déplacements nodaux de l'élément dans le repère global qui contient les coefficients additionnels  $\alpha_{p+q}$ .

### 4 FORMULATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE

En écrivant l'énergie de déformation interne due

$$J_{E,n}^{(1)} = \frac{1}{2} \{d\}^T [K_{E,n}] \{d\} \quad (21)$$

aux efforts appliqués sous la forme quadratique [4] :

Nous en déduisons alors la matrice de rigidité élémentaire soit :

$$[K_{E,n}] = [B]^T \left( 2\pi \int_0^1 [C]^T [D] [C] r(\xi) s d\xi \right) [B] \quad (22)$$

### 5 FORMULATION DES VECTEURS DES CHARGES NODALES EQUIVALENTES

Puisque notre but est d'étudier la stabilité des

coques sous chargement statique et thermique, nous considérons alors les charges suivantes :

- Charges dues aux efforts appliqués
- Charges dues aux déformations initiales

### a/ Formulation du vecteur des charges nodales équivalentes dues aux efforts appliqués.

En écrivant l'expression de la variation du travail des forces extérieures sous la forme :

$$\delta T_{E,n} = \{\delta d\}^T \{P_{E,n}\} \quad (23)$$

(produit d'un déplacement nodal par un vecteur nodal), nous en déduisons alors le vecteur :

$$\{P_{E,n}\} = 2\pi [B]^T \left( \int_0^1 [\psi]^T \{P\} r(\xi) s d\xi \right) \quad (24)$$

### b/ Formulation du vecteur des charges nodales équivalentes dues aux déformation initiales

De même, en écrivant l'expression de la variation de l'énergie de déformation due à des déformations initiales d'origine thermique par exemple sous la forme :

$$\delta J_{E,n}^{(0)} = - \{\delta d\}^T \{P_{E,n}^{(0)}\} \quad (25)$$

Nous en déduisons alors le vecteur :

$$\{P_{E,n}^{(0)}\} = 2\pi [B]^T \left( \int_0^1 [C]^T \{\sigma^{(0)}\} r(\xi) s d\xi \right) \quad (26)$$

### 6 RELATION D'EQUILIBRE D'UN ELEMENT

Pour un élément  $n$ , l'équation d'équilibre est obtenue en appliquant le théorème des travaux virtuels soit :

$$\delta J_{E,n} = \delta T_{E,n} - \delta J_{E,n}^{(0)} \quad (27)$$

En remplaçant chacun des termes de l'égalité par leur expression respective que nous venons d'établir, l'équation d'équilibre pour un élément  $n$  devient alors :

$$[K_{E,n}] \{d\} = \{P_{E,n}^{(0)}\} + \{P_{E,n}\} \quad (28)$$

### 7 ASSEMBLAGE DES ELEMENTS : FORMATION DE LA MATRICE GLOBALE $[K_s]$ ET DU VECTEUR GLOBAL $\{P_s\}$

Après élimination des coefficients supplémentaires dans le vecteur  $\{d\}$  et en exprimant l'équilibre de la structure entière par application du théorème des tra-

vaux virtuels à tous les éléments, on obtient l'équation d'équilibre global de la structure soit :

$$[K_S] \{U_S\} = \{P_S\} \quad (29)$$

où

$$[K_S] = \sum [A]^T [K_{E,n}^a] [A] \quad (30)$$

$[K_S]$  - matrice de rigidité de la structure dans le repère global (r, z)

$$\{U_S\}^T = \{u_{r0}, u_{z0}, \beta_{\theta 0}, u_{r1}, u_{z1}, \beta_{\theta 1}, \dots, \dots, u_{rn}, u_{zn}, \beta_{\theta n}\} \quad (31)$$

$\{U_S\}^T$  - vecteur des déplacements nodaux dans le repère (r, z)

$$\{P_S\} = \sum_n [A]^T \{P_{E,n}^a\} \quad (32)$$

$\{P_S\}$  - vecteur des charges nodales équivalentes dues respectivement aux efforts appliqués et aux déformations initiales.

$[A]$  - matrice d'expansion de dimension (p+q) x (p+q)

## 8 DETERMINATION DES CHAMPS DE DEPLACEMENTS ET DES EFFORTS RESULTANTS

La résolution du système d'équation linéaire (équation 29) par une méthode numérique notamment méthode de CHOLESKY nous donne le vecteur  $\{U_S\}$  et par conséquent les vecteurs  $\{U_{E,n}\}$  pour chaque élément n. En substituant ensuite les vecteurs déplacements nodaux des éléments  $\{U_{E,n}\}$  dans les relations d'interpolation, nous obtenons respectivement :

### 8.1 Le champ de déplacements

$$\{u\} = \{u_s, u_n, \beta_\theta\}^T = [\psi_1] \{U_{E,n}\} + [\psi_2] [K_{22}]^{-1} \left( \{P_{E,n}^{(b)}\} + \{P_{E,n}^{(0)(b)}\} \right) - [\psi_2] [K_{22}]^{-1} [K_{21}] \{U_{E,n}\} \quad (33)$$

où :

$[\psi_1]$  - matrice (3x6)

$[\psi_2]$  - matrice (3x p+p-6)

### 8.2 Le champ des déformations

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_\theta, \varepsilon_\theta, x_\theta, x_\theta\}^T = [L_1] \{U_{E,n}\} + [L_2] [K_{22}]^{-1} \left( \{P_{E,n}^{(b)}\} + \{P_{E,n}^{(0)(b)}\} \right) - [L_2] [K_{22}]^{-1} [K_{21}] \{U_{E,n}\} - \{\varepsilon^{(0)}\} \quad (34)$$

où :

$[L_1]$  - matrice (4x6)

$[L_2]$  - matrice (4xp+q-6)

$\{\varepsilon^{(0)}\}$  - vecteur des déformations initiales

## 8.3 Le champ des contraintes

$$\{\sigma\} = \{N_\theta, N_\theta, M_\theta, M_\theta\}^T = [S_1] \{U_{E,n}\} + [S_2] [K_{22}]^{-1} \left( \{P_{E,n}^{(b)}\} + \{P_{E,n}^{(0)(b)}\} \right) - [S_2] [K_{22}]^{-1} [K_{21}] \{U_{E,n}\} - \{\sigma^{(0)}\} \quad (35)$$

où

$[S_1]$  - matrice (4x6)

$[S_2]$  - matrice (4xp+q-6)

$\{\sigma^{(0)}\}$  - vecteur des contraintes initiales

## 9 ETUDE DE CONVERGENCE DANS LE DOMAINE ELASTIQUE-LINEAIRE

La formulation matricielle de l'élément courbe étant complètement développée, il est donc nécessaire de faire une étude de convergence pour dégager la performance et les qualités de cet élément.

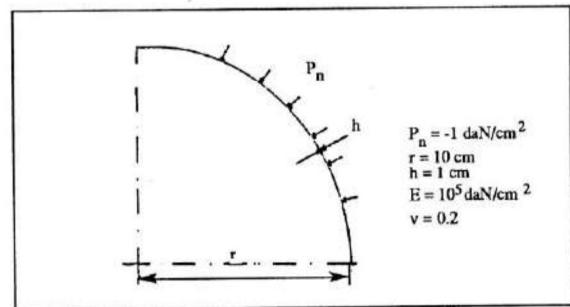


Figure 6 : Sphere sous pression (données).

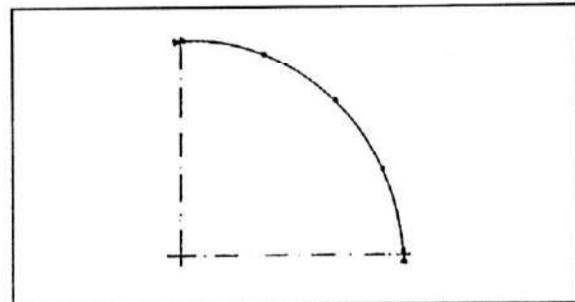


Figure 7 : Sphere sous pression (maillage type).

### 9.1 Exemple N°1 : Sphere sous pression extérieure

#### 9.1.1 Test de convergence sur la géométrie de l'élément

Le tableau n°1 montre les résultats obtenus avec les paramètres suivants :

NEL = 10, NG = 5, P = 6, q = 0

Type d'élts TYPE	Théorie de membrane $\frac{N_{\theta t}}{h} = \frac{N_{\theta t}}{h}$	Valeurs calculées par programme			
		$\frac{N_{\theta n}}{h}$	$\frac{N_{\theta n}}{h}$	$\frac{6M_{\theta n} (max)}{h^2}$	$\frac{6M_{\theta n} (max)}{h^2}$
1	5.00	4.98	4.98	0.156	-0.186
2	5.00	4.99	4.99	-0.036	-0.036
3	5.00	4.99	4.99	-0.300	-0.156

Tableau 1 : Test sur la géométrie de l'élément.

### COMMENTAIRE

Nous remarquons une excellente concordance entre les valeurs numériques données par le programme élaboré sur la base de la formulation matricielle précédente et celles données par la théorie de membrane concernant les efforts méridiens et circonférentiels ( $N_{\theta}$  et  $N_{\theta}$ ).

Par contre, les efforts de flexion sont pratiquement nuls comme le prévoit la théorie pour une coque suffisamment mince (théorie de membrane).

#### 9.1.2 Test de convergence sur le maillage

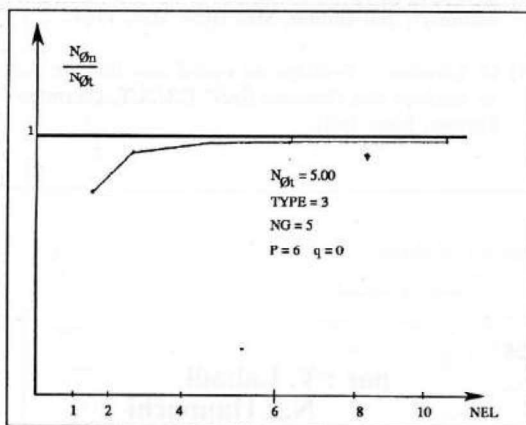


Figure 8 : Test de convergence sur le maillage.

### COMMENTAIRE

Nous observons qu'après une discrétisation en six éléments, l'erreur commise sur la valeur numérique des efforts de membrane est de l'ordre de 0.4% par rapport à la valeur théorique.

Par conséquent, l'élément courbe donne d'excellents résultats.

### 9.2 EXEMPLE N° 2 : PLAQUE CIRCULAIRE ENCASTREE ET CHARGEE TRANSVERSALEMENT

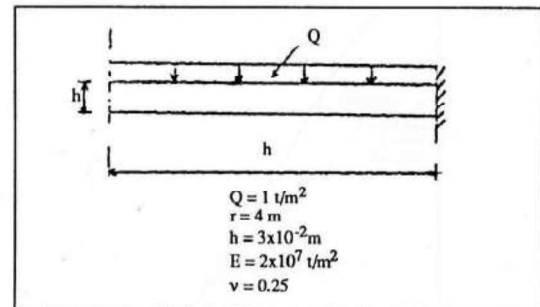


Figure 9 : Plaque circulaire (données).

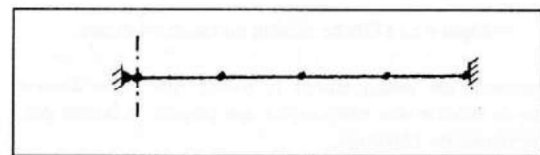


Figure 10 : Plaque circulaire (maillage type).

#### 9.2.1 Test de convergence sur l'approximation du champ de déplacement en flexion

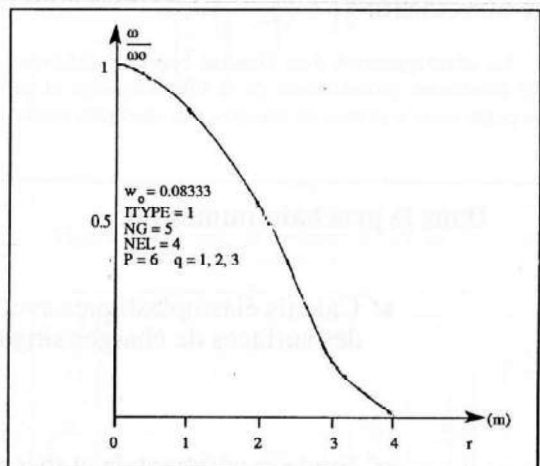


Figure 11 : Flèche suivant un rayon arbitraire.

### COMMENTAIRE

Nous remarquons une très faible influence de degré d'interpolation du champ de déplacement en flexion. En effet, on obtient les mêmes résultats pour  $q = 1, 2, 3$  c'est-à-dire pour des champs de degré 4, 5, 6 respectivement.

Cependant la valeur de la flèche qu'on obtient numéri-

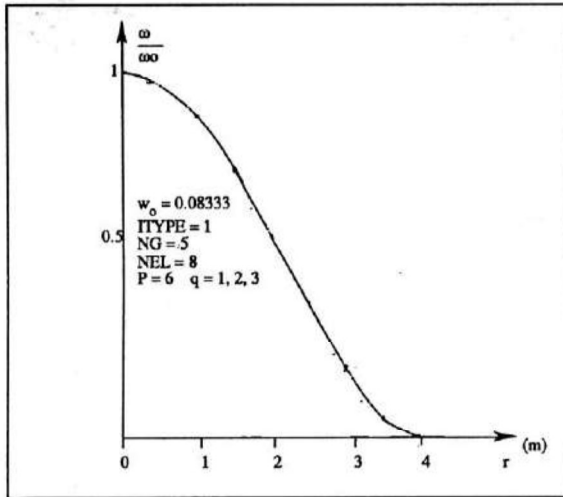


Figure 12 : Flèche suivant un rayon arbitraire.

quement est pratiquement la même que celle donnée par la théorie des plaques, ce qui prouve la bonne performance de l'élément.

### 9.2.2 Test de convergence sur le maillage

D'après les figures (11 et 12), nous constatons une parfaite convergence en ce qui concerne la valeur de la flèche au centre.

## 10 CONCLUSION

Le développement d'un élément courbe satisfaisant les conditions géométriques de la fibre moyenne et de sa pente nous a permis de mesurer, sur quelques exem-

ples, l'écart entre la solution obtenue par une modélisation en "Tronc de cône" et celle obtenue par une représentation géométrique exacte.

Dans le domaine linéaire, l'écart enregistré est de l'ordre de 5%. Par conséquent, la modélisation par éléments plans reste parfaitement justifiée exclusivement dans ce domaine-là.

Cependant, l'introduction d'un élément courbe permet une bien plus grande souplesse dans la description de la géométrie des surfaces.

Aussi, dans les deux articles qui vont suivre, nous fournirons quelques résultats de l'influence de la non linéarité géométrique et du chargement non conservateur notamment thermique sur la stabilité des coques minces de révolution.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Giannini and G.A. Miles : "A curved element approximation in the analysis of axi-symmetric thin shells" Int. Jn Num. Meth. Eng. vol.2, pp 459-476, 1970.
- [2] B. Peuchot et M. Lemaire : "Equations de la théorie des coques et déformations des coques de révolution", Rapport de convention n°1 INSA - NERSA, Mai 1980.
- [3] S. Timoshenko and J. Gere : "Theory of elastic stability", 2nd edition, Mac Graw Hill, 1961.
- [4] M. Lemaire : "Principe du calcul non linéaire par la méthode des éléments finis" C.U.S.T, Clermont-Ferrant, Mars 1981.

### Dans le prochain numéro :

✓ Calculs élastoplastiques avec des surfaces de charges singulières

par : Y. Labadi  
N.E Hannachi

✓ Etude expérimentale et théorique de la poussée passive sur pieu rigide.

par : M. Meksaouine  
Y. Cheriet

✓ Calcul et analyse de la réponse dynamique des fondations enterrées par une méthode approximative au sol de renforcement.

par : Z. Harichane  
M. Ghrici