

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Supérieure des Travaux Publics



**Département de la Recherche Scientifique et Post-Graduation
Laboratoire des Travaux Publics & Ingénierie de Transport et Environnement TPITE**

MÉMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de
Magister en Génie Civil
Option : Structure et Matériaux

Par

MEDJAMIA Mohamed El-Fatih
Ingénieur d'Etat des Travaux Publics

Thème

Estimation de la Rigidité des Structures en Béton Armé à l'Aide de l'Analyse Statique Non-Linéaire Pushover

Mémoire Soutenu le :

Devant le Jury composé de :

M. HADID	Maître de conférences, ENSTP	Président
M. BENSAIBI	Maître de conférences, Université de Blida	Directeur de mémoire
B. MEZAZIGH	Chargé de cours, Université de Boumerdès	Co-encadreur de mémoire
A. ZERZOUR	Maître de conférences, ENSTP	Examineur
M. NAILI	Maître de recherche, CGS	Examineur
K. TOUNSI	Maître assistant, ENSTP	Invité

À la mémoire de mon père

À toute ma famille

À ma fiancée

À tous mes amis ;

Je dédie ce modeste travail

Remerciements

Toute ma gratitude, grâce et remerciements vont à dieu ALLAH le tout puissant qui m'a donné le courage et la volonté pour concrétiser ce modeste travail.

Puis ;

Je tiens à exprimer ma gratitude et ma reconnaissance à monsieur **M. BENSAIBI**, maître de conférence à l'université de Blida, et monsieur **B. MEZAZIGH**, chargé de cours à l'université de Boumerdès, qui m'ont encadré et guidé pour l'accomplissement de ce travail.

Je voudrais exprimer mes vifs remerciements à monsieur **M. HADID**, maître de conférence à l'ENSTP, d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie également monsieur **A. ZERZOUR**, maître de conférence à l'ENSTP, d'avoir examiné ce modeste travail.

Je remercie vivement monsieur **M. NAILI**, maître de recherche au CGS, d'avoir accepté d'être examinateur de ce mémoire.

Je remercie monsieur **K. TOUNSI**, Maître assistant à l'ENSTP, d'avoir accepté de participer au jury d'examen.

Je suis également très reconnaissant à Mme **Z. DERRICHE**, professeur à l'ENSTP, pour ses efforts intenses au service de la post-graduation à l'ENSTP.

Mes sincères remerciements vont finalement à tout le personnel de l'Ecole Nationale Supérieure des Travaux Publics.

ملخص :

نظرا للهزات الزلزالية التي عرفتها العديد من مناطق العالم، فإن اهتماما خاصا منح لقطاع البناء والذي تمثل أساسا في توفير تقنيات حسابية مبسطة للمهندسين لتمكينهم من إجراء قياساتهم وفقا للقواعد سارية المفعول. غير أن هذه السنوات الأخيرة عرفت تطورات هائلة في مجال الهندسة المضادة للزلازل، موسومة خصوصا بقدم مفاهيم جديدة مبنية على تقييم جودة البناية. هذه المفاهيم أبرزت ضرورة الانتقال إلى المجال غير الخطي للبناية بواسطة تحليل سكوني غير خطي Pushover. مما أدى إلى حتمية تلقين أهمية مثل هذه النتائج للمهندسين الذين لا يتوفرون إلزاما على تكوين معمق في هذا المجال. فالأمر يتعلق إذن بإعادة صياغة هذه النتائج عن طريق مفاهيم مألوفة لديهم بهدف استثمار أفضل و فعال لهذه النتائج. في هذا الإطار، نجد أن مفهوم الصلابة يعتبر أحد المفاهيم الأكثر تداولاً بين المهندسين. كما أن خاصية الصلابة تعتبر إحدى الخصائص الجوهرية للبناية و العديد من النظريات المستعملة في حساب مقاييس البناية تركز على هاته الخاصية. من هنا جاءت فكرة هذا العمل و المتمثلة في صياغة النتائج المتحصل عليها من التحليل السكونية غير الخطية بواسطة مفهوم الصلابة.

Abstract :

In view of various earthquakes that have shaken a several countries throughout the world, an especial care was awarded to the building domain. This attention carries principally to offer to the engineers simplified computational tools their making it possible to carry out the operations of predimensioning in accordance with the rules put into force. Nevertheless, these last years, the earthquake resistant engineering knew a great evolution, marked mainly by the advent of the performance based design methods revealing the need for having incursions into the non-linear behaviour of the structure using a non-linear static analysis procedure "Pushover analysis", what made essential to learn to the engineers, who do not have inevitably thorough knowledge in the non-linear analysis of the structures, the importance of the results obtained by this method. Therefore, it is a question of familiarizing this new dialectical near the engineers for a better exploitation of its results. Stiffness represents the concept most used by the engineers. It also represents an intrinsic characteristic of the structure and several approaches of dimensioning often used by the engineers are based on this concept. From which the idea comes from this work and which consists in representing the results obtained by a non-linear Pushover analysis in term of stiffness.

Résumé :

Vu aux multiples séismes ayant secoué les différents pays à travers le monde, une attention particulière a été accordée au domaine de construction portant principalement à offrir aux ingénieurs des outils de calculs simplifiés leurs permettant d'effectuer les opérations de prédimensionnement conformément aux règles mises en vigueur. Néanmoins, ces dernières années, l'ingénierie parasismique a connu une grande évolution marquée principalement par l'avènement des méthodes en performance faisant apparaître la nécessité d'avoir des incursions dans le comportement non-linéaire de la structure à l'aide d'une analyse statique non-linéaire Pushover, ce qui a rendu indispensable d'apprendre aux ingénieurs, qui ne disposent pas forcément de connaissances approfondies dans l'analyse non-linéaire des structures, l'importance des résultats obtenus par cette démarche. Donc, il s'agit de familiariser cette nouvelle dialectique auprès des ingénieurs pour une meilleure exploitation de ses résultats. La rigidité des structures représente la notion la plus utilisée par les ingénieurs. Elle représente une caractéristique intrinsèque de la structure. Plusieurs approches de dimensionnement souvent utilisées par les ingénieurs se basent sur cette rigidité. D'où vient l'idée de représenter les résultats qu'on pourrait obtenir par une analyse non-linéaire en terme de rigidité et qui fera l'objet de ce travail.

SOMMAIRE

	Page
Introduction Générale	11
I. Étude Bibliographique	
I.1. Introduction	12
I.2. Notion de rigidité	12
I.2.1. Cas d'un ressort	12
I.2.2. Approches énergétiques	13
I.2.2.1. Notion de travail	13
I.2.2.2. Énergie potentielle de déformation	14
I.2.2.3. Travail et énergie dans le domaine élastique linéaire	15
I.2.2.4. Principe de la conservation de l'énergie	16
I.2.2.5. Travail de déformation des sollicitations simples dans le cas des poutres	16
a) Effort normal	16
b) Moment fléchissant	17
c) Effort tranchant	17
d) Moment de torsion	18
I.2.2.6. Expression générale de l'énergie potentielle de déformation	18
I.2.2.7. Différentes approches énergétiques	19
I.2.2.7.1. Théorème de Castigliano	19
a) Première forme du théorème	19
b) Deuxième forme du théorème	19
I.2.2.7.2. Simplification de l'expression de l'énergie potentielle	20
I.2.2.7.3. Utilisation d'une sollicitation auxiliaire	20
I.2.2.7.4. Superposition des effets	20
I.2.2.7.4.a. Coefficients d'influence des déplacements	20
I.2.2.7.4.b. Coefficients d'influence des sollicitations	21
I.2.2.7.5. Méthode de Mohr pour le calcul des déplacements	22
I.2.2.7.6. Déplacement produit par une sollicitation unitaire	22
I.2.2.7.7. Théorème de Betti-Maxwell	22
I.2.2.7.7.a. Illustration du théorème	23
I.2.2.7.8. Théorème de Pasternak	23
I.2.2.7.9. Théorème complémentaire	24
I.2.2.8. Énergie potentielle de déformation en état plan de contrainte	25
I.2.2.9. Exemple d'application	27
I.2.2.10. Généralisation	30
I.2.2.11. Remarque	31
I.2.3. Méthode de discrétisation en éléments finis	31
I.2.3.1. Matrice de rigidité d'une structure complexe	31
I.2.3.2. Exemple d'un élément triangulaire pour l'état plan de contraintes	32
I.2.3.3. Obtention de la matrice de rigidité globale d'une structure	36
I.2.3.3.1. Mécanisme d'assemblages des matrices de rigidité élémentaires	36
I.2.3.3.2. Propriétés de la matrice de rigidité	37

I.2.3.4. Equation de l'équilibre dynamique	38
I.2.3.5. Construction de la matrice de rigidité pour un oscillateur à deux degrés de liberté	38
I.2.3.6. Construction de la matrice de rigidité pour un oscillateur à trois degrés de liberté	39
I.2.3.7. Résolution du système $\{F\} = [K] \bullet \{d\}$	40
I.2.3.8. Formulation de la méthode des éléments finis par l'approche des résidus pondérés	40
I.2.3.8.1. Méthodes des résidus pondérés (Method of Weighted Residuals : MWR)	41
I.2.3.8.1.1. Méthode des sous-domaines	42
I.2.3.8.1.2. Méthode des Collocations	42
I.2.3.8.1.3. Méthode de Galerkin	42
I.2.4. Estimation analytique de la rigidité des structures en béton armé	42
I.2.4.1. Rigidité d'un poteau	43
I.2.4.2. Rigidité d'un portique	43
I.2.5. Rigidité de la structure dans le cadre d'une méthode en performance	45
I.2.5.1. Analyse statique non linéaire Pushover	46
I.2.5.2. But de l'analyse Pushover	46
I.2.5.4. Etudes antérieures sur l'analyse Pushover	47
I.3. Conclusion	50
<hr/>	
II. Analyse statique non-linéaire "Pushover"	
II.1. Introduction	51
II.2. Fondement théorique de l'analyse pushover	51
II.2.1. Passage d'un système (MDDL) à un système linéaire à (SDDL) équivalent	52
II.2.2. Déplacement cible (Target displacement)	55
II.2.2.1. Procédures de détermination du déplacement cible selon la FEMA 356	56
II.2.3. Modèle de distribution des charges latérales	58
II.2.3.1. Modèle adopté par la FEMA 356	58
II.2.4. Généralisation de l'analyse Pushover	60
II.3. Procédures d'exécution d'une analyse Pushover	60
II.4. Courbe de capacité et point de performance	61
II.4.1. Point de performance	62
II.4.2. Construction du spectre ADRS	63
II.5. Conclusion	65
<hr/>	
III. Formulations numériques	
III.1. Introduction	66
III.2. Comportement non-linéaire idéalisé des éléments de la structure	66
III.2.1. Comportement non-linéaire idéalisé des régions critiques "les rotules plastiques"	67
III.2.2. Le comportement sismique des poutres	68
III.2.2.1. Estimation de la longueur de la rotule plastique	71
III.2.3. Comportement sismique des poteaux	72
III.2.4. Comportement sismique des voiles	73
III.3. Modélisation par SAP2000	74
III.3.1. Exécution de l'analyse Pushover par SAP2000	74
III.3.2. Description de la procédure éléments finis	75
III.4. Conclusion	77
<hr/>	
IV. Mise en œuvre numérique et exemples étudiés	
IV.1. Introduction	78
IV.2. Caractéristiques des matériaux	78
IV.2.1. Loi de comportement du béton	78
IV.2.2. Loi de comportement de l'acier	79
IV.3. Modèles des bâtiments testés	80

IV.4. Mouvement sismique	82
IV.5. Charges du poids propre et d'exploitation	82
IV.6. Applications	82
IV.6.1. Application 01 : Bâtiment de surface de plancher de 225m ² pour un niveau de performance de "Non-effondrement" (Collapse Prevention, C.P)	82
IV.6.1.1. Bâtiment R+10	82
IV.6.1.1.1. Sections et armatures	83
IV.6.1.1.2. Analyse modale linéaire (méthode spectrale)	84
IV.6.1.1.3. Détermination de la distribution des charges latérales selon la FEMA 356 (Art. 3.3.1.3.2)	84
IV.6.1.1.4. Détermination des lois moment – courbure	85
IV.6.1.1.4.a. Loi moment-courbure pour les poutres	86
IV.6.1.1.4.b. Loi moment-courbure pour les poteaux 50x50	86
IV.6.1.1.5. Modélisation des voiles	89
IV.6.1.1.6. Niveau de performance de la structure	89
IV.6.1.1.7. Récapitulatif	89
IV.6.1.1.8. La courbe Pushover pour le bâtiment R+10	90
IV.6.1.1.9. La courbe de capacité	90
IV.6.1.1.10. Le spectre d'El-Centro au format ADRS	91
IV.6.1.1.11. Détermination du point de performance	91
IV.6.1.1.12. La courbe Pushover du bâtiment amélioré	93
IV.6.1.1.13. Courbe de capacité et point de performance du bâtiment amélioré	93
IV.6.1.1.14. Estimation de la rigidité	95
a. Surface 225 m ² , niveau de performance C.P	96
b. Surface 225 m ² , niveau de performance L.S	97
c. Surface 400 m ² , niveau de performance C.P	98
d. Surface 400 m ² , niveau de performance L.S	99
e. Coordonnées des points de performance	100
IV.7. Estimation de la rigidité	101
a. Surface 225 m ² , niveau de performance C.P	101
b. Surface 225 m ² , niveau de performance L.S	102
c. Surface 400 m ² , niveau de performance C.P	103
d. Surface 400 m ² , niveau de performance L.S	104
IV.7.1. Variation de la rigidité pour les poteaux et les voiles	105
IV.7.2. Variation de la rigidité pour l'étage RDC	106
IV.8. Etude comparative	107
IV.8.1. Commentaires	108
IV.8.2. Exploitation des résultats	109
a. Rapport de rigidité entre les deux niveaux de performance C.P et L.S	109
b. L'élaboration d'un abaque de prédimensionnement	109
IV.8.3. Exemples de validation des résultats	111
IV.8.3.1. Exemple 01	111
IV.8.3.2. Exemple 02	116
IV.9. Conclusion	117
Conclusion générale	118
Références bibliographiques	119

Liste des figures

	Page
Fig. 1.1 : Comportement d'un ressort [1]	12
Fig. 1.2 : (a) : une barre prismatique soumise à une traction ; (b) : Diagramme "F- δ " [2]	14
Figure 1.3 : (a) : corps soumis à des sollicitations extérieures ;(b) : relation contrainte – déformation [2]	14
Figure 1.04 : Loi de Hooke [2]	15
Fig. 1.5 : Tranche élémentaire d'une poutre sollicitée en traction [2]	16
Fig. 1.6 : Tranche élémentaire d'une poutre sollicitée en flexion [2]	17
Fig. 1.7 : Tranche élémentaire d'une poutre sollicitée en torsion [2]	18
Fig. 1.8 : Illustration du théorème de Betti-Maxwell [2]	23
Fig.1.9 : Principe du théorème complémentaire [2]	24
Fig. 1.10 : Déplacements pour les trois cas de chargements [1]	25
Fig. 1.11 : Poutre console soumise à deux sollicitations [1]	27
Fig. 1.12 : Élément triangulaire en contraintes planes	32
Fig. 1.13 : Repère local et repère global	35
Fig. 1.14 : Matrice bande [1]	37
Fig. 1.15 : Système masse-ressort à deux degrés de liberté [3]	39
Fig. 1.16 : Oscillateur à trois degrés de liberté	39
Fig. 1.17 : Présentation de la méthode MUTO pour un niveau RDC ; (a) : raideur d'un poteau, (b) : raideur d'une poutre, (c) : raideur d'un assemblage en travée, (d) : raideur d'un assemblage en coin	43
Fig. 1.18 : Homogénéisation de la section en béton armé [32]	44
Fig. 1.19 : Courbe type Charge-Déformation de "Pushover " : représentation de plages de dommages conventionnelles [8]	45
Fig. 2.1 : L'approximation statique utilisée en analyse Pushover [17]	51
Fig. 2.2 : Exemple de passage d'un système à plusieurs ddl à un système équivalent à un seul ddl : (a) présentation du système, (b) système équivalent à un seul ddl, (c) modèle à plusieurs ddl, (d) modèle à un seul ddl équivalent[18]	52
Fig. 2.3 : (a) : Courbe force-déplacement pour système à plusieurs ddl, (b) pour un système à un seul ddl [9]	53
Fig. 2.4 : Courbe effort tranchant à la base - déplacement en tête [9]	53
Fig. 2.5 : Bi-linéarisation de la courbe effort tranchant à la base-Déplacement en tête [17]	58
Fig. 2.6 : Distribution verticale des charges latérales [17]	59
Fig. 2.7 : Variation de k en fonction de la période fondamentale T et l'effet de k sur les charges latérales [17]	59
Fig. 2.8 : Exécution d'une analyse Pushover [9]	61
Fig. 2.9 : Principe de la courbe de capacité [19]	62
Fig. 2.10 : Spectre en accélération [20]	63
Fig. 2.11 : Spectre en déplacement-accélération [20]	63
Fig. 2.12 : Principe de réduction des spectres pour la détermination du point de performance par une approche en amortissement [21]	64
Fig. 2.13 : Détermination du point de performance [20]	64
Fig. 3.1 : Comportement non-linéaire idéalisé d'un élément structural [8]	66
Fig. 3.2 : Relation Moment-Courbure idéalisée d'un élément structural [8]	67
Fig. 3.3 : Distribution du Moment-Courbure au niveau des zones critiques [8]	68
Fig. 3.4 : Courbure d'une section de poutre rectangulaire [23]	68

Fig. 3.5 : <i>Distribution réelle et idéalisée de la courbure dans le domaine inélastique d'une poutre soumise à une charge sismique [23]</i>	70
Fig. 3.6 : <i>Diagramme moment –rotation [23]</i>	71
Fig. 3.7 : <i>Courbure d'une section rectangulaire soumise à un moment et effort axial [23]</i>	72
Fig. 3.8 : <i>Boîte de dialogue d'analyse Pushover en SAP2000</i>	75
Fig. 3.9 : <i>Caractéristiques générales Force – Déplacement d'un élément [25]</i>	75
Fig. 4.1 : <i>Loi de comportement du béton [6]</i>	78
Fig. 4.2 : <i>Loi de comportement de l'acier [6]</i>	79
Fig. 4.3 : <i>Différentes perspectives du bâtiment de 225m², (a) : vue en 3D, (b) : vue en élévation, (c) : vue en plan</i>	80
Fig. 4.4 : <i>Différentes perspectives de bâtiments de 400 m², (a) : vue en 3D, (b) : vue en élévation, (c) : vue en plan</i>	81
Fig. 4.5 : <i>Spectre lissé El-Centro 5% [7]</i>	82
Fig. 4.6 : <i>Différentes sections et armatures du bâtiment ; (a) : poteau 50 cm x 50 cm, (b) : poteau 40 x 40, (c) : poutre 35 cm x 45 cm, (d) : distribution des sections</i>	83
Fig. 4.7 : <i>Sections des voiles</i>	83
Fig. 4.8 : <i>Modèle de distribution des charges</i>	85
Fig. 4.9 : <i>Localisation des rotules plastiques</i>	85
Fig. 4.10 : <i>Loi moment-courbure des poutres</i>	85
Fig. 4.11 : <i>Courbe d'interaction moment-effort normal pour poteaux 50x50</i>	88
Fig. 4.12 : <i>Loi moment-courbure des poteaux 50x50 du niveau RDC en fonction des différentes valeurs des efforts normaux existants</i>	88
Fig. 4.13 : <i>Courbe Pushover du bâtiment initial R+10</i>	90
Fig. 4.14 : <i>Courbe de capacité du bâtiment initial R+10</i>	90
Fig. 4.15 : <i>Spectre ADRS El-Centro 5%</i>	91
Fig. 4.16 : <i>Définition du point de performance</i>	91
Fig. 4.17 : <i>Sections des poteaux et des poutres</i>	92
Fig. 4.18 : <i>Sections et distribution des voiles selon la hauteur du bâtiment</i>	92
Fig. 4.19 : <i>Courbe Pushover du bâtiment initial et amélioré</i>	93
Fig. 4.20 : <i>Détermination du point de performance</i>	93
Fig. 4.21 : <i>Idéalisation de la courbe Pushover</i>	94
Fig. 4.22 : <i>Portiques des extrémités du niveau RDC</i>	95
Fig. 4.23 : <i>Portiques du milieu du niveau RDC</i>	95
Fig. 4.24 : <i>Courbe Pushover du bâtiment R+10 (225m², CP)</i>	96
Fig. 4.25 : <i>Point de performance R+10</i>	96
Fig. 4.24 : <i>Courbe Pushover du bâtiment R+13 (225m², CP)</i>	96
Fig. 4.25 : <i>Point de performance R+13</i>	96
Fig. 4.24 : <i>Courbe Pushover du bâtiment R+17 (225m², CP)</i>	96
Fig. 4.25 : <i>Point de performance R+17</i>	96
Fig. 4.24 : <i>Courbe Pushover du bâtiment R+20 (225m², CP)</i>	96
Fig. 4.25 : <i>Point de performance R+20</i>	96
Fig. 4.24 : <i>Courbe Pushover du bâtiment R+10 (225m², LS)</i>	97
Fig. 4.25 : <i>Point de performance R+10</i>	97
Fig. 4.24 : <i>Courbe Pushover du bâtiment R+13 (225m², LS)</i>	97
Fig. 4.25 : <i>Point de performance R+13</i>	97
Fig. 4.24 : <i>Courbe Pushover du bâtiment R+17 (225m², LS)</i>	97
Fig. 4.25 : <i>Point de performance R+17</i>	97
Fig. 4.24 : <i>Courbe Pushover du bâtiment R+20 (225m², LS)</i>	97
Fig. 4.25 : <i>Point de performance R+20</i>	97
Fig. 4.24 : <i>Courbe Pushover du bâtiment R+10 (400m², CP)</i>	98

Fig. 4.25 : Point de performance R+10	98
Fig. 4.24 : Courbe Pushover du bâtiment R+13 (400m ² , CP)	98
Fig. 4.25 : Point de performance R+13	98
Fig. 4.24 : Courbe Pushover du bâtiment R+17 (400m ² , CP)	98
Fig. 4.25 : Point de performance R+17	98
Fig. 4.24 : Courbe Pushover du bâtiment R+20 (400m ² , CP)	98
Fig. 4.25 : Point de performance R+20	98
Fig. 4.24 : Courbe Pushover du bâtiment R+10 (400m ² , LS)	99
Fig. 4.25 : Point de performance R+10	99
Fig. 4.24 : Courbe Pushover du bâtiment R+13 (400m ² , LS)	99
Fig. 4.25 : Point de performance R+13	99
Fig. 4.24 : Courbe Pushover du bâtiment R+17 (400m ² , LS)	99
Fig. 4.25 : Point de performance R+17	99
Fig. 4.24 : Courbe Pushover du bâtiment R+20 (400m ² , LS)	99
Fig. 4.25 : Point de performance R+20	99
Fig. 4. 56 : variation de la rigidité des poteaux pour 225m ² , CP	105
Fig. 4. 57 : variation de la rigidité des poteaux pour 225m ² , LS	105
Fig. 4. 58 : variation de la rigidité des poteaux pour 400m ² , CP	105
Fig. 4. 59 : variation de la rigidité des poteaux pour 400m ² , LS	105
Fig. 4. 60 : variation de la rigidité des voiles pour 225m ² , CP	105
Fig. 4.61 : variation de la rigidité des voiles pour 225m ² , LS	105
Fig. 4. 62 : variation de la rigidité des voiles pour 400m ² , CP	105
Fig. 4. 63 : variation de la rigidité des voiles pour 400m ² , LS	105
Fig. 4.64 : Variation de la rigidité du RDC pour 225m ² , CP	106
Fig. 4.65 : Variation de la rigidité du RDC pour 225m ² , LS	106
Fig. 4.66 : Variation de la rigidité du RDC pour 400m ² , CP	106
Fig. 4.67 : Variation de la rigidité du RDC pour 400m ² , LS	106
Fig. 4.68 : Variation de la rigidité des poteaux de 225 m ² pour CP et LS	107
Fig. 4.69 : Variation de la rigidité des voiles de 225 m ² pour CP et LS	107
Fig. 4.70 : Variation de la rigidité des poteaux de 400 m ² pour CP et LS	107
Fig. 4.71 : Variation de la rigidité des voiles de 400 m ² pour CP et LS	107
Fig. 4.72 : Variation de la rigidité du RDC de 225 m ² pour CP et LS	107
Fig. 4.73 : Variation de la rigidité du RDC de 400 m ² pour CP et LS	107
Fig. 4.74 : Variation de la rigidité des poteaux	108
Fig. 4.75 : Variation de la rigidité des voiles	108
Fig. 4.76 : Variation de la rigidité du RDC	108
Fig. 4. 77 : Rigidité des voiles en fonction du nombre d'étages pour le niveau de performance P.C	110
Fig. 4. 78 : Exemple d'un abaque de prédimensionnement des poteaux en fonction de la rigidité déterminée pour différentes surfaces de plancher, nombre d'étages, le niveau de performance C.P et le mouvement sismique d'El-Centro à 5% d'amortissement	110
Fig. 4. 79 : Exemple d'un abaque de prédimensionnement d'étage RDC en fonction de la rigidité déterminée pour différentes surfaces de plancher, nombre d'étages, le niveau de performance C.P et le mouvement sismique d'El-Centro à 5% d'amortissement	110
Fig. 4. 80 : Détermination de rigidité des voiles en fonction du nombre d'étages pour le niveau de performance C.P	112
Fig. 4. 81 : Détermination de la rigidité des poteaux en fonction de la surface de plancher, nombre d'étages, le niveau de performance C.P et le mouvement sismique d'El-Centro à 5% d'amortissement	112

Fig. 4. 82 : Détermination de la rigidité totale du niveau RDC en fonction de la surface de plancher, nombre d'étages, le niveau de performance C.P et le mouvement sismique d'El-Centro à 5% d'amortissement	113
Fig. 4.83 : Courbe Pushover du bâtiment	114
Fig. 4.84 : Détermination du point de performance	114
Fig. 4.85 : Idéalisations de la courbe Pushover	115
Fig. 4.86 : Courbe Pushover du bâtiment	116
Fig. 4.87 : Détermination du point de performance	117

Liste des tableaux

	Page
Tab. 4.1 : Caractéristiques du béton	79
Tab. 4.2 : Caractéristiques de l'acier	79
Tab. 4.3 : Périodes et masses modales des trois premiers modes	84
Tab. 4.4 : Distribution des charges latérales selon FEMA 356	84
Tab. 4.5 : Loi moment – courbure pour les poutres	86
Tab. 4.6 : Loi de comportement des poteaux 50 x 50 pour $N = 2000 \text{ kN}$	86
Tab. 4.7 : Loi de comportement des poteaux 50 x 50 pour $N = 1500 \text{ kN}$	86
Tab. 4.8 : Loi de comportement des poteaux 50 x 50 pour $N = 1000 \text{ kN}$	86
Tab. 4.9 : Loi de comportement des poteaux 50 x 50 pour $N = 500 \text{ kN}$	86
Tab. 4.10 : Rigidité du niveau RDC pour le bâtiment R+10 et niveau de performance C.P	95
Tab. 4.11 : Coordonnées des points de performance	100
Tab. 4.12 : Estimation de la rigidité des différents cas étudiés pour 225 m^2 , C.P	101
Tab. 4.13 : Estimation de la rigidité des différents cas étudiés pour 225 m^2 , L.S	102
Tab. 4.14 : Estimation de la rigidité des différents cas étudiés pour 400 m^2 , C.P	103
Tab. 4.15 : Estimation de la rigidité des différents cas étudiés pour 400 m^2 , L.S	104
Tab. 4.16 : Rigidités déterminées pour le niveau de performance C.P	109

INTRODUCTION

GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Le dimensionnement d'une structure consiste en la détermination de l'ensemble de ses caractéristiques mécaniques et géométriques vis-à-vis d'un niveau de sécurité précis. Ces caractéristiques peuvent être englobées sous la notion de la rigidité qui représente l'une des caractéristiques intrinsèques de la structure. Toutefois, l'avènement d'une nouvelle dialectique dans l'ingénierie parasismique à savoir les méthodes en performance dont leur fondement consiste à attribuer un niveau de performance déterminé à la structure à l'aide d'une analyse statique non linéaire Pushover, a rendu l'estimation de cette rigidité et par la suite le dimensionnement de la structure pour des différents niveaux de performance une opération dense pour l'ingénieur. En effet, Le choix d'un niveau de performance parmi les différents niveaux aura certainement une influence sur la rigidité de la structure. L'ingénieur est censé d'exprimer cette influence en terme de rigidité et effectuer son dimensionnement sur la base de cette évaluation. D'où vient l'idée d'élaborer des courbes indicatives de la rigidité nécessaire pour un bâtiment donné et qui correspond à chaque niveau de performance dans le but de permettre à l'ingénieur et à partir de données générales de son bâtiment telles que : la surface de plancher, le nombre d'étages ainsi que le mouvement sismique, d'effectuer son dimensionnement. De même, la détermination des différentes courbes relatives aux différents niveaux de performance pour le même type de bâtiments nous permettra d'évaluer le rapport nécessaire en terme de rigidité pour passer d'un niveau de performance à un autre.

Après cette introduction, une étude bibliographique faisant l'objet des différentes approches de détermination de la rigidité notamment pour le cas des structures en béton armé sera décrite dans le premier chapitre. De même, une étude bibliographique sur la méthode d'analyse statique non linéaire Pushover y sera aussi présentée. Le chapitre deux sera consacré à expliquer les aspects fondamentaux de cette analyse Pushover ainsi que l'intérêt des résultats issus de cette analyse dans le cadre de notre étude. Les formulations numériques nécessaires pour élaborer les lois de comportement des différents éléments des structures testées seront représentées dans le chapitre trois qui fera aussi l'objet d'une présentation sommaire du programme utilisé. Le chapitre quatre présentera la mise en œuvre numérique et les exemples étudiés. Des commentaires, des conclusions, des résultats et des exemples de validation y seront aussi présentés. Enfin, une conclusion générale terminera la présente étude.

Chapitre I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1. Introduction

Une structure peut être représentée par un assemblage d'éléments. Ces éléments possèdent certaines caractéristiques mécaniques et géométriques parmi elles la rigidité. Plusieurs approches ont été établies pour la détermination de cette rigidité dans le but de résoudre des problèmes de plus en plus complexes. De même, des approches ont été développées spécialement pour les structures en béton armé afin de tenir compte du béton et de l'acier. Ainsi que ces dernières années, l'analyse sismique pour ce type de structures a connu une grande évolution marquée principalement par l'avènement des méthodes en performance qui ont apporté des outils de calcul très pertinents nous permettant d'estimer la performance d'une structure sous l'effet d'un séisme. L'analyse statique non-linéaire Pushover est l'une de ces méthodes.

I.2. Notion de rigidité

La rigidité représente une caractéristique intrinsèque du système étudié et constitue une partie fondamentale pour la détermination de sa réponse. Le comportement d'un ressort sous l'effet d'une force de traction représente un cas simple et typique faisant apparaître cette notion.

I.2.1. Cas d'un ressort

La figure (Fig. 1.1a) schématise un ressort non-sollicité lié à gauche à un support. Sur la figure (Fig. 1.1b) on a présenté une position d'équilibre du ressort déformé sous l'effet d'une force de traction \vec{F} [1].

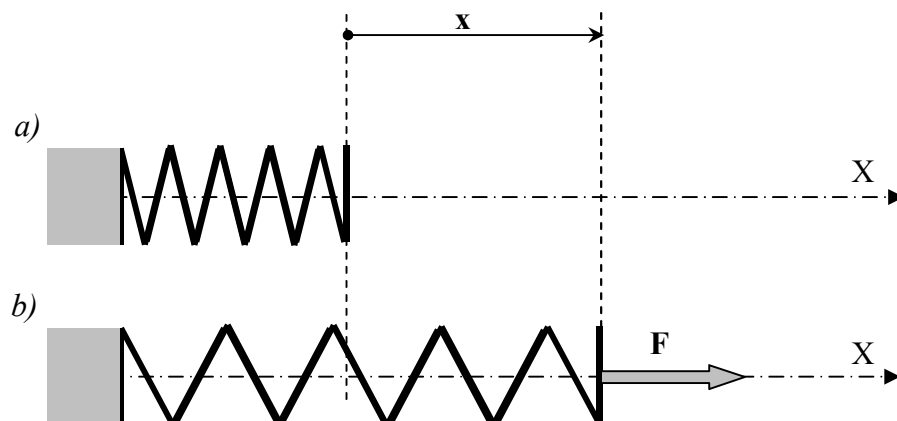


Fig. 1.1 : Comportement d'un ressort [1]

À toute valeur de la sollicitation \overline{F} correspond une élongation x et la nature élastique linéaire du matériau constituant le ressort entraîne pour deux valeurs F_i et F_j de l'effort, la propriété :

$$\frac{F_i}{x_i} = \frac{F_j}{x_j} = C^{te} = k \quad (\text{Eq. 1.1})$$

On peut alors définir la relation de comportement du ressort :

$$x = \frac{1}{k} F \Leftrightarrow F = k \times x \quad (\text{Eq. 1.2})$$

Dans laquelle k est la **rigidité** du ressort et x son élongation mesurée à partir de la position neutre.

Dans le cas des systèmes complexes composés d'un assemblage de plusieurs éléments, la détermination de la rigidité s'effectue à l'aide d'autres méthodes qui se basent sur le même principe d'estimation de la rigidité à partir de la relation entre la force appliquée et la déformation engendrée, néanmoins la complexité des structures fait que la méthode précédente ne peut être appliquée, aussi on fait appel à d'autres approches.

I.2.2. Approches énergétiques

Le fondement de ces méthodes se base sur la loi de conversion du travail extérieur en énergie potentielle. En effet, le travail des forces extérieures est égal au travail des forces intérieures (effort internes) ou autrement dit, tant que les sollicitations restent dans le domaine élastique, le travail des forces extérieures (charges) représente l'énergie potentielle (travail interne) de la structure [1].

I.2.2.1. Notion de travail

Pour fixer les idées, nous considérons le cas d'une barre prismatique soumise à une traction axiale F_l qui produit un allongement δ_l (Fig. 1.2a) [2].

Nous supposons que la force F_l est appliquée graduellement, d'une manière lente, de façon à ne produire aucune force d'inertie. Dans ces conditions, on dit que le chargement (force F_l ici) est appliqué *statiquement* et le déplacement engendré (ici un allongement) est relié à la force appliquée par une relation représentée par le diagramme " F - δ " de la figure (Fig. 1.2b).

Soit F une valeur intermédiaire et δ l'allongement correspondant. À un accroissement dF de la charge correspond un allongement supplémentaire $d\delta$. Le *travail élémentaire* produit par F au cours de l'accroissement $d\delta$ est défini par :

$$d\tau_e = F d\delta \quad (\text{Eq. 1.3})$$

Il est représenté par l'aire hachurée (hachures inclinées) du diagramme F - d (Fig. 1.2b).

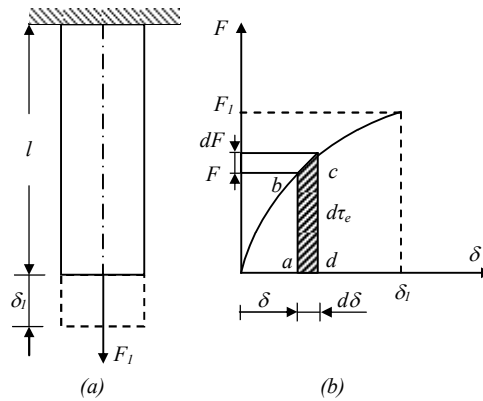


Fig. 1.2 : (a) : une barre prismatique soumise à une traction ; (b) : Diagramme "F- δ " [2]

Le travail total effectué par la force F_l au cours du déplacement δ_l est obtenu par sommation des travaux élémentaires, c'est-à-dire :

$$\tau_e = \int_0^{\delta_l} F d\delta \tag{Eq. 1.5}$$

Il est représenté par l'aire délimitée par la courbe F - δ et l'axe des δ jusqu'à δ_l .

1.2.2.2. Énergie potentielle de déformation

Considérons un corps soumis à des sollicitations extérieures. Sous l'action des charges extérieures, le corps se déforme et les efforts internes (contraintes) effectuent un travail qui s'oppose au travail des sollicitations extérieures [2].

Ce travail interne, changé de signe, est désigné par *énergie potentielle de déformation* (W).

Isolons un élément $dv = dx dy dz$ du corps considéré (Fig. 1.3). L'énergie élémentaire emmagasinée dans dv se calcule comme le travail effectué par les forces agissant sur les faces de l'élément dv . Ainsi, le travail effectué par la force élémentaire $\sigma_x \cdot dy dz$ au cours de la variation $d\varepsilon_x$ de la déformation ε_x , qui produit le déplacement $\Delta dx = d\varepsilon_x \cdot dx$, vaut :

$$dW = \sigma_x \cdot dy dz \cdot d\varepsilon_x dx = \sigma_x d\varepsilon_x dv \tag{Eq. 1.6}$$

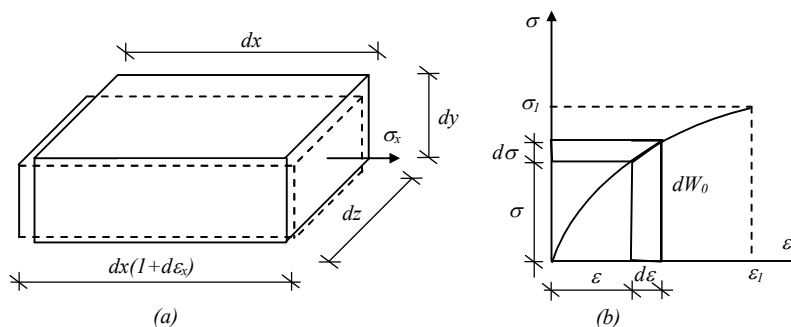


Figure 1.3 : (a) : corps soumis à des sollicitations extérieures ; (b) : relation contrainte – déformation [2]

En considérant toutes les composantes des contraintes et en utilisant la notation indicielle, on obtient pour l'élément dv :

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dv \quad (\text{Eq. 1.7})$$

L'énergie emmagasinée dans tout le volume du corps (v) vaut :

$$W = \int_v \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dv \quad (\text{Eq. 1.8})$$

1.2.2.3. Travail et énergie dans le domaine élastique linéaire

Revenons au cas de la traction d'une barre prismatique présentée sur (Fig. 1.2). Si la relation entre F et δ est linéaire, domaine d'application de la loi de Hooke (petits déplacements), c'est-à-dire quand on a à tout moment du chargement la relation (Fig. 1.4) :

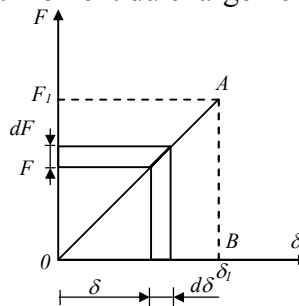


Figure 1.4 : Loi de Hooke [2]

$$F = k\delta \quad (k = \text{constante de rigidité}) \quad (\text{Eq. 1.9})$$

Le travail total devient :

$$\tau_e = \int_0^{\delta_1} k\delta d\delta = \frac{1}{2} k\delta_1^2 \quad (\text{Eq. 1.10})$$

Et comme : $F_1 = k\delta_1$, il vient :

$$\tau_e = \frac{1}{2} F_1 \delta_1 \quad (\text{Eq. 1.11})$$

Le travail total est représenté par l'aire du triangle OAB (Fig. 1.4).

Donc, si un système en équilibre est soumis à une sollicitation globale F ($F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n$) et que les points d'application de ces forces subissent des déplacements, dont les projections sur les directions de ces mêmes sollicitations valent $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, le travail effectué au cours du chargement du système (passage de l'état d'équilibre initial à l'état d'équilibre final), vaut :

$$\tau_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i \quad (\text{Eq. 1.12})$$

Il faut rappeler qu'on suppose que le chargement est statique et le matériau a un comportement élastique linéaire [2].

I.2.2.4. Principe de la conservation de l'énergie [2]

De manière générale, quand un corps est soumis à des charges extérieures, ces charges effectuent un travail extérieur qui se transforme en énergie potentielle interne (qui déforme le corps), en énergie cinétique et en chaleur qui se dissipe lors des frottements.

Supposons maintenant que :

- a) les charges extérieures sont appliquées statiquement (pas d'énergie cinétique),
- b) les frottements dans le corps sont nuls (pas de dissipation d'énergie sous forme de chaleur) c'est-à-dire que le corps considéré est parfaitement élastique,
- c) les frottements dans les appuis sont nuls (pas de dissipation d'énergie),

Alors tout le travail extérieur se transforme en *énergie potentielle de déformation*, c'est-à-dire qu'on a :

$$\tau_e = W \quad (\text{Eq. 1.13})$$

I.2.2.5. Travail de déformation des sollicitations simples dans le cas des poutres

Nous allons calculer séparément le travail de déformation (énergie potentielle de déformation) en fonction des efforts N (effort normal), M (moment fléchissant), T (effort tranchant) et M_t (torsion) dans une poutre (droite ou courbe) de longueur l . Considérons un tronçon de poutre dx (ds) suffisamment petit pour pouvoir admettre que les efforts ne varient pas sur dx [2].

a) Effort normal

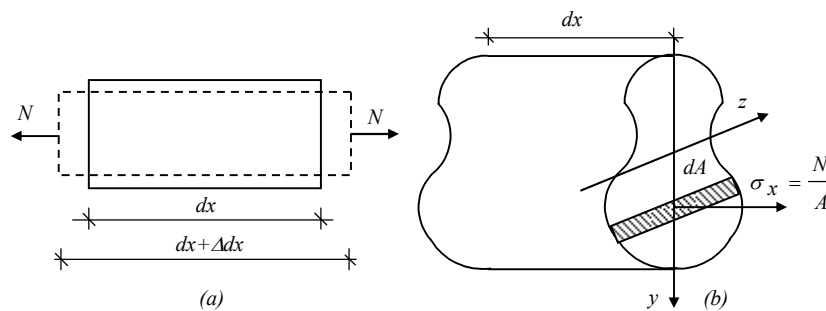


Fig. 1.5 : Tranche élémentaire d'une poutre sollicitée en traction [2]

L'énergie emmagasinée dans la couche $dA \cdot dx$ se calcule comme le travail effectué par la force $\sigma_x \cdot dA$ au cours du déplacement Δdx , d'où :

$$d^2W = \frac{1}{2} (\sigma_x dA) \Delta dx = \frac{1}{2} \left(\frac{N}{A} dA \right) \frac{N}{EA} dx = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA^2} dA dx \quad (\text{Eq. 1.14})$$

Remarque : La notation d^2W est utilisée pour désigner une quantité plus petite que l'énergie élémentaire.

L'énergie élémentaire emmagasinée dans le tronçon dx s'obtient par intégration sur l'aire A de la section :

$$dW = \frac{dx}{2} \int_A \frac{N^2}{EA^2} dA = \frac{1}{2} \frac{N^2 dx}{EA^2} \int_A dA = \frac{N^2}{2EA} dx \quad (\text{Eq. 1.15})$$

Et pour la totalité de la poutre :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{EA} dx \quad (\text{Eq. 1.16})$$

b) Moment fléchissant

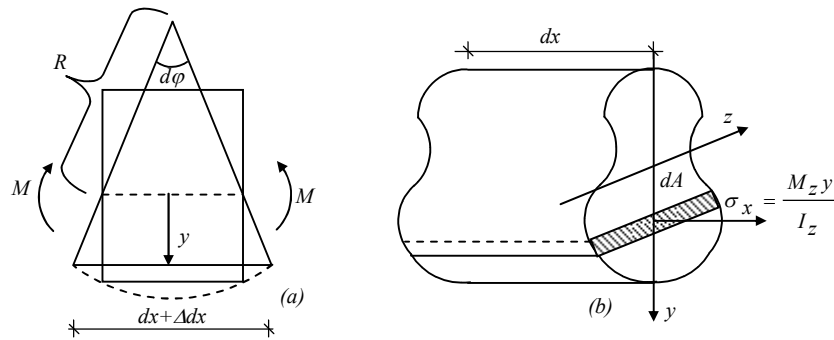


Fig. 1.6 : Tranche élémentaire d'une poutre sollicitée en flexion [2]

L'énergie emmagasinée dans la couche $dA dx$ vaut :

$$d^2W = \frac{1}{2} (\sigma_x dA) \Delta dx = \frac{1}{2} \left(\frac{M_z y}{I_z} dA \right) \frac{M_z y}{EI_z} dx = \frac{1}{2} \frac{M_z^2 y^2}{EI_z^2} dA dx \quad (\text{Eq. 1.17})$$

En intégrant sur la surface on obtient l'énergie emmagasinée dans le tronçon dx :

$$dW = \frac{dx}{2} \int_A \frac{M_z^2 y^2}{EI_z^2} dA = \frac{1}{2} \frac{M_z^2 dx}{EI_z^2} \int_A y^2 dA = \frac{M_z^2}{2EI_z} dx \quad (\text{Eq. 1.18})$$

D'où l'énergie de déformation de la poutre, qui se calcule par intégration sur l :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2}{EI_z} dx \quad (\text{Eq. 1.19})$$

Dans le cas d'une flexion gauche, on a une relation similaire à (Eq. 1.19) pour chaque moment fléchissant et pour les deux moments on aura :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} \right) dx \quad (\text{Eq. 1.20})$$

c) Effort tranchant [2]

L'énergie emmagasinée dans un tronçon dx soumis à un effort tranchant T_y vaut :

$$dW = \frac{\kappa_y T_y^2}{2GA} dx \quad (\text{Eq. 1.21})$$

Et pour toute la poutre :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{\kappa_y T_y^2}{GA} dx \quad (\text{Eq. 1.22})$$

Si la poutre est soumise à T_y et T_z on aura :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{\kappa_y T_y^2}{GA} + \frac{\kappa_z T_z^2}{GA} \right) dx \quad (\text{Eq. 1.23})$$

d) Moment de torsion

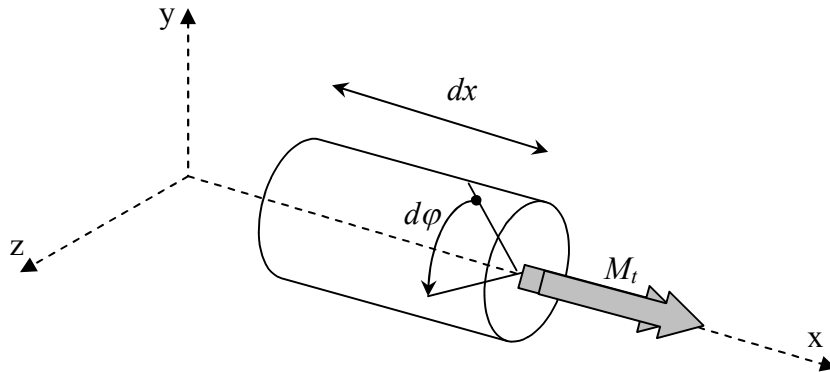


Fig. 1.7 : Tranche élémentaire d'une poutre sollicitée en torsion [2]

L'énergie emmagasinée dans le tronçon dx se calcule comme le travail effectué par M_t lors du déplacement $d\varphi_t$:

$$dW = \frac{1}{2} M_t d\varphi_t = \frac{qM_t^2}{2GI_p} dx \quad (\text{Eq. 1.24})$$

Où :

q est une constante dépendant de la forme et des dimensions de la section, appelée coefficient de torsion ($q \approx 40I_p^2/A^4$). Ce facteur vaut 1 pour la section circulaire et est supérieur à 1 pour les autres cas.

La quantité $C = GI_p/q$ est désignée par *rigidité à la torsion* (ou *rigidité torsionnelle*).

Et pour l'ensemble de la poutre :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{qM_t^2}{GI_p} dx \quad (\text{Eq. 1.25})$$

I.2.2.6. Expression générale de l'énergie potentielle de déformation

L'expression de l'énergie potentielle de déformation W peut être exprimée en fonction des contraintes seulement ou des déformations uniquement en utilisant les expressions des contraintes en fonction des déformations données par la loi de Hooke généralisée.

Dans le cas d'une poutre soumise aux sollicitations N , M , T et M_t , l'expression de W s'obtient en ajoutant les expressions (Eq. 1.16), (Eq. 1.19), (Eq. 1.22) et (Eq. 1.25) :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{\kappa T^2}{GA} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{q M_t^2}{GI_p} dx \quad (\text{Eq. 1.26})$$

Notons que cette dernière expression ne découle pas de l'application du principe de superposition, qui n'est pas applicable puisque l'énergie n'est pas reliée linéairement aux sollicitations. La relation (Eq. 1.26) s'obtient par sommation des contributions de chaque sollicitation du fait que le déplacement provoqué par une des sollicitations ne provoque pas de travail de la part des autres sollicitations (déplacements indépendants).

Remarque : Si le système comporte " n " barres, (Eq. 1.26) s'applique à chacune d'elles [2].

I.2.2.7. Différentes approches énergétiques

Les différents aspects liés aux notions du travail et de l'énergie potentielle ayant été présentés, nous utiliserons ces derniers pour établir quelques approches utilisant ces concepts.

I.2.2.7.1. Théorème de Castigliano [2]

Ce théorème comporte deux formes générales :

a) Première forme du théorème

La première forme du théorème de Castigliano s'énonce comme suit :

Dans un système élastique à appuis indéformables, la dérivée de l'énergie de déformation par rapport à l'une des forces agissant sur le système est égale à la projection sur la direction de cette force du déplacement élastique de son point d'application.

Soit forme analytique :

$$\frac{\partial W}{\partial F_i} = \delta_i \quad (\text{Eq. 1.27})$$

b) Deuxième forme du théorème

Théorème : La dérivée de l'énergie de déformation, exprimée en fonction des déplacements des points sur lesquels agissent des forces extérieures, par rapport à un de ces déplacements, est égale à la force correspondante, calculée suivant la direction du déplacement.

Soit sous forme analytique :

$$\frac{\partial W}{\partial \delta_i} = F_i \quad (\text{Eq. 1.28})$$

I.2.2.7.2. Simplification de l'expression de l'énergie potentielle [2]

L'expression (Eq. 1.26) est rarement utilisée telle quelle et ce, même lorsque les quatre efforts existent simultanément. On peut presque toujours négliger l'influence de certains termes.

On peut se limiter, avec une bonne approximation, aux termes donnés par les sollicitations prépondérantes, c'est-à-dire :

- M pour les structures planes formées de poutres,
- N pour les poutres en treillis articulés,
- M et N pour les arcs plans,
- M et M_t pour les structures spatiales constituées de poutres.

I.2.2.7.3. Utilisation d'une sollicitation auxiliaire [2]

Le théorème de Castigliano permet de calculer le déplacement du point de la structure confondu avec le point d'application d'une force concentrée (P ou C). Pour calculer le déplacement d'un point quelconque du système projeté sur une direction quelconque, on applique au point considéré, dans la direction considérée, une force auxiliaire (fictive) qu'on annule à la fin des calculs.

I.2.2.7.4. Superposition des effets [2]

Lorsque les conditions suivantes seront satisfaites :

- a) les charges extérieures sont appliquées statiquement (pas d'énergie cinétique),
- b) les frottements dans le corps sont nuls (pas de dissipation d'énergie sous forme de chaleur) c'est-à-dire que le corps considéré est parfaitement élastique,
- c) les frottements dans les appuis sont nuls (pas de dissipation d'énergie),
- d) le matériau vérifie la loi de Hooke (matériau élastique linéaire),
- e) les déplacements sont suffisamment petits et n'affectent pas l'action des charges (pas d'effets du second ordre).

L'effet total (déplacement final), sous la sollicitation complète, est égal à la somme des effets de chacune des composantes de la sollicitation totale.

I.2.2.7.4.a. Coefficients d'influence des déplacements

Soit δ_{ij} le déplacement de la section i suivant la direction i sous l'action de la sollicitation F_j , agissant en j suivant la direction j . Appelons δ''_{ij} le déplacement de la section i (suivant la direction i) sous l'effet d'une sollicitation unitaire appliquée en j (suivant la direction j).

En vertu de la proportionnalité entre les causes et les effets, on peut écrire :

$$\delta_{ij} = \delta_{ij}^u \cdot F_j \quad (\text{Eq. 1.29})$$

Sous l'action de la sollicitation complète $F (F_1, F_2, \dots, F_j, \dots, F_n)$, le déplacement total de la section i (dans la direction i) noté δ_{iF} sera égal à :

$$\delta_{iF} = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{ij} + \dots + \delta_{in} \quad (\text{Eq. 1.30})$$

Et en vertu de (Eq. 1.29) il vient :

$$\delta_{iF} = \delta_{i1}^u F_1 + \delta_{i2}^u F_2 + \dots + \delta_{ij}^u F_j + \dots + \delta_{in}^u F_n \quad (\text{Eq. 1.31})$$

$$\text{Ou encore : } \delta_{iF} = \sum_{j=1}^n \delta_{ij}^u \cdot F_j \quad (\text{Eq. 1.32})$$

Les coefficients δ_{ij}^u sont appelés *coefficients d'influence des déplacements*.

I.2.2.7.4.b. Coefficients d'influence des sollicitations

Si nous particulierisons la relation (Eq. 1.31) à chaque section correspondant à un point d'application d'une force, nous obtenons un système de n équations :

$$\begin{aligned} \delta_{1F} &= \delta_{11}^u F_1 + \delta_{12}^u F_2 + \dots + \delta_{1j}^u F_j + \dots + \delta_{1n}^u F_n \\ &\dots\dots\dots \\ \delta_{iF} &= \delta_{i1}^u F_1 + \delta_{i2}^u F_2 + \dots + \delta_{ij}^u F_j + \dots + \delta_{in}^u F_n \\ &\dots\dots\dots \\ \delta_{nF} &= \delta_{n1}^u F_1 + \delta_{n2}^u F_2 + \dots + \delta_{nj}^u F_j + \dots + \delta_{nn}^u F_n \end{aligned} \quad (\text{Eq. 1.33})$$

Si on considère F_1, F_2, \dots, F_n comme les inconnues on peut les déduire en résolvant le système ci-dessus, et on obtient :

$$\begin{aligned} F_1 &= F_{11} \delta_1 + F_{12} \delta_2 + \dots + F_{1j} \delta_j + \dots + F_{1n} \delta_n \\ &\dots\dots\dots \\ F_i &= F_{i1} \delta_1 + F_{i2} \delta_2 + \dots + F_{ij} \delta_j + \dots + F_{in} \delta_n \\ &\dots\dots\dots \\ F_n &= F_{n1} \delta_1 + F_{n2} \delta_2 + \dots + F_{nj} \delta_j + \dots + F_{nn} \delta_n \end{aligned} \quad (\text{Eq. 1.34})$$

Les δ_i de ce dernier système sont en fait les δ_{iF} du système (Eq. 1.33).

Les coefficients F_{ij} s'appellent *coefficients d'influence des forces*. Le coefficient F_{ij} représente la sollicitation (par unité de déplacement) qu'on doit appliquer en i pour avoir un "déplacement unité" en j .

1.2.2.7.5. Méthode de Mohr pour le calcul des déplacements [2]

Soient M_{iF} , N_{iF} , T_{iF} et M_{iF}^t les efforts produits dans la section courante i par la sollicitation globale F (F_1, F_2, \dots, F_n).

Désignons par m_{ij} , n_{ij} , t_{ij} et m_{ij}^t les efforts apparaissant dans la section i sous l'action d'une sollicitation unitaire appliquée en j , suivant la direction j . Introduisons en j , suivant j , une sollicitation fictive f_j .

Sous l'action de F et f_j , on a par superposition des effets :

$$M_i = M_{iF} + f_j \cdot m_{ij}$$

$$N_i = N_{iF} + f_j \cdot n_{ij}$$

$$T_i = T_{iF} + f_j \cdot t_{ij}$$

$$M_i^t = M_{iF}^t + f_j \cdot m_{ij}^t$$

L'énergie potentielle s'exprime alors par (cas d'une pièce longue) :

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \int_0^l \frac{(M_{iF} + f_j m_{ij})^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{(N_{iF} + f_j n_{ij})^2}{EA} dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^l \kappa \frac{(T_{iF} + f_j t_{ij})^2}{GA} dx + \frac{1}{2} \int_0^l q \frac{(M_{iF}^t + f_j m_{ij}^t)^2}{GI_P} dx \end{aligned} \quad (\text{Eq. 1.35})$$

Pour obtenir le déplacement en j (suivant la direction j), on dérive W par rapport à f_j puis on pose $f_j = 0$ (puisque'il s'agit d'une sollicitation auxiliaire), on obtient :

$$\delta_{jF} = \int_0^l \frac{M_{iF} m_{ij}}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_{iF} n_{ij}}{EA} dx + \int_0^l \kappa \frac{T_{iF} t_{ij}}{GA} dx + \int_0^l q \frac{M_{iF}^t m_{ij}^t}{GI_P} dx \quad (\text{Eq. 1.36})$$

1.2.2.7.6. Déplacement produit par une sollicitation unitaire [2]

Désignons par δ_{jk}^u le déplacement de la section j dans la direction j produit par une sollicitation unité agissant en k suivant la direction k .

Par particularisation de l'expression générale (Eq. 1.36) nous obtenons :

$$\delta_{jk}^u = \int_0^l \frac{m_{ik} m_{ij}}{EI} dx + \int_0^l \frac{n_{ik} n_{ij}}{EA} dx + \int_0^l \kappa \frac{t_{ik} t_{ij}}{GA} dx + \int_0^l q \frac{m_{ik}^t m_{ij}^t}{GI_P} dx \quad (\text{Eq. 1.37})$$

1.2.2.7.7. Théorème de Betti-Maxwell [2]

Le théorème de Betti-Maxwell se déduit de l'expression (Eq. 1.37). On remarque en effet que l'expression n'est pas modifiée si on permute les indices j et k , c'est-à-dire :

$$\delta_{jk}^u = \delta_{kj}^u \quad (\text{Eq. 1.38})$$

D'où vient l'énoncé du théorème : *Le déplacement en j produit par une sollicitation unitaire agissant en k est égal au déplacement en k produit par la même sollicitation unitaire agissant en j.*

I.2.2.7.7.a. Illustration du théorème

Le sens physique de cet important théorème, appelé parfois *théorème sur la réciprocité des déplacements*, apparaît clairement sur l'exemple simple suivant (Fig. 1.8).

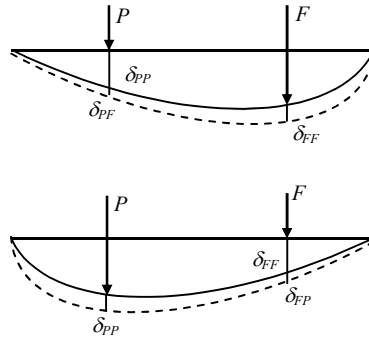


Fig. 1.8 : Illustration du théorème de Betti-Maxwell [2]

Soit donc le système élastique ci-contre. Appliquons d'abord une force P puis une force F . Le travail total est donné par :

$$W_1 = \frac{1}{2} P \delta_{PP} + \frac{1}{2} F \delta_{FF} + P \delta_{PF} \quad (\text{Eq. 1.39})$$

Appliquons maintenant F ensuite la force P .

$$W_2 = \frac{1}{2} F \delta_{FF} + \frac{1}{2} P \delta_{PP} + F \delta_{FP} \quad (\text{Eq. 1.40})$$

Comme la valeur finale du travail effectué ne dépend pas de l'ordre dans lequel les sollicitations ont été appliquées, on a :

$$W_1 = W_2 \Leftrightarrow P \delta_{PF} = F \delta_{FP} \quad (\text{Eq. 1.41})$$

De manière générale P et F sont des "efforts généralisés" et δ_{PF} et δ_{FP} des "déplacements généralisés". Par exemple, P une force et F un couple et par conséquent δ_{PF} le déplacement vertical du point d'application de P provoqué par le couple F et δ_{FP} la rotation de la section d'application du couple F sous l'effet de la force P .

Le théorème de Betti-Maxwell se retrouve en faisant dans l'expression (Eq. 1.41) ci-dessus :

$$P = F = 1.$$

I.2.2.7.8. Théorème de Pasternak (*Calcul des déplacements des systèmes hyperstatiques*) [2]

Dans le cas des systèmes hyperstatiques, les déplacements peuvent être obtenus en considérant dans chaque intégrale de la formule de Mohr [(Eq. 1.36) et (Eq. 1.37)], pour l'un

des deux éléments de réduction, les efforts correspondant au système rendu isostatique. Désignons par :

- $(M_{iF}, N_{iF}, T_{iF}, M_{iF}^t)$ les efforts dans la section courante i du système hyperstatique sous l'action de la sollicitation globale F .
- $(m_{ij}, n_{ij}, t_{ij}, m_{ij}^t)$ les efforts dans la section i du système hyperstatique sous l'action d'une sollicitation unitaire appliquée en j .
- $(\bar{M}_{iF}, \bar{N}_{iF}, \bar{T}_{iF}, \bar{M}_{iF}^t)$ les efforts dans la section i du système rendu isostatique sous l'action de la sollicitation globale F .
- $(\bar{m}_{ij}, \bar{n}_{ij}, \bar{t}_{ij}, \bar{m}_{ij}^t)$ les efforts dans la section i du système rendu isostatique sous l'action d'une sollicitation unitaire appliquée en j .

Avec les notations ci-dessus, le théorème de Pasternak s'exprime sous l'une des deux formes suivantes [obtenues à partir de (Eq. 1.36)] :

$$\delta_{jF} = \int_0^l \frac{M_{iF} \bar{m}_{ij}}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_{iF} \bar{n}_{ij}}{EA} dx + \int_0^l \kappa \frac{T_{iF} \bar{t}_{ij}}{GA} dx + \int_0^l q \frac{M_{iF}^t \bar{m}_{ij}^t}{GI_P} dx \quad (\text{Eq. 1.42})$$

Ou :

$$\delta_{jF} = \int_0^l \frac{\bar{M}_{iF} m_{ij}}{EI} dx + \int_0^l \frac{\bar{N}_{iF} n_{ij}}{EA} dx + \int_0^l \kappa \frac{\bar{T}_{iF} t_{ij}}{GA} dx + \int_0^l q \frac{\bar{M}_{iF}^t m_{ij}^t}{GI_P} dx \quad (\text{Eq. 1.43})$$

1.2.2.7.9. Théorème complémentaire [2]

Théorème : Dans un système quelconque, le déplacement "relatif" d'un point B par rapport à un point A peut s'obtenir en appliquant la sollicitation unitaire à l'extrémité B du tronçon isolé AB supposé encasté en A et libre en B.

En effet, le déplacement relatif ne dépend que des éléments de réduction agissant entre les points A et B, de sorte que les liaisons existant en dehors de ce tronçon ne jouent aucun rôle. Il est donc logique de considérer les liaisons les plus simples, c'est-à-dire l'encastement en A et une coupure

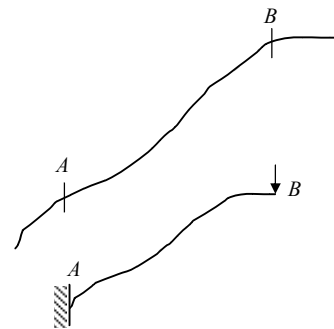


Fig.1.9 : Principe du théorème complémentaire [2]

complète en B (extrémité libre). C'est une application particulière du théorème précédent puisque le tronçon AB (Fig. 1.9) dont il est question ici peut être assimilé à une poutre bi-encastée.

I.2.2.8. Energie potentielle de déformation en état plan de contrainte [1]

La figure (Fig. 1.10) représente un élément soumis aux trois cas de chargements suivants :

Cas n° 1 : traction suivant l'axe \vec{x}

Cas n° 2 : traction suivant l'axe \vec{y}

Cas n° 3 : cisaillement dans le plan (xy)

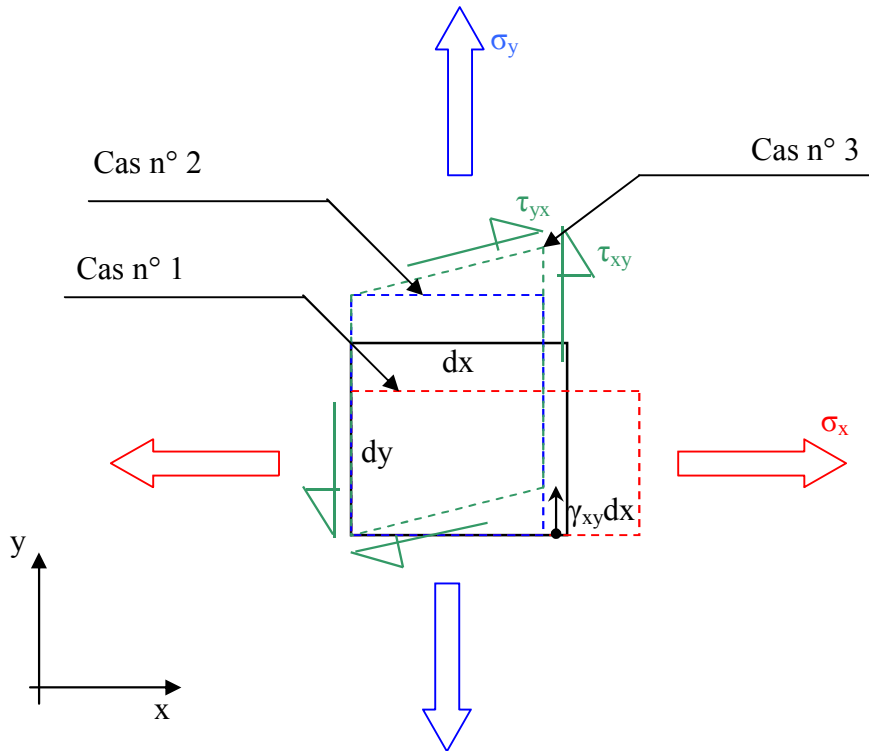


Fig. 1.10 : Déplacements pour les trois cas de chargements [1]

Lorsque ces trois sollicitations sont appliquées simultanément, l'énergie potentielle s'écrit sous la forme suivante :

$$dW_{pot} = dW_{pot.1} + dW_{pot.2} + dW_{pot.3} \quad (\text{Eq. 1.44})$$

Nous avons :

$$dW_{pot.1} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{E} dV \quad (\text{Eq. 1.45})$$

Avec $dV = dx \times dy \times e$ est le volume de l'élément

$$dW_{pot.2} = \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2}{E} - \frac{\nu}{E} \times \sigma_x \times \sigma_y \right) \times dV \quad (\text{Eq. 1.46})$$

Avec ν est le coefficient de Poisson

$$dW_{pot.3} = \left(\frac{1}{2} \frac{\tau_{xy}^2}{G} \right) \times dV \quad (\text{Eq. 1.47})$$

Au final :

$$dW_{pot} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_x^2}{E} + \frac{\sigma_y^2}{E} - 2 \frac{\nu}{E} \sigma_x \sigma_y + \frac{\tau_{xy}^2}{G} \right) \times dV \quad (\text{Eq. 1.48})$$

$$dW_{pot} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^T \bullet \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \times dV \quad (\text{Eq. 1.49})$$

En utilisant la relation de comportement en contraintes planes, on aura :

$$dW_{pot} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^T \bullet \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \times dV \quad (\text{Eq. 1.50})$$

Toujours, d'après la relation de comportement en contraintes planes, on a :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq. 1.51})$$

Transposons cette expression, on aura :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^T \bullet \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 1.52})$$

Alors, l'énergie de déformation prend la forme suivante :

$$dW_{pot} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^T \bullet \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \times dV \quad (\text{Eq. 1.53})$$

On obtient ici une forme quadratique de l'énergie potentielle de déformation.

I.2.2.9. Exemple d'application [1]

On examine dans ce qui suit le cas d'une poutre console soumise à deux sollicitations, comme il est montré sur la figure suivante (Fig. 1.11).

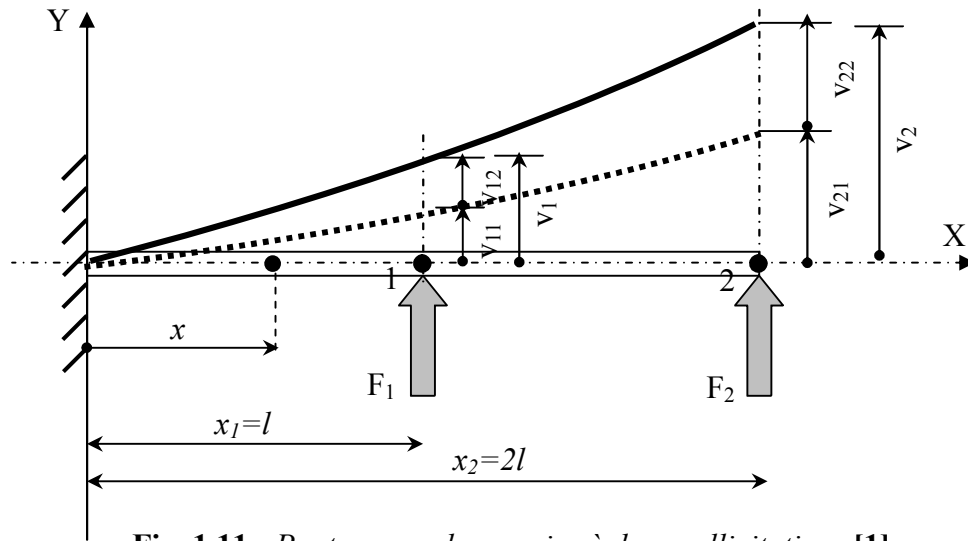


Fig. 1.11 : Poutre console soumise à deux sollicitations [1]

Supposons que le chargement se fera d'une façon séquentielle, F_1 et ensuite F_2 . On note que : F_i (avec $i = 1, 2$) force appliquée au point (i)

v_{ij} déplacement au point (i) (avec $i = 1, 2$) engendré par une force appliquée au point (j) (avec $j = 1, 2$).

- **Chargement n° 1** : la force F_1 est appliquée d'une façon progressive au point (1). Elle a développé un travail complètement transformé en énergie potentielle de déformation qui s'écrit :

$$\tau_1 = \frac{1}{2} F_1 v_{11} = W_{pot.1} \quad (\text{Eq. 1.54})$$

- **Chargement n° 2** : la force F_2 est appliquée d'une façon progressive au point (2) et ajoutée au chargement n° 1. Le travail développé par cette force est complètement transformé en énergie potentielle de déformation qui s'écrit :

$$\tau_2 = \frac{1}{2} F_2 v_{22} + F_1 v_{12} = W_{pot.2} \quad (\text{Eq. 1.55})$$

On a alors au total :

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{2} F_1 v_{11} + \frac{1}{2} F_2 v_{22} + F_1 v_{12} = W_{pot} \quad (\text{Eq. 1.56})$$

De même, une procédure de chargement inversé nous conduit à déduire que les deux travaux finaux seront identiques. Donc, on peut écrire :

$$F_1 \times v_{12} = F_2 \times v_{21} \quad (\text{Eq. 1.57})$$

Lorsque la poutre est complètement chargée, les déplacements finaux s'écrivent comme suit :

$$v_1 = v_{11} + v_{12} \text{ et } v_2 = v_{21} + v_{22} \quad (\text{Eq. 1.58})$$

Compte tenu de (Eq. 1.57), l'expression du travail final se réécrit sous la forme suivante :

$$\tau = \frac{1}{2}(F_1 v_1 + F_2 v_2) = W_{pot} \quad (\text{Eq. 1.59})$$

Cette expression scalaire peut apparaître aussi sous forme matricielle :

$$\tau = \frac{1}{2} [F_1 \quad F_2] \bullet \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq. 1.60})$$

Ou encore

$$\tau = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}^T \bullet \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \{F\}^T \bullet \{d\} \quad (\text{Eq. 1.61})$$

Les efforts F_1 et F_2 peuvent prendre une infinité de valeurs. Considérons le cas particulier d'efforts "unité", c'est-à-dire où $F_1 = F_2 = 1\text{N}$. Alors nous noterons les déplacements α_{ij} au lieu de v_{ij} afin de les bien différencier des cas de chargements d'intensités quelconques.

Les coefficients α_{ij} sont des déplacements par unité de force. En conséquence, lorsque les efforts F_1 et F_2 sont quelconques, on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq. 1.62})$$

La matrice constituée par les termes α_{ij} est appelée matrice de souplesse $[\alpha]$. Alors, on peut écrire :

$$\{d\} = [\alpha] \bullet \{F\} \quad (\text{Eq. 1.63})$$

L'expression du travail donnée par (Eq. 1.61) se réécrit comme suit :

$$\tau = \frac{1}{2} \{F\}^T \bullet [\alpha] \bullet \{F\} = W_{pot} \quad (\text{Eq. 1.64})$$

Les termes α_{ij} sont déterminés de la manière suivante :

Fixons les caractéristiques géométriques et de matériau de cette poutre : moment d'inertie autour de l'axe \vec{z} noté I et module de Young E .

Considérons au préalable cette poutre chargée par un effort F_1 à l'abscisse x_1 . Dans la zone $0 \leq x \leq x_1$ la déformée $v(x)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M_{f_1} = F_1(x_1 - x) \quad (\text{Eq. 1.65})$$

On obtient alors successivement (les constantes d'intégration disparaissant du fait de l'encastrement en $x = 0$) :

$$EI \frac{dv}{dx} = -F_1 \frac{x^2}{2} + F_1 x_1 x \quad (\text{Eq. 1.66})$$

$$EIv(x) = -F_1 \frac{x^3}{6} + F_1 x_1 \frac{x^2}{2} = F_1 \frac{x^2}{2} \left(x_1 - \frac{x}{3}\right) \quad (\text{Eq. 1.67})$$

En particulier, on note pour l'abscisse x_1 une flèche :

$$v(x_1) = F_1 \frac{x_1^3}{3EI} \quad (\text{Eq. 1.68})$$

$$\text{Et une rotation de section : } \theta_z(x_1) \cong \frac{dv(x_1)}{dx} = F_1 \frac{x_1^2}{2EI} \quad (\text{Eq. 1.69})$$

Le déplacement à l'abscisse $x_2 > x_1$ s'écrit alors en remarquant que la portion de poutre $x_1 \leq x \leq x_2$ reste rectiligne :

$$v(x_2) = v(x_1) + \frac{dv(x_1)}{dx} (x_2 - x_1) = F_1 \frac{x_1^2}{2EI} \left(x_2 - \frac{x_1}{3}\right) \quad (\text{Eq. 1.70})$$

Considérons maintenant que cette poutre est chargée par les deux efforts F_1 à l'abscisse x_1 et F_2 à l'abscisse x_2 .

Avec les notations de la figure (Fig. 1.11), les résultats que l'on vient d'obtenir pour F_1 deviennent :

$$\text{Au point (1) : } v_{11} = F_1 \frac{x_1^3}{3EI} \quad (\text{Eq. 1.71})$$

$$\text{Au point (2) : } v_{21} = F_1 \frac{x_1^2}{2EI} \left(x_2 - \frac{x_1}{3}\right) \quad (\text{Eq. 1.72})$$

Considérons maintenant l'effort F_2 à l'abscisse x_2 . En tenant compte que $x_2 > x_1$, on peut utiliser l'expression (Eq. 1.67) dans laquelle on remplace F_1 par F_2 et x_1 par x_2 . On obtient :

$$\text{Au point (1) : } v_{12} = F_2 \frac{x_1^2}{2EI} \left(x_2 - \frac{x_1}{3}\right) \quad (\text{Eq. 1.73})$$

$$\text{Au point (2) : } v_{22} = F_2 \frac{x_2^3}{3EI} \quad (\text{Eq. 1.74})$$

Les déplacements totaux s'écrivent alors :

$$v_1 = v_{11} + v_{12} = F_1 \frac{x_1^3}{3EI} + F_2 \frac{x_1^2}{2EI} \left(x_2 - \frac{x_1}{3}\right) \quad (\text{Eq. 1.75})$$

$$v_2 = v_{21} + v_{22} = F_1 \frac{x_1^2}{2EI} \left(x_2 - \frac{x_1}{3}\right) + F_2 \frac{x_2^3}{3EI} \quad (\text{Eq. 1.76})$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^3}{3EI} & \frac{x_1^2}{2EI}(x_2 - \frac{x_1}{3}) \\ \frac{x_1^2}{2EI}(x_2 - \frac{x_1}{3}) & \frac{x_2^3}{3EI} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq. 1.77})$$

Soit la forme donnée par (Eq. 1.63), donc, on peut écrire :

$$\{d\} = [\alpha] \bullet \{F\} \Leftrightarrow \{F\} = [\alpha]^{-1} \bullet \{d\} \quad (\text{Eq. 1.78})$$

La matrice $[\alpha]^{-1}$ caractérisera ainsi la **rigidité** de la structure. On notera désormais :

$$[\alpha]^{-1} = [K] \quad (\text{Eq. 1.79})$$

Où $[K]$ sera dite la matrice de rigidité de la structure.

La relation (Eq. 1.78) s'écrit, compte tenu de (Eq. 1.79) :

$$\{F\} = [K] \bullet \{d\} \quad (\text{Eq. 1.80})$$

Remplaçons x_1 et x_2 par leurs valeurs l et $2l$ respectivement, la relation (Eq. 1.77) devient :

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l^3}{3EI} & \frac{5l^3}{6EI} \\ \frac{5l^3}{6EI} & \frac{l^3}{3EI} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \{d\} = [\alpha] \bullet \{F\} \quad (\text{Eq. 1.81})$$

Que l'on peut inverser. On vérifie qu'on obtient alors :

$$\{F\} = [\alpha]^{-1} \bullet \{d\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{96EI}{7l^3} & -\frac{30EI}{7l^3} \\ -\frac{30EI}{7l^3} & \frac{96EI}{7l^3} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq. 1.82})$$

Où apparaît la matrice de **rigidité** $[K]$ de la structure considérée :

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{96EI}{7l^3} & -\frac{30EI}{7l^3} \\ -\frac{30EI}{7l^3} & \frac{96EI}{7l^3} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 1.83})$$

I.2.2.10. Généralisation [1]

L'expression de la relation de comportement du ressort peut être étendue à une structure quelconque et on aura la formule générale suivante :

$$\{F\} = [K] \bullet \{d\} \quad (\text{Eq. 1.84})$$

Avec : $\{F\}$ représente le vecteur de force appliqué

$[K]$ est la matrice de rigidité

$\{d\}$ est le vecteur des degrés de liberté associés au chargement

La transposée de cette expression s'écrit :

$$\{F\}^T = \{d\}^T \bullet [K] \quad (\text{Eq. 1.85})$$

Alors l'énergie potentielle de déformation devient :

$$W_{pot} = \frac{1}{2} \{F\}^T \bullet \{d\} = \frac{1}{2} \{d\}^T \bullet [K] \bullet \{d\} = \tau_{ext} \quad (\text{Eq. 1.86})$$

I.2.2.11. Remarque

Dans un repère donné, une structure est soumise à un ensemble d'actions mécaniques $\{F\}$ appliquées en n points de la structure. Suivant les directions associées à ces sollicitations, on observe un ensemble de déplacements $\{d\}$. Le travail développé par ces actions et qui est conservé en énergie potentielle s'écrit sous la forme (Eq. 1.86) faisant apparaître la matrice de rigidité comme une caractéristique intrinsèque de la structure [1].

I.2.3. Méthode de discrétisation en éléments finis

Jusqu'à un passé relativement récent, cette approche de l'énergie potentielle pour le dimensionnement des structures était utilisée pour traiter des cas plus complexes tels que : mises en position hyperstatiques, assemblages plans ou spatiaux de poutres. On faisait alors appel aux méthodes énergétiques adaptées (Méthode de Castigliano, Théorème de Betti-Maxwell, formule de Bresse, théorèmes des trois moments, etc.).

Cependant, les calculs nécessaires à la définition de la matrice de rigidité devenaient rapidement lourds et excessivement volumineux lorsque la structure se compliquait géométriquement. Il était de plus difficile, voire impossible d'associer des sous-structures de nature différente : poutres, plaques, parties massives. Afin d'y remédier, l'approche par éléments finis est utilisée [1].

I.2.3.1. Matrice de rigidité d'une structure complexe

Lorsque la structure est géométriquement compliquée, on ne voit pas le moyen de calculer directement les termes de la matrice de rigidité $[K]$ issue de la relation fondamentale suivante :

$$\underbrace{\{F\}}_{structure} = \underbrace{[K]}_{structure} \bullet \underbrace{\{d\}}_{structure} \quad (\text{Eq. 1.87})$$

C'est pour contourner cette difficulté que l'on envisage une partition (ou discrétisation) de la structure complexe en la découpant en sous structures caractérisées chacune par une géométrie simple. Ces sous structures seront de petites dimensions devant celles de la structure entière et en nombre fini. On les nommera en conséquence "élément fini".

Le principe général consiste à évaluer séparément, pour chacune de ces sous structures la matrice de rigidité dite élémentaire $[K]_{el}$. La simplicité géométrique de l'élément doit pouvoir permettre le calcul explicite (ou au moins numérique) de cette matrice de rigidité. L'étape

suivante consiste à effectuer la sommation des rigidités élémentaires de tous les éléments afin de reconstituer la matrice de rigidité de la structure complète que l'on désire étudier. Cependant, pour mettre en œuvre ce principe, il est nécessaire que :

- la géométrie des éléments soit suffisamment simple ou adaptée de manière à permettre un calcul analytique ou numérique de la matrice de rigidité.
- les degrés de liberté de l'élément $\{d\}_{el}$ puissent coïncider avec certains des degrés de liberté de la structure complète $\{d\}_{str}$. Plus précisément, $\{d\}_{el}$ doit apparaître comme un sous ensemble de la liste complète des degrés de liberté $\{d\}_{str}$.
- le découpage en élément fini (encore appelé maillage) doit permettre la reconstitution aussi exacte que possible de la structure complète.

La mise en œuvre d'un tel processus nécessite de disposer d'un assortiment ou catalogue d'éléments finis caractérisés pour chacun d'entre eux par une matrice de rigidité élémentaire $[K]_{el}$ qui aura été préalablement établie. Dans la suite, un exemple de calcul de cette matrice de rigidité sera présenté [1].

I.2.3.2. Exemple d'un élément triangulaire pour l'état plan de contraintes [1]

L'élément est représenté sur la figure suivante (Fig. 1.12) :

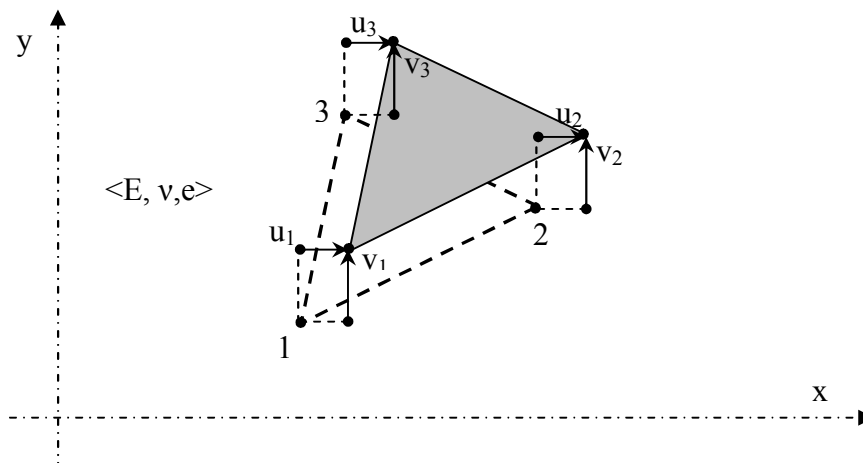


Fig. 1.12 : Elément triangulaire en contraintes planes

Le champ de déplacement correspondant s'écrit :

$$u(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y \quad (\text{Eq. 1.88})$$

$$v(x,y) = b_0 + b_1x + b_2y \quad (\text{Eq. 1.89})$$

On détermine les coefficients a_j et b_j ($j = 0, 1, 2$) en écrivant que u et v coïncident avec les déplacements u_i et v_i en chaque noeud i , ce qui amène aux relations :

$$u_i = a_0 + a_1x_i + a_2y_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{Eq. 1.90})$$

$$v_i = b_0 + b_1x_i + b_2y_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{Eq. 1.91})$$

Les coefficients a_j et b_j apparaissent alors comme des fonctions linéaires des déplacements u_i et v_i . On les substitue dans (Eq. 1.88) et (Eq. 1.89) et le champ de déplacement $u(x,y)$ et $v(x,y)$ prend la forme matricielle suivante où apparaît la matrice d'interpolation $[A(x,y)]$:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [A(x,y)] \bullet \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq. 1.92})$$

Avec :

$$[A(x,y)] = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y) & 0 & (\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 y) & 0 & (\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 y) & 0 \\ 0 & (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y) & 0 & (\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 y) & 0 & (\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 y) \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 1.93})$$

Où l'on a noté :

S : aire de l'élément

$$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j ; \beta_i = y_j - y_k ; \gamma_i = -(x_j - x_k)$$

À partir de l'écriture de l'énergie potentielle en contraintes planes (Eq. 1.57), on obtient l'expression suivante :

$$E_{pot} = \frac{1}{2} e \int_S \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^T \bullet \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \times dS \quad (\text{Eq. 1.94})$$

On rappelle que les déformations ont pour expression :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Il est donc possible de calculer ces déformations à partir du champ de déplacements donné par (Eq. 1.92). On obtient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_3 & \beta_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq. 1.95})$$

Que l'on peut remplacer dans (Eq. 1.94). On obtient après calcul :

$$E_{pot\ \text{élément}} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}^T \bullet [K]_{él} \bullet \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq. 1.96})$$

Avec :

$$[K]_{él} = \frac{E \times e}{4(1-\nu^2)S} \times \dots \quad (\text{Eq. 1.97})$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1^2 + \frac{1-\nu}{2} \gamma_1^2 & \frac{1+\nu}{2} \beta_1 \gamma_1 & \beta_1 \beta_2 + \frac{1-\nu}{2} \gamma_1 \gamma_2 & \nu \beta_1 \beta_2 + \frac{1-\nu}{2} \gamma_1 \beta_2 & \beta_1 \beta_3 + \frac{1-\nu}{2} \gamma_1 \gamma_3 & \nu \beta_1 \beta_3 + \frac{1-\nu}{2} \gamma_1 \beta_3 \\ & \gamma_1^2 + \frac{1-\nu}{2} \beta_1^2 & \nu \gamma_1 \beta_2 + \frac{1-\nu}{2} \beta_1 \gamma_2 & \gamma_1 \gamma_2 + \frac{1-\nu}{2} \beta_1 \beta_2 & \nu \gamma_1 \beta_3 + \frac{1-\nu}{2} \beta_1 \gamma_3 & \gamma_1 \gamma_3 + \frac{1-\nu}{2} \beta_1 \beta_3 \\ \dots & & \beta_2^2 + \frac{1-\nu}{2} \gamma_2^2 & \frac{1+\nu}{2} \beta_2 \gamma_2 & \beta_2 \beta_3 + \frac{1-\nu}{2} \gamma_2 \gamma_3 & \nu \beta_2 \beta_3 + \frac{1-\nu}{2} \gamma_2 \beta_3 \\ \dots & Y & & \gamma_2^2 + \frac{1-\nu}{2} \beta_2^2 & \nu \gamma_2 \beta_3 + \frac{1-\nu}{2} \beta_2 \gamma_3 & \gamma_2 \gamma_3 + \frac{1-\nu}{2} \beta_2 \beta_3 \\ & & M & & \beta_3^2 + \frac{1-\nu}{2} \gamma_3^2 & \frac{1+\nu}{2} \beta_3 \gamma_3 \\ & & & E & & \gamma_3^2 + \frac{1-\nu}{2} \beta_3^2 \end{bmatrix}$$

Le comportement de cet élément triangulaire plan s'écrit donc dans le repère (xy) considéré :

$$\{F\}_{él} = [K]_{él} \bullet \{d\}_{él} \quad (\text{Eq. 1.98})$$

Cependant, la définition de l'élément triangulaire a été faite dans un repère local (xyz). Si l'on désire passer ensuite à un autre repère (XYZ) coplanaire, on sait que chacun des vecteurs caractéristiques (déplacement nodal et effort nodal) peut s'exprimer dans l'un et l'autre repère sur la base de la transformation suivante :

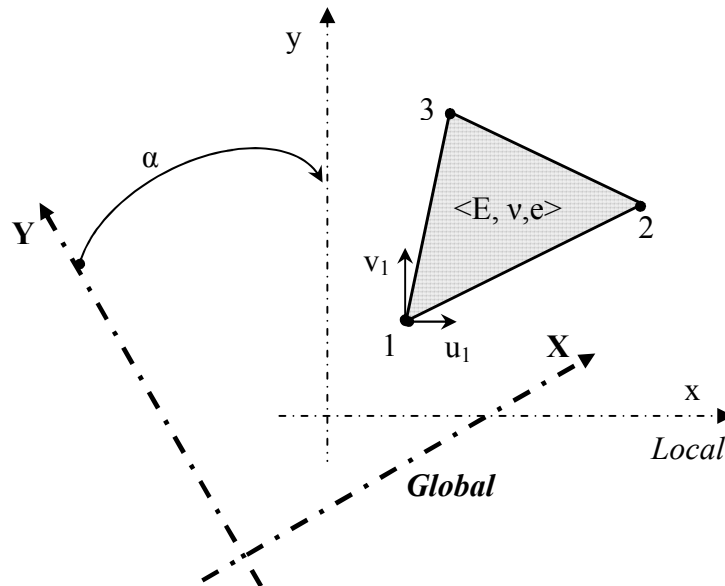


Fig. 1.13 : Repère local et repère global

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 = 0 \end{Bmatrix}_{Local} = [P] \bullet \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 = 0 \end{Bmatrix}_{Global} \quad (Eq. 1.99)$$

Avec $[P] = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $c = \cos\alpha$; $s = \sin\alpha$

On aura alors pour l'ensemble des degrés de liberté et l'ensemble des sollicitations nodales en se limitant à une matrice :

$$[P] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}_{Local} = \begin{bmatrix} [P] & 0 & 0 \\ 0 & [P] & 0 \\ 0 & 0 & [P] \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}_{Global} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix}_{Local} = \begin{bmatrix} [P] & 0 & 0 \\ 0 & [P] & 0 \\ 0 & 0 & [P] \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix}_{Global} \quad (Eq. 1.100)$$

On peut voir apparaître une matrice de passage $[P](6 \times 6)$ telle que :

$$\begin{Bmatrix} d \end{Bmatrix}_{Local} = [P] \bullet \begin{Bmatrix} d \end{Bmatrix}_{Global} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}_{Local} = [P] \bullet \begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}_{Global} \quad (Eq. 1.101)$$

Il en résulte :

$$[K]_{Global} = [P]^T \bullet [K]_{Local} \bullet [P] \quad (Eq. 1.102)$$

Et la relation de comportement s'écrit comme suit :

$$\left\{ \underset{Global}{F} \right\}_{\underset{Global}{\acute{e}l}} = \left[\underset{Global}{K} \right]_{\underset{Global}{\acute{e}l}} \bullet \left\{ \underset{Global}{d} \right\}_{\underset{Global}{\acute{e}l}} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{array} \right\}_{\underset{Global}{\acute{e}l}} = \left[\underset{Global}{K} \right]_{\underset{Global}{\acute{e}l}} \bullet \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \right\}_{\underset{Global}{\acute{e}l}} \quad (\text{Eq. 1.103})$$

I.2.3.3. Obtention de la matrice de rigidité globale d'une structure

Dans l'exemple précédent, nous avons pu construire la matrice de rigidité d'un élément fini triangulaire. Cependant, une structure discrétisée en plusieurs éléments finis identiques ou de types différents, aura sa matrice de rigidité globale $[K]_{str}$. Cette matrice globale sera construite au moyen des matrices de rigidité des éléments qui la constituent [1].

I.2.3.3.1. Mécanisme d'assemblages des matrices de rigidité élémentaires [1]

Le mécanisme d'assemblage des matrices élémentaires ne se fait pas par redimensionnement de ces dernières à la taille de la matrice de rigidité globale. On peut par exemple écrire pour le terme général de $[K]_{str}$:

$$K_{ij} = \sum_{i,j} (k_{ij})_1 \times \delta_{iI} \times \delta_{jJ} + \sum_{i,j} (k_{ij})_2 \times \delta_{iI} \times \delta_{jJ} + \sum_{i,j} (k_{ij})_3 \times \delta_{iI} \times \delta_{jJ} + \dots \quad (\text{Eq. 1.104})$$

élément1 élément2 élément3

Où l'on a utilisé le symbole de Kronecker :

$$\delta_{iI} = 1 \text{ si } i = I$$

$$\delta_{iI} = 0 \text{ si } i \neq I$$

Soit pour une structure composée de M éléments :

$$K_{ij} = \sum_{m=1}^M \left(\sum_{i,j} (k_{ij})_m \times \delta_{iI} \times \delta_{jJ} \right) \quad (\text{Eq. 1.105})$$

élément m

En pratique on fait défiler simplement une seule fois les termes k_{ij} des matrices de rigidité élémentaires, et on ventile au fur et à mesure ces termes dans un tableau aux dimensions de $[K]_{str}$. Les valeurs des termes affectés à un même emplacement sont cumulées. Lorsque les éléments ont tous été passés en revue la matrice $[K]_{str}$ est constituée. Dans le cas d'une structure complexe discrétisée en nombreux éléments finis, il est courant qu'un même nœud appartienne à plus que deux éléments. Le nombre total d'éléments étant élevé et la numérotation manuelle n'est plus possible. Elle est prise en charge par le logiciel de calcul de façon à minimiser les écarts entre les numéros attribués à des nœuds voisins. Ceci a pour effet

de créer une matrice de rigidité pour la structure qui a ses termes non nuls localisés sur diagonale principale et sur un nombre minimum de diagonales secondaires (Fig. 1.14).

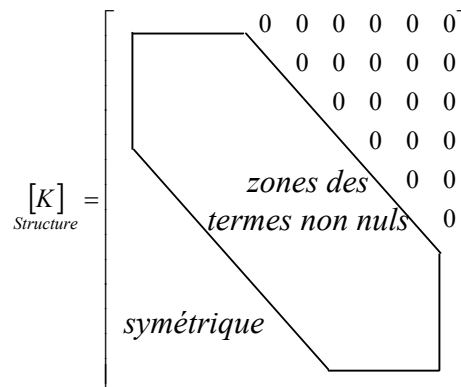


Fig. 1.14 : Matrice bande [1]

I.2.3.3.2. Propriétés de la matrice de rigidité [3]

Une matrice de rigidité [K] associée à une structure possède les propriétés suivantes :

a) [K] est symétrique : cette propriété est obtenue par l’application du théorème de Betti. Ce théorème exprime le résultat suivant :

Soit deux champs de forces P_1 et P_2 induisant des champs de déplacements U_1 et U_2 . Le travail de P_1 dans le champ U_2 est égal au travail de P_2 dans le champ U_1 .

$$D’après le théorème de Betti : [K]^T = [K] \tag{Eq. 1.106}$$

b) Modélisation des conditions d’appui : lorsqu’une structure est décomposée en différents éléments finis, son comportement est régi par la loi de rigidité, $[K][U] = [F]$. Cette équation matricielle ne peut être résolue que si la matrice de rigidité n’est pas singulière ou si la structure n’est pas hypostatique.

Les conditions d’appuis sont donc indispensables et nécessaires pour rendre à cette structure au moins son caractère isostatique. Ces conditions aux limites sont des liaisons définies au préalable.

c) [K] est définie positive : une matrice carrée A d’ordre n est dite définie positive si et seulement si pour tout vecteur X non nul : $X^T AX > 0$. (Eq. 1.107)

Lorsque les forces appliquées à une structure quelconque engendrent des déformations, le travail effectué par ces mêmes forces est emmagasiné dans la structure sous forme d’énergie élastique.

En tenant compte de la définition de la matrice de rigidité (Eq. 1.87), l’énergie élastique s’exprime également par :

$$V = \frac{1}{2} U^T KU \tag{Eq. 1.108}$$

Cette quantité étant positive, il s'ensuit que matrice $[K]$ est définie positive.

d) Positivité des termes diagonaux de $[K]$: la propriété précédente ($[K]$ est définie positive) permet de définir une propriété très utile lorsqu'il s'agit notamment de vérifier la cohérence d'une matrice de rigidité de grande taille. Considérons un élément fini à 6 degrés de liberté. Les conditions limites choisies sont telles que déplacements et rotations sont tous bloqués hormis le déplacement axial d'une extrémité u_1 .

Dans ce cas, $U^T K U > 0$ implique $K_{11} u_1^2 > 0$ et donc $K_{11} > 0$

On établit de la même façon que pour i compris entre 1 et 6 inclus : $k_{ii} > 0$.

Tous les termes diagonaux d'une matrice de rigidité sont donc positifs.

I.2.3.4. Equation de l'équilibre dynamique [3]

Dans le cas le plus général, un noeud possède six mouvements possibles (3 translations et 3 rotations) et le nombre de degrés de liberté de systèmes est égal à $N=6p$ où p est le nombre de nœuds. L'équation d'équilibre dynamique d'une structure peut être obtenue en écrivant en chaque nœud et pour chaque degré de liberté que la résultante des forces est nulle. Ces forces se composent de :

- force de rigidité " f_K "
- force d'amortissement " f_C "
- force d'inertie " f_I "
- force extérieure " P "

L'équilibre général du système s'exprime, pour chaque degré de liberté " i " :

$$f_{Ki} + f_{Ci} + f_{Ii} = P_i \quad (\text{Eq. 1.109})$$

Chacune des forces résistantes (rigidité, amortissement ou inertie) s'exprime, de façon plus générale, à l'aide de coefficients d'influence traduisant la dépendance de la force en un point sur la valeur du mouvement de tous les autres points [3].

I.2.3.5. Construction de la matrice de rigidité pour un oscillateur à deux degrés de liberté [3]

La définition de la matrice de rigidité (Eq. 1.87) montre que le terme k_{ij} de la matrice est égal à la force qu'il faut appliquer au degré de liberté i pour lui imposer un déplacement unitaire tout en maintenant nuls les autres degrés de liberté.

L'exemple suivant illustre un oscillateur à deux degrés de liberté constitué de deux masses reliées par des ressorts de raideur k_1 et k_2 . (Fig. 1.15)

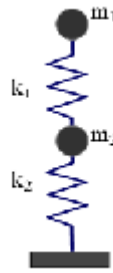


Fig. 1.15 : *Système masse-ressort à deux degrés de liberté [3]*

Le système possède deux degrés de liberté, les déplacements u_1 et u_2 des deux masses. Un déplacement unitaire ($u_1=1$) appliqué à la masse m_1 , en maintenant le déplacement u_2 de la masse m_2 nul, nécessite d'appliquer une force k_1 , à la masse m_1 et $-k_1$ à la masse m_2 . De même, unitaire u_2 appliqué à la masse m_2 , tout en maintenant une valeur nulle pour u_1 , nécessite l'application d'une force $-k_1$ à la masse m_1 et $(k_1 + k_2)$ à la masse m_2 . Il en résulte la structure de la matrice $[K]$.

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 1.112})$$

I.2.3.6. Construction de la matrice de rigidité pour un oscillateur à trois degrés de liberté [3]

Une schématisation simplifiée d'un oscillateur à trois degrés de liberté est montrée sur la figure suivante (Fig. 1.16) :

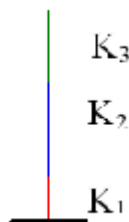


Fig. 1.16 : *Oscillateur à trois degrés de liberté*

Soient k_1 , k_2 et k_3 les rigidités des trois éléments qui constituent l'oscillateur. La matrice de rigidité issue de ce modèle est donnée comme suit :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 1.113})$$

I.2.3.7. Résolution du système $\{F\} = [K] \bullet \{d\}$

Pour une structure quelconque considérée, on constitue dans un premier temps sa matrice globale $[K]_{str}$ par assemblage des matrices élémentaires $[K]_{el}$ exprimées dans le repère global. Le système d'équations complet exprimant le comportement de la structure s'écrit :

$$\{F\} = [K]_{str} \bullet \{d\} \quad (\text{Eq. 1.114})$$

Dans un second temps, on appuie convenablement la structure. Un certain nombre de degrés de liberté de cette structure sont alors bloqués, c'est-à-dire que leurs valeurs sont nulles. Désignons par $\{d\}_0$ ces degrés de liberté. ($\{d\}_0 = \{0\}$). Les degrés de liberté demeurés libres sont notés $\{d^*\}$. Ce sont les degrés de liberté qu'on désire calculer. Le système d'équations complet, soit $\{F\} = [K]_{str} \bullet \{d\}$, est alors arrangé de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_l \\ F^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_l] & [K_l^*] \\ [K_l^*]^T & [K^*] \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} d_0 = 0 \\ d^* \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq. 1.115})$$

Elle permet d'écrire deux sous-systèmes :

$$\begin{matrix} \{F^*\} \\ \text{efforts} \\ \text{appliqués} \\ \text{connus} \end{matrix} = [K^*] \bullet \begin{matrix} \{d^*\} \\ \text{inconnus} \end{matrix} \quad (\text{Eq. 1.116})$$

$$\begin{matrix} \{F^*\} \\ \text{actions} \\ \text{liaisons} \\ \text{inconnues} \end{matrix} = [K^*] \bullet \begin{matrix} \{d^*\} \\ \text{inconnus} \end{matrix} \quad (\text{Eq. 1.117})$$

On doit résoudre d'abord (Eq. 1.116) par inversion de la matrice $[K^*]$ qui est une sous matrice de la matrice de rigidité initiale complète $[K]_{str}$ de la structure. Cette inversion conduit à l'obtention de la matrice de souplesse de la structure discrétisée associées à ses conditions d'appui. Elle permet le calcul des degrés de liberté libres, soit $\{d^*\}$.

On injecte les valeurs de $\{d^*\}$ trouvées dans le système (Eq. 1.117) et on obtient ainsi les actions de liaison $\{F_l\}$ [1].

I.2.3.8. Formulation de la méthode des éléments finis par l'approche des résidus pondérés [4]

Cette approche s'inscrit dans le même contexte du traitement des systèmes discrétisés en éléments finis. En fait, un problème relevant de la dynamique des structures se pose pour un oscillateur simple par l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -ma(t) \quad (\text{Eq. 1.118})$$

Avec m : la masse, c : l'amortissement, k : la rigidité, $a(t)$: l'accélération

Ou bien d'une façon générale :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + C(x)\frac{du}{dx} + k(x)u = f(x) \quad (\text{Eq. 1.119})$$

Pour des valeurs générales de $C(x)$ et $k(x)$, il n'est pas possible de trouver $u(x)$ exactement. Donc, on doit rechercher une bonne approximation de $u(x)$ appelée $\hat{u}(x)$. Cette bonne approximation peut être exprimée de la manière suivante :

Soit $u(x)$ la solution exacte, et soit $\hat{u}(x)$ l'approximation :

$$\|u - \hat{u}\| < \varepsilon : \varepsilon \text{ suffisamment petit}$$

Alors que $u(x)$ solution exacte appartient à un espace de dimension infinie, $\hat{u}(x)$ est choisie à partir d'un espace de dimension finie. Ainsi :

$$\hat{u}(x) = \gamma_1\phi_1 + \gamma_2\phi_2 + \dots + \gamma_n\phi_n \quad (\text{Eq. 1.120})$$

Où : γ_i : scalaire ; $\{\phi_j(x)\}_{j=1}^n$: base

1.2.3.8.1. Méthodes des résidus pondérés (Method of Weighted Residuals : MWR) [4]

Soit l'équation différentielle :

$Lu = f$: admet une solution unique $u(x)$ si le problème est mathématiquement bien posé.

$$MWR \Rightarrow L\hat{u} = f \text{ avec } \hat{u}(x) \neq u(x) \quad (\text{Eq. 1.121})$$

Et la procédure MWR s'effectue comme suit :

1. Choisir un espace de dimension finie S_N dans lequel on recherche une bonne approximation
2. Définir $\hat{u}(x) \in S_N : \hat{u}(x) = \sum_{j=1}^N \gamma_j \phi_j(x)$
3. Décider d'une manière de trouver $\{\gamma_j\}_{j=1}^N$

Comme en général \hat{u} ne satisfait pas l'équation gouvernante en tout point du domaine :

$$L\hat{u} - f \neq 0 \quad (\text{Eq. 1.122})$$

L'idée est de formuler une exigence moins sévère à savoir forcer $(L\hat{u} - f)$ à être nul au sens d'une moyenne pondérée à travers le domaine Ω

$$L\hat{u} - f = R(x) \neq 0 \quad (\text{Eq. 1.123})$$

$$\int_{\Omega} R(x)W_i(x)d\underline{x} = 0 ; i = 1, 2, \dots, M \quad (\text{Eq. 1.124})$$

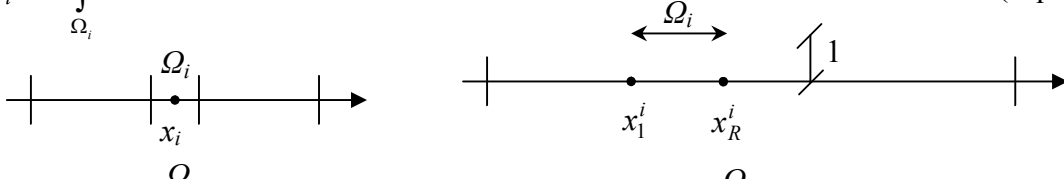
Cette relation est appelée la formule générale de la méthode des résidus pondérés

$W_i(\underline{x})$ est appelé fonction poids

La question maintenant est comment choisir S_N et $W_i(x)$ et c'est le choix de cette fonction poids $W_i(x)$ qui définit les différentes méthodes au sein de l'approche des résidus pondérés.

I.2.3.8.1.1. Méthode des sous-domaines [4]

$$W_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_i \\ 0 & x \notin \Omega_i \end{cases}$$

$$\int_{\Omega} RW_i dx = \int_{\Omega_i} R dx = 0 \quad (\text{Eq. 1.125})$$


I.2.3.8.1.2. Méthode des Collocations [4]

$$W_i(x) = \delta(x - x_i^e) \quad i = 1, 2, \dots, M$$

$$\int_{\Omega} R(x)W_i(x)dx = \int_{\Omega} R(x)\delta(x - x_i^e)dx = R(x_i^e) = 0 \quad (\text{Eq. 1.126})$$

I.2.3.8.1.3. Méthode de Galerkin [4]

Alors que les deux précédentes méthodes présentent un fondement intuitif sur lequel se base le choix des fonctions poids, la méthode de Galerkin ne présente pas aussi un fondement aussi évident.

$$W_i(x) = \phi_i(x) : \text{fonction de base} \quad (\text{Eq. 1.127})$$

$$\int_{\Omega} R(x)\phi_i(x)dx = 0 \quad (\text{Eq. 1.128})$$

Et c'est le choix de la fonction de base qui résoudra le problème. Pour cela, plusieurs choix sont établis pour ces fonctions, tels que : polynômes de Legendre (orthogonaux) et le polynôme de Lagrange. Le choix du polynôme de Lagrange est populaire car il présente l'avantage d'établir un lien direct entre les coefficients $\{\gamma_j\}$ et la solution inconnue $\hat{u}(x)$. En effet les coefficients γ_j correspondent exactement aux valeurs nodales de $\hat{u}(x)$.

I.2.4. Estimation analytique de la rigidité des structures en béton armé

Les structures en béton armé se composent généralement d'assemblages de poteaux et poutres, appelé portiques. Chaque élément possède sa propre rigidité. Pour ces structures, on peut avoir des expressions de la rigidité qui tiennent compte du béton et de l'acier et la rigidité d'un étage peut être déterminée par un calcul de résistance des matériaux et de béton armé.

I.2.4.1. Rigidité d'un poteau [5]

La rigidité d'un poteau encasté en pied et constitué d'un seul élément fini de longueur l , de module d'Young E et d'inertie I est donnée par la formule suivante :

$$k = \frac{3EI}{l^3} \tag{Eq. 1.129}$$

I.2.4.2. Rigidité d'un portique [5]

Le portique est constitué d'assemblage poteaux-poutres et sa rigidité est déterminée à l'aide d'une méthode appelée la méthode de Muto et qui se représente comme suit :

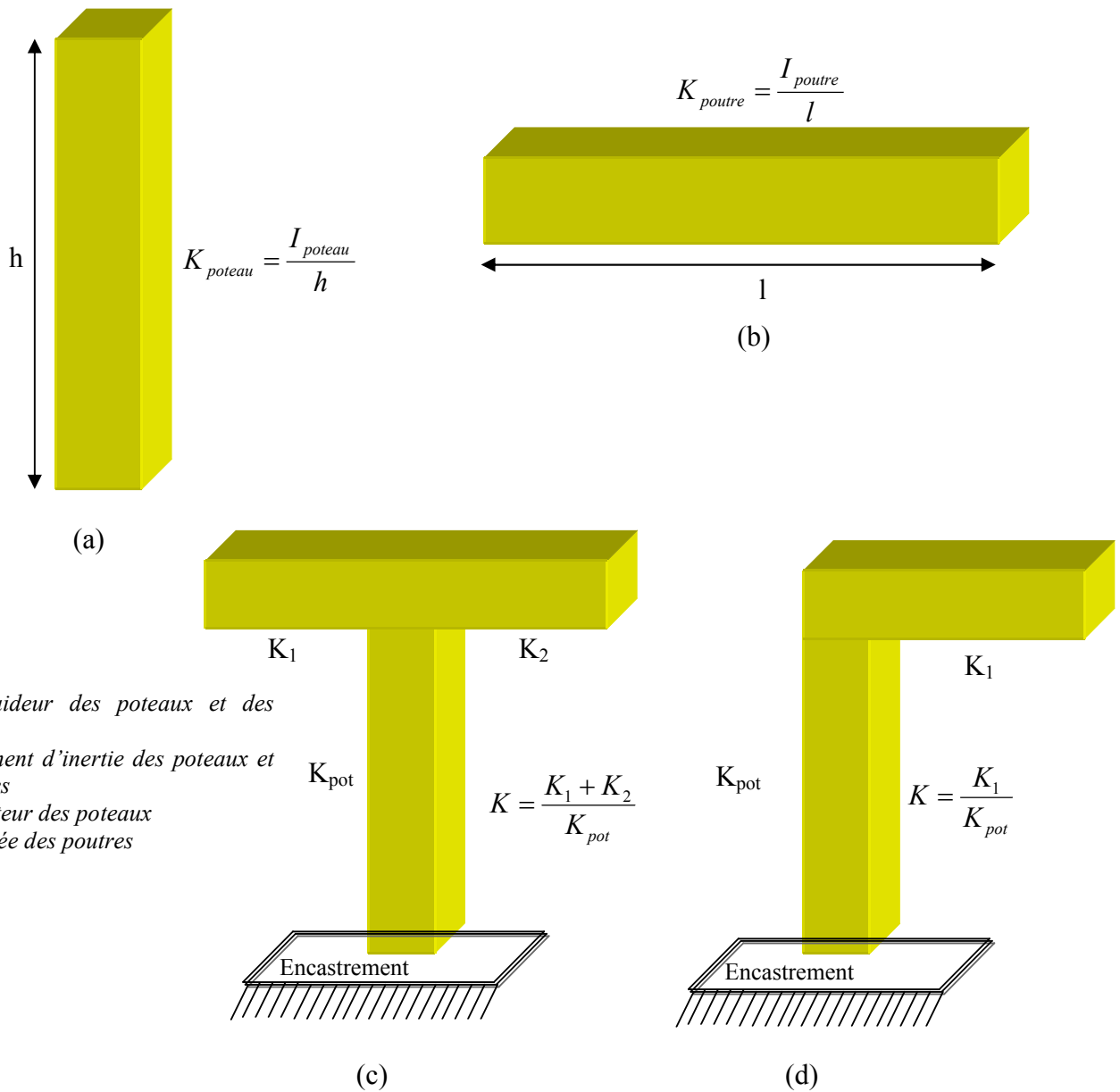


Fig. 1.17 : Présentation de la méthode MUTO pour un niveau RDC ; (a) : raideur d'un poteau, (b) : raideur d'une poutre, (c) : raideur d'un assemblage en travée, (d) : raideur d'un assemblage en coin

On note que le moment d'inertie est celui de la section totale rendue homogène I_t . Le principe d'homogénéisation conduit à remplacer une section d'acier "A" par une section équivalente de béton égale à "nA" où "n" est le coefficient d'équivalence (Fig. 1.18).

On montre que [6]:

$n = (E_s / E_b) - 1$ et le terme (-1) provient du fait que l'acier remplace une même section de béton qu'il faut donc déduire, en toute rigueur.

On peut, alors, calculer I_t par la formule approchée [6] :

$$I_t = \left(\frac{bh_i^3}{12} \right) + nAe^2 \quad (\text{Eq. 1.130})$$

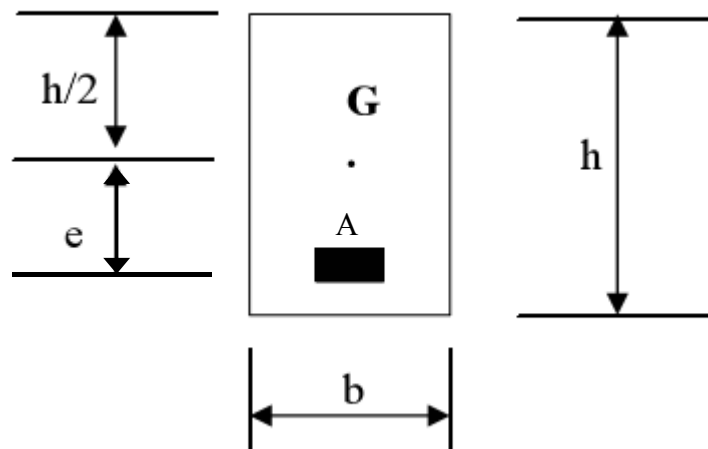


Fig. 1.18 : Homogénéisation de la section en béton armé [6]

On définit un coefficient de correction "a" qui est donné comme suit [5] :

$$a = \frac{K + 0.5}{2 + K} \quad (\text{Eq. 1.131})$$

La rigidité " R_j " d'un portique " a_i " constitué de "m" poteaux au niveau "j" est donné comme suit [5] :

$$R_j = \frac{12E}{h_j^2} \sum_{i=1}^m a_i K_{pot} \quad (\text{Eq. 1.132})$$

Cette méthode telle qu'elle était présentée ci-dessus, sera utilisée dans ce travail dans le but d'estimer pour un niveau RDC d'une structure en béton armé la rigidité nécessaire permettant d'avoir un niveau de performance précis.

I.2.5. Rigidité de la structure dans le cadre d'une méthode en performance

La plupart des règlements modernes en ingénierie sismique ont fait apparaître le besoin de définir l'état d'une structure lors de sa réponse à une excitation sismique par un niveau de performance dont la signification est proche des états limites ultimes et de service [7].

La définition de ces niveaux de performance permet plus clairement de différencier la multitude de réponses possibles d'une structure à laquelle on attribue une fonction ou encore les différents états possibles d'une structure du point de vue fonctionnel que la simple distinction entre un état limite de service et un état limite ultime.

La FEMA 356 [8] définit par exemple quatre niveaux de performance correspondant à l'endommagement attendu après un séisme :

- Opérationnel : les fonctions du bâtiment restent opérationnelles et les dommages sont insignifiants.
- Occupation immédiate : le bâtiment reste sûr et habitable et les réparations sont mineures.
- Sécurité des personnes : la structure reste stable avec une marge de sécurité confortable et les dommages sont non structuraux et restent localisés.
- Non-effondrement : le bâtiment ne s'effondre pas et les dommages sont généralisés.

Ces quatre niveaux de performance peuvent être raffinés tant que les analyses du comportement de la structure permettent de les décrire : ils peuvent correspondre aux plages de dommages représentées sur une courbe de "Push-over" ou en "poussée progressive" reliant généralement le déplacement au sommet d'une structure à l'effort tranchant résultant à sa base, comme il est montré sur la figure suivante (Fig. 1.19) :

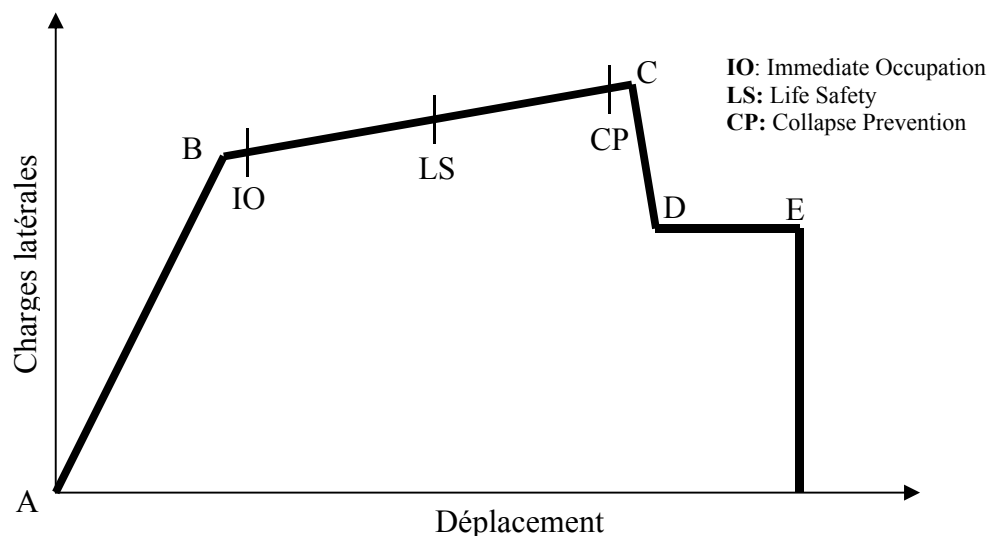


Fig. 1.19 : Courbe type Charge-Déformation de "Pushover" : représentation de plages de dommages conventionnelles [8]

Cette figure (Fig. 1.19) nous montre les différentes plages de dommages éventuelles suite à un séisme donné. Donc, si on considère que la ressemblance architecturale entre des différents bâtiments (même surface de plancher et nombre d'étages) est le seul critère de classement des types de bâtiments, ce qui constitue en effet la pratique courante chez les promoteurs immobiliers, on peut constater par la suite que pour le même type de bâtiments, il existe des différentes réponses caractérisées chacune par sa performance. Cette performance pourrait être atteinte par une amélioration de la rigidité des éléments constitutifs de la structure en augmentant leurs sections du béton et d'acier.

I.2.5.1. Analyse statique non linéaire Pushover

L'analyse statique non-linéaire Pushover est un outil utilisé pour l'évaluation de la performance sismique des bâtis existants ainsi que des nouvelles structures. L'utilisation de cette analyse nous permet d'évaluer la demande sismique imposée par le séisme au niveau de la structure et ses composantes [9].

I.2.5.2. But de l'analyse Pushover

Le but de l'analyse Pushover est d'évaluer la performance d'une structure soumise à un séisme, en estimant sa demande en déplacement et la comparer ensuite avec la capacité disponible relative au niveau de performance attribué à cette structure. Autrement dit, cette analyse peut être considérée comme un outil de détermination de la demande en déplacement de la structure quand elle est soumise à une excitation sismique donnant naissance à une réponse non-linéaire [9].

L'analyse Pushover est prévue pour fournir des caractéristiques de la réponse de la structure qu'on ne peut pas obtenir par une analyse statique élastique ou une analyse dynamique, telles que [9]:

- la demande réelle en force au niveau des éléments potentiellement fragiles tels que la demande en forces axiales dans les poteaux, la demande en moment au niveau des assemblages poteau-poutre, la demande en force de cisaillement dans les murs en béton armé et en maçonnerie aussi, etc ...
- l'estimation de la demande des déformations pour les éléments qui se déforment d'une façon inélastique afin de dissiper l'énergie transmise à la structure par le séisme.
- l'effet de la dégradation de la résistance au niveau de chaque élément de la structure sur la réponse globale de la structure ce qui permet de localiser les points forts et les points faibles dans la structure.
- l'identification des zones critiques dans lesquelles les déformations sont prévues pour être importantes.

- l'identification des discontinuités de la résistance en plan et en élévation et qui mènent à des changements dans les caractéristiques dynamiques dans le domaine inélastique.
- l'estimation des déplacements inter-étages engendrés par les discontinuités de la résistance ou de la rigidité et qui peuvent être utilisés pour le contrôle des dommages et l'évaluation des effets P-delta.

I.2.5.4. Etudes antérieures sur l'analyse Pushover

L'analyse Pushover s'est présentée comme une méthode simplifiée inscrite dans le domaine des analyses non-linéaires dont la difficulté de la modélisation et la lourdeur des calculs étaient leurs points noirs, tout en les défavorisant par rapport aux autres approches linéaires équivalentes.

Dans ce contexte d'éclaircissement du fondement de cette méthode, plusieurs travaux de recherche ont été réalisés par les chercheurs et qui portaient sur des différents aspects de l'analyse Pushover et cela pour identifier ses limitations, ses faiblesses et proposer une analyse Pushover plus performante du point de vue de la distribution des charges latérales, l'effet des modes supérieurs, les mécanismes de ruptures, ...etc. Dans une publication très réputée, *Krawinkler et Seneviratna* [9] ont essayé de répondre à des questions principales liées à l'analyse Pushover. Ils ont mené une étude détaillée faisant l'objet des questions liées aux avantages, les inconvénients et le domaine d'application de l'analyse Pushover en fonction des différents aspects de la procédure. Leurs travaux ont été réalisés sur une structure d'acier en R+4 endommagée suite au séisme de Northridge en 1994. La structure était soumise à neuf enregistrements sismiques. La comparaison entre les résultats obtenus par l'analyse Pushover et l'analyse dynamique non-linéaire a conclu que l'analyse Pushover fournit de bonnes prédictions de la demande sismique tout en recommandant de plus s'approfondir pour rendre cette méthode plus performante. Dans le même contexte, *Mwafy et Elnashai* [10] ont effectué une série des analyses Pushover et des analyses dynamiques incrémentales destructives pour la vérification de la validité de l'analyse Pushover. L'étude s'est effectuée sur 12 bâtiments en béton armé avec des différents systèmes de contreventement (4 bâtiments irréguliers de huit étages en portiques, 4 bâtiments réguliers de 12 étages en portiques et 4 bâtiments de huit étages en portiques-voiles), soumis aux différentes accélérations sismiques (0.15g et 0.30g) et avec des différents niveaux de ductilité (faible, moyen et haut). Les résultats obtenus suite à l'utilisation d'un modèle triangulaire de distribution des charges latérales ont eu une bonne corrélation avec les résultats issus de l'analyse dynamique, une bonne prédiction de la capacité de la structure ainsi qu'une estimation raisonnable des déformations ont été également obtenues. En outre, ils ont conclu

que cette analyse est beaucoup plus appropriée pour le cas des structures non-élancées d'une petite période et l'adéquation du modèle triangulaire pour ce type des structures. L'incapacité du modèle invariant à reproduire la distribution des forces d'inertie et à prendre en compte de l'effet des modes supérieurs dans le domaine post-élastique a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche ayant pour but d'apporter des modèles plus adaptés. *Fajfar et Fischinger* [11] ont suggéré d'utiliser un modèle de chargement proportionnel à la déformée de la structure. *Eberhard et Sozen* [12] ont proposé des modèles basés sur les formes issues des rigidités sécantes pour chaque étape de chargement. Plus de pertinence a été apportée à cette méthode suite aux travaux de *Sasaki, Freeman et Paret* [13] qui ont présenté une analyse Pushover multi-modale pour identifier les mécanismes de rupture dus aux modes supérieurs. La procédure consiste en l'utilisation, en outre du modèle de chargement basé sur le mode fondamental, des modèles basés sur les modes supérieurs. Les courbes de capacité ont été obtenues suite à l'analyse pushover pour chaque modèle correspondant à chaque mode, puis la capacité de la structure a été comparée avec la demande sismique en utilisant la méthode de spectre de capacité [14]. Les courbes de capacité et les spectres de réponse tracés sous formats ADRS (Acceleration Displacement Response Spectra) ont été rapportés sur le même graphe dont les intersections entre les deux présentent la demande sismique de la structure. Une structure d'acier à 17 étages et endommagée par le séisme de Northridge en 1994 ainsi qu'une autre à 12 étages endommagée par le séisme de Loma Prieta en 1989 ont été étudiées. Pour les deux structures, l'analyse Pushover basée seulement sur le mode fondamental n'a pas réussi à fournir une bonne évaluation des dommages réels qu'a subis la structure. Toutefois, les résultats obtenus par l'introduction des modes supérieurs et/ou l'effet combiné du premier mode avec les modes supérieurs ont bien cerné les dommages réels. Il a été conclu que ce type d'analyse serait très utile pour l'identification des mécanismes de rupture dus aux modes supérieurs pour le cas des structures ayant une contribution significative de ces modes dans la réponse sismique. Bien que cette dernière analyse a prouvé son efficacité à prendre en compte les modes supérieurs, elle ne donnait pas une estimation des réponses sismiques et leurs distributions à travers la structure. *Moghadam* [15] a proposé une procédure d'estimation des réponses dues aux effets des modes supérieurs pour le cas des structures élancées. Des séries d'analyse Pushover ont été réalisées en utilisant des modèles de chargement basés sur les déformées des modes élastiques. Les réponses sismiques maximales ont été estimées par la combinaison des réponses individuelles des analyses Pushover. La règle de combinaison proposée consiste en la multiplication de la réponse de chaque mode par le facteur de participation des masses correspondant à chaque mode considéré. La procédure était

appliquée sur une structure d'acier de 20 étages qui a été soumise à 6 séismes différents. La moyenne des déplacements maximums, le ratio de déplacement maximum inter-étages ont été calculés. Aussi, l'analyse Pushover pour les trois premiers modes été effectuée et les réponses de chaque mode étaient combinées pour l'estimation de la réponse finale. La comparaison des déplacements et les ratios des déplacements inter-étages avec la moyenne des réponses maximales issues des six analyses dynamiques non linéaires ont conduit à une bonne corrélation. Finalement, *Chopra et Goel* [16] ont développé une procédure d'analyse Pushover améliorée, appelée l'analyse modale Pushover (Modal Pushover Analysis) dont le fondement est basé sur les théories de la dynamique des structures. La procédure a été appliquée sur des structures linéaires élastiques dont les résultats obtenus ont montré son équivalence à l'analyse spectrale. Puis, la procédure était appliquée pour l'estimation de la demande sismique des systèmes inélastiques. L'exemple traité était un bâtiment de 9 étages en acier dont la demande sismique était évaluée par l'analyse modale Pushover, l'analyse dynamique non linéaire et l'analyse Pushover basée sur un modèle uniforme et un modèle multimodal de chargement. La comparaison des résultats montrait que l'analyse Pushover pour tous les modèles de chargement sous-estime la demande en déplacement au niveau des étages et conduisait à des erreurs au niveau des rotules plastiques de rotation. L'analyse modale Pushover était plus pertinente pour l'estimation des déplacements d'étages, les déplacements, les rotules plastiques de rotation et la localisation des rotules plastiques. Ils ont conclu que faire inclure la contribution d'un nombre suffisant des modes (deux ou trois), mènent généralement à des résultats similaires aux résultats "exactes" obtenus par l'analyse dynamique non linéaire dans l'estimation de la distribution des réponses dues aux modes supérieurs.

I.3. Conclusion

L'étude bibliographique présentée dans ce chapitre nous a permis de définir la notion de la rigidité et les différentes approches qui ont été établies pour sa détermination. Les méthodes énergétiques et la discrétisation en éléments finis sont considérées comme les principales méthodes dans ce domaine. De même, nous avons présenté le cas particulier des structures en béton armé où les expressions de la rigidité tiennent compte de ses deux matériaux constitutifs (béton et l'acier) d'une part, et de la distribution de cette rigidité au niveau des différents assemblages des éléments de la structure d'une autre part. Dans le même contexte, nous avons présenté l'évolution de l'analyse sismique pour ce type de structures. Une évolution marquée principalement par l'avènement des méthodes en performance et leurs outils de calculs non linéaires. À ce titre, nous avons présenté un bref aperçu sur ces méthodes ainsi que l'analyse statique non-linéaire Pushover qui se présente comme la méthode la plus attractive dans ce domaine. Pour cela, Nous avons présenté aussi les différents objectifs de cette analyse.

Chapitre II

ANALYSE STATIQUE NON-LINEAIRE PUSHOVER

II. ANALYSE STATIQUE NON-LINEAIRE "PUSHOVER"

II.1. Introduction

Bien qu'elle est basée sur une méthode approximative, l'analyse statique non-linéaire Pushover comporte plusieurs démarches et étapes de calcul. Ce chapitre présentera les différents concepts de base pour cette analyse. Au premier lieu, nous présenterons son fondement théorique. Les procédures principales nécessaires pour son exécution y seront ensuite présentées. En finir avec l'exploitation des résultats issus de cette analyse.

II.2. Fondement théorique de l'analyse pushover [9]

Le nom de « Pushover » vient de ce que le fondement de la méthode consiste à établir une courbe effort-déplacement unique pour caractériser le comportement de la structure en la « poussant » de plus en plus fort. Il s'agit d'un calcul statique, prenant en compte un modèle non linéaire ou linéaire équivalent, dans lequel les charges gravitaires restent constantes et les efforts horizontaux, appliqués au niveau des masses du modèle de la structure pour reproduire les forces d'inertie représentatives de l'action sismique, ont une répartition généralement semblable à celle des déplacements du mode fondamental de vibration [7].

La courbe traduisant le comportement de la structure (Fig. 2.1) est tracée en portant en abscisse le déplacement du sommet et en ordonnée l'effort tranchant à la base. Elle est supposée constituer une caractéristique intrinsèque de la structure du point de vue de l'effet des actions horizontales de nature statique ou dynamique. Elle fournit une estimation des mécanismes de plastifications attendus et de la distribution de l'endommagement progressif, en fonction de l'intensité des forces et des déplacements horizontaux [7].

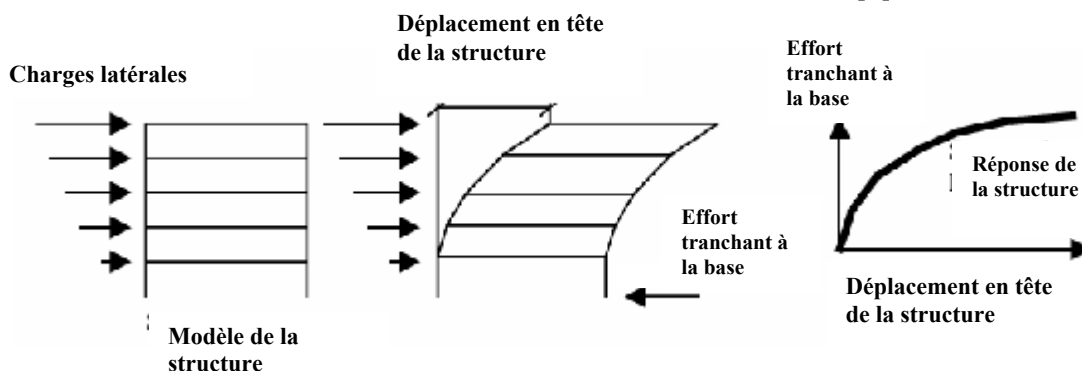


Fig. 2.1 : L'approximation statique utilisée en analyse Pushover [17]

L'analyse statique pushover se base sur l'hypothèse que la réponse de la structure peut être exprimée par la réponse d'un système équivalent à un seul degré de liberté (ddl), ce qui implique que la réponse de la structure serait contrôlée par un seul mode, ainsi que la déformée de ce mode reste constante durant tout l'historique de la réponse.

Les différentes études réalisées dans ce contexte, ont montré que ces propositions mènent à des prédictions assez performantes pour l'évaluation de la réponse sismique des structures à plusieurs ddl.

II.2.1. Passage d'un système à plusieurs ddl à un système linéaire équivalent à un seul ddl [9]

En fait, le passage d'un système de plusieurs ddl à un système linéaire à un seul ddl équivalent n'a pas une seule formulation pour l'établir, néanmoins, toutes les approches supposent que la déformée du système à plusieurs ddl peut être représentée par une forme de vecteur $\{\Phi\}$ qui reste constante durant tout l'historique de la réponse quel que soit le degré des déformations (Fig. 2.2).

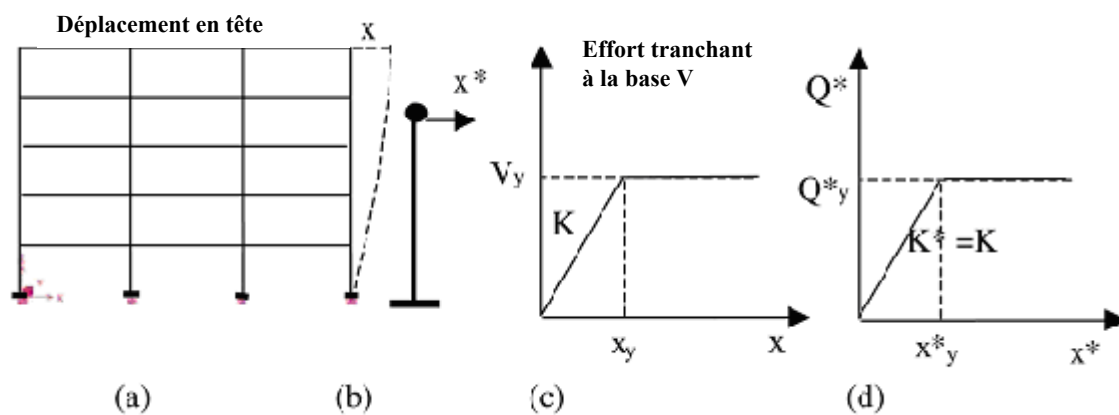


Fig. 2.2 : Exemple de passage d'un système à plusieurs ddl à un système équivalent à un seul ddl : (a) présentation du système, (b) système équivalent à un seul ddl, (c) modèle à plusieurs ddl, (d) modèle à un seul ddl équivalent[18]

Admettons cette supposition et définissons le vecteur du déplacement X relatif au système à plusieurs ddl comme suit :

$$X = \{\Phi\}x_t \quad (\text{Eq. 2.1})$$

x_t : est le déplacement au sommet de la structure

L'équation différentielle gouvernant le système à plusieurs ddl s'écrit comme suit :

$$M\{\Phi\}\ddot{x}_t + C\{\Phi\}\dot{x}_t + Q = -M\{1\}\ddot{x}_g \quad (\text{Eq. 2.2})$$

M : est la matrice de masse

C : est la matrice d'amortissement

Q : indique le vecteur de force au niveau d'étage

\ddot{x}_g : est l'accélération du séisme

On définit x^* le déplacement de référence du système à un seul ddl comme suit :

$$x^* = \frac{\{\Phi\}^T M \{\Phi\}}{\{\Phi\}^T M \{1\}} x_t \tag{Eq. 2.3}$$

On multiplie l'équation (Eq. 2.2) par $\{\Phi\}^T$ et on remplace x_t par sa valeur déduite de l'équation (Eq. 2.3), on obtiendra l'équation différentielle suivante qui décrit la réponse du système à un seul ddl équivalent comme suit :

$$M^* \ddot{x}^* + C^* \dot{x}^* + Q^* = -M^* \ddot{x}_g^* \tag{Eq. 2.4}$$

M^* , C^* et Q^* représentent les propriétés du système à un seul ddl équivalent et sont données par :

$$M^* = \{\Phi\}^T M \{1\} \tag{Eq. 2.5}$$

$$Q^* = \{\Phi\}^T Q \tag{Eq. 2.6}$$

$$C^* = \{\Phi\}^T C \{\Phi\} \frac{\{\Phi\}^T M \{1\}}{\{\Phi\}^T M \{\Phi\}} \tag{Eq. 2.7}$$

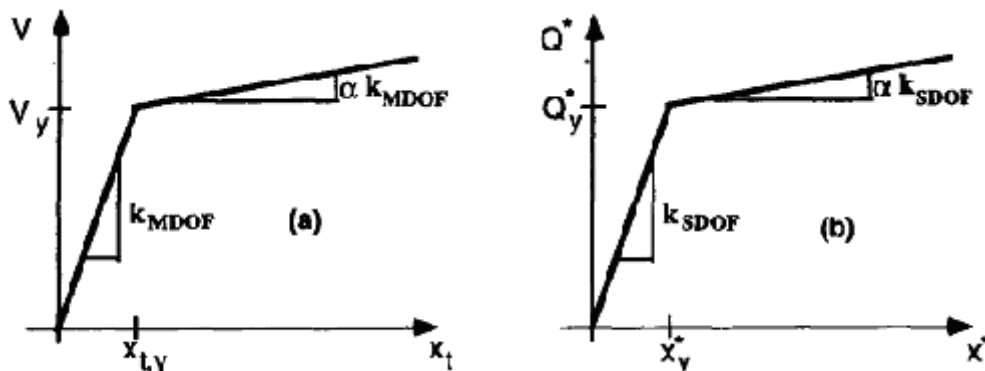


Fig. 2.3 : (a) : Courbe force-déplacement pour système à plusieurs ddl, (b) pour un système à un seul ddl [9]

Supposons que le vecteur de forme modal $\{\Phi\}$ est connu, la relation force-déformation du système à un seul ddl équivalent (relation $Q^* - x^*$) illustrée sur la figure (Fig. 2.3.b), peut être déterminée à partir des résultats de l'analyse statique non linéaire incrémentale du système à plusieurs ddl souvent interprétés sous forme d'une courbe effort tranchant à la base – déplacement en tête (x_t ou δ_t) comme il est illustré sur la figure suivante (Fig. 2.4) :

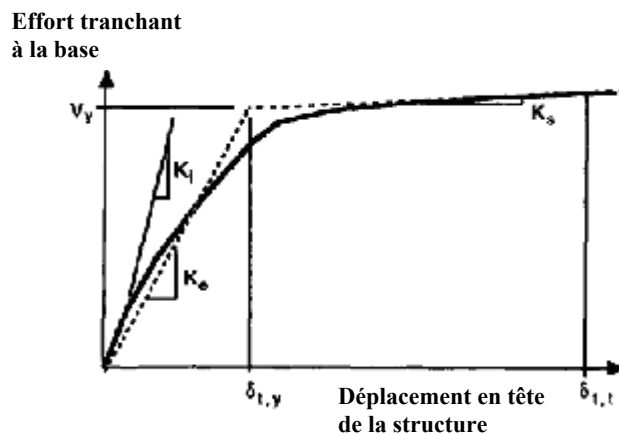


Fig. 2.4 : Courbe effort tranchant à la base - déplacement en tête [9]

Afin d'identifier les forces globales et les déplacements, cette courbe $V-\delta_t$ multilinéaire sera représentée par une courbe bilinéaire définissant les valeurs suivantes :

V_y : la limite élastique (yield strength)

$K_e = \frac{V_y}{\delta_{t,y}}$: la rigidité effective élastique (effective elastic stiffness)

$K_s = \alpha K_e$: la rigidité de durcissement ou adoucissement (hardening or softening stiffness)

De même, une courbe effort tranchant à la base - déplacement en tête du système à plusieurs ddl, simplifiée et bilinéaire est nécessaire pour définir les propriétés du système à un seul ddl équivalent (Fig. 2.3.a).

La limite élastique (V_y) et le déplacement en tête correspondant ($x_{t,y}$) déterminés à partir de la courbe (Fig. 2.3.a), sont utilisés ensemble par les équations (Eq. 2.3) et (Eq. 2.6) pour déterminer la relation force -déplacement du système à un seul ddl équivalent, comme suit :

$$x_y^* = \frac{\{\Phi\}^T M \{\Phi\}}{\{\Phi\}^T M \{1\}} x_{t,y} \quad Q_y^* = \{\Phi\}^T Q_y \quad (\text{Eq. 2.7})$$

Avec : Q_y : est la force au niveau d'étage correspondant à la limite élastique, i.e. $V_y = \{1\}^T Q_y$

La période initiale du système à un seul ddl équivalent T_{eq} est déterminée comme suit :

$$T_{eq} = 2\pi \left[\frac{x_y^* M^*}{Q_y^*} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Eq. 2.8})$$

Donc, les propriétés de base du système à un seul ddl équivalent sont connues et la question importante maintenant pour exécuter l'analyse Pushover est la valeur du déplacement cible correspondant au niveau de performance attribué à la structure.

Le déplacement cible représente la valeur prévue pour le déplacement global de la structure suite à une excitation sismique. Plusieurs facteurs interviennent dans sa détermination, tels que : la période, l'accélération spectrale, le niveau de performance, ainsi que les caractéristiques spectrales des systèmes inélastiques à un seul ddl développés ces dernières années.

L'utilisation du spectre inélastique implique l'introduction de la notion du facteur de comportement R . Le spectre inélastique est souvent obtenu par un système à masse unitaire. On divise l'équation (Eq. 2.2) par M^* pour obtenir l'équation différentielle du système à un seul ddl équivalent avec masse unitaire comme suit :

$$\ddot{x}^* + \frac{C^*}{M^*} \dot{x}^* + \frac{Q^*}{M^*} = -\ddot{x}_g \quad (\text{Eq. 2.9})$$

Cette équation décrit la réponse d'un système à un seul ddl équivalent avec masse unitaire d'une période T_{eq} et limite élastique $F_{y,eq}$ donnée comme suit :

$$F_{y,eq} = \frac{Q_y^*}{M^*} \quad (\text{Eq. 2.10})$$

Si le spectre de réponse élastique est connu, la demande de la résistance élastique du système à un seul ddl équivalent avec masse unitaire pourrait être obtenue par la relation suivante :

$$F_{e,eq} = S_a(T_{eq}) \quad (\text{Eq. 2.11})$$

Avec $S_a(T_{eq})$: est l'ordonnée spectrale du spectre de réponse élastique en accélération correspondant à T_{eq} .

Le facteur de comportement appelé aussi le facteur de réduction des forces R pourrait être obtenu maintenant par la relation suivante :

$$R = \frac{F_{e,eq}}{F_{y,eq}} = \frac{S_a(T_{eq})M^*}{Q_y^*} \quad (\text{Eq. 2.12})$$

Le facteur R ainsi que le déplacement cible dépendent du choix du vecteur de forme $\{\Phi\}$. Dans tous les cas étudiés, l'utilisation d'un simple vecteur de forme (tel que le vecteur du premier mode élastique) mène à de bonnes prédictions du déplacement cible.

La précision des résultats donnés par l'analyse Pushover est, donc, liée à plusieurs considérations dont les principales sont la bonne estimation du déplacement cible ainsi une meilleure distribution des forces latérales et verticales déformant la structure d'une manière similaire à une excitation sismique. Les principaux points concernant ces deux notions sont mentionnés ci-après.

II.2.2. Déplacement cible (Target displacement) [9]

Dans l'analyse Pushover, il est supposé que le déplacement cible d'un système à plusieurs ddl pourrait être estimé comme étant le déplacement relatif au système équivalent à un seul ddl dont le passage du système à plusieurs ddl au système à un seul ddl est expliqué ci-dessus. Cette hypothèse est valable si la détermination du déplacement prévu pour le système à un seul ddl a été effectuée avec précaution prenant en compte toutes les caractéristiques importantes du séisme et de la structure et qui influent d'une manière significative sur le déplacement maximum du système à plusieurs ddl.

Les études effectuées dans ce contexte, ont montré que pour des structures en portiques et voiles avec une période fondamentale inférieure à 2s, cette hypothèse mène à de bons résultats pour des systèmes élastiques, contrairement aux systèmes inélastiques où elle donne des surestimations du déplacement relatif au système à plusieurs ddl. Dans le cas de longues

périodes ($> 2s$), cette hypothèse n'est pas vérifiée et les chercheurs [6] recommandent de ne pas utiliser l'analyse Pushover sous sa forme actuelle pour ce type de structures.

II.2.2.1. Procédures de détermination du déplacement cible selon la FEMA 356 [8]

Dans cette section, on présentera brièvement les procédures adoptées par la FEMA 356 pour l'estimation du déplacement cible.

Le déplacement cible prévu pour la structure pourrait être obtenu à l'aide de la formule suivante :

$$\delta_t = C_0 C_1 C_2 C_3 S_a \frac{T_e^2}{4\pi^2} g \quad (\text{Eq. 2.13})$$

Où : C_0 est un facteur modificatif reliant le déplacement spectral d'un système équivalent à un seul ddl au déplacement en tête de la structure en multi ddl. Ces valeurs sont données au niveau du tableau 3.2 de la FEMA 356 en fonction du nombre d'étages.

C_1 est aussi un facteur modificatif reliant les déplacements inélastiques maximums prévus aux déplacements calculés à partir de la réponse linéaire élastique, comme suit :

$$C_1 = 1.0 \quad \text{pour } T_e \geq T_s \quad (\text{Eq. 2.14})$$

$$C_1 = [1.0 + (R-1)T_s/T_e]/R \quad (\text{Eq. 2.15})$$

T_e est la période fondamentale effective de la structure dans la direction considérée et donnée par l'équation (Eq. 2.24).

T_s est la période caractéristique du spectre de réponse, définie comme étant la période associée à la phase de transition du spectre de réponse du segment correspondant à une accélération constante au segment correspondant à une vitesse constante et calculée selon la formule suivante :

$$T_s = (S_{x1} B_s) / (S_{xs} B_1) \quad (\text{Eq. 2.16})$$

S_{xs} : est le paramètre d'accélération de la réponse spectrale des courtes périodes

S_{x1} : est le paramètre d'accélération de la réponse spectrale pour une seconde

Ils sont donnés dans la FEMA 356 par les deux équations suivantes :

$$S_{xs} = F_a S_s \quad (\text{Eq. 2.17})$$

$$S_{x1} = F_v S_1 \quad (\text{Eq. 2.18})$$

F_a et F_v sont des coefficients caractéristiques du site et sont donnés respectivement par les deux tableaux 1.4 et 1.5 de la FEMA 356.

S_s et S_1 sont des paramètres d'accélération de la réponse relative à la période de retour sélectionnée. Ils sont déterminés à partir de l'équation 1.1 de la FEMA 356.

B_s et B_1 sont des paramètres prenant en compte le facteur d'amortissement de la structure dont les valeurs sont aussi indiquées dans le tableau 1.6 de la FEMA 356.

R est le rapport entre la demande de la résistance élastique et la limite élastique calculée dont les valeurs sont obtenues par la formule suivante :

$$R = \frac{S_a}{V_y / W C_m} \quad (\text{Eq. 2.19})$$

S_a est l'accélération du spectre de réponse correspondant à la période fondamentale effective et le facteur d'amortissement de la structure dans la direction considérée et est déterminée par les équations données par la FEMA 356 / Art. 1.6.1.5.1 comme suit :

$$S_a = S_{XS} \left[\left(\frac{5}{B_S} - 2 \right) \frac{T}{T_S} + 0,4 \right] \quad \text{pour } 0 < T \leq T_0 \quad (\text{Eq. 2.20})$$

$$S_a = S_{XS} / B_S \quad \text{pour } T \leq T_s \quad (\text{Eq. 2.21})$$

$$S_a = S_{x1} / (B_1 T) \quad \text{pour } T > T_s \quad (\text{Eq. 2.22})$$

T_s est donné par l'équation (Eq. 2.16)

$$T_0 = 0.2 T_s \quad (\text{Eq. 2.23})$$

V_y est la limite élastique issue de la courbe bilinéaire effort tranchant à la base – déplacement en tête comme il est montré sur la figure (Fig. 2.5).

W est le poids de la structure

C_m est le facteur des masses effectives donné par le tableau 3.1 de la FEMA 356 [8]

C_2 est un facteur modificatif exprimant l'effet du modèle hystérétique, la dégradation de la rigidité et la détérioration de la résistance sur le déplacement maximal de la structure dont les valeurs sont données par le tableau 3.3 de la FEMA 356 [8].

C_3 est ainsi le facteur modificatif représentant l'augmentation du déplacement dû à l'effet dynamique P – Δ. Ses valeurs sont données par la FEMA 356 [8]

T_e ainsi précédemment défini, est calculé comme suit :

$$T_e = T \sqrt{\frac{K_i}{K_e}} \quad (\text{Eq. 2.24})$$

T est la période fondamentale élastique de la structure dans la direction considérée calculée par l'analyse dynamique élastique.

K_i est la rigidité élastique de la structure dans la direction considérée et trouvée à partir de la rigidité initiale de la courbe non-linéaire effort tranchant à la base - déplacement en tête comme il est montré sur la figure (Fig. 2.5).

K_e est la rigidité effective de la structure dans la direction considérée et définie comme étant la pente relative à la droite reliant le point d'intersection de la ligne de la rigidité post-élastique avec la ligne horizontale correspondant à la limite élastique V_y , au point zéro,

pendant que son intersection avec la courbe originale effort tranchant à la base vs. Déplacement en tête se fait à 60% de la valeur de l'effort tranchant à la base correspondant à la limite élastique V_y . K_i et K_e sont illustrées sur la figure suivante :

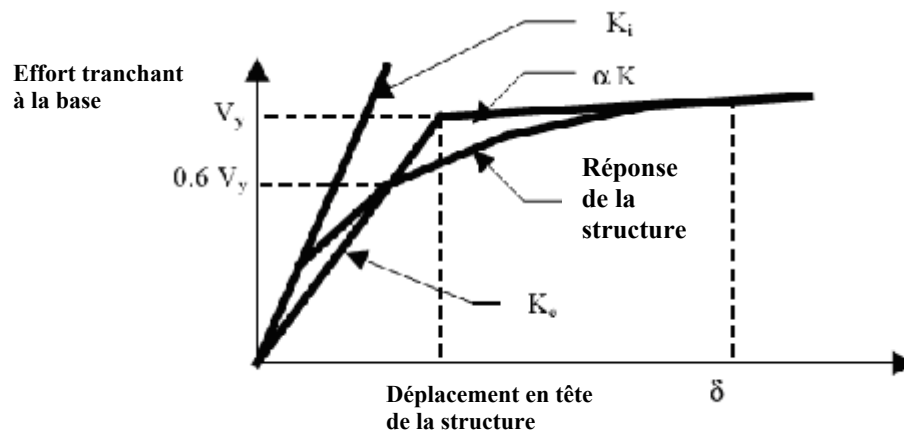


Fig. 2.5 : Bi-linéarisation de la courbe effort tranchant à la base-Déplacement en tête [17]

II.2.3. Modèle de distribution des charges latérales [9]

Les charges latérales sont distribuées selon un modèle similaire à la distribution des forces d'inertie développées suite à une excitation sismique.

Dans la pratique, cette distribution des forces d'inertie varie avec la sévérité et la durée du séisme. Si le choix est porté pour une forme invariante du chargement, cela mène à adopter la supposition que la distribution des forces d'inertie serait constante pour toute la durée du séisme, ainsi que les déformations maximales obtenues de cette forme invariante de chargement devraient être semblables à celles générées par le séisme. Cette supposition peut apporter des résultats utiles hormis les cas où les modes supérieurs ont une grande contribution à la réponse de la structure ou bien si la structure possède plusieurs mécanismes de rupture et qui ne pourraient pas être détectés par une seule forme invariante de chargement.

II.2.3.1. Modèle adopté par la FEMA 356 (Art. 3.3.1.3.2)

En sus des charges gravitaires, c'est la distribution des charges latérales qui peuvent être déterminées au premier lieu. Les charges de gravité qu'on utilise dans une analyse Pushover sont calculées suivant la formule suivante [17] :

$$Q_G = 1.1 (Q_D + Q_L) \quad (\text{Eq. 2.25})$$

Où Q_G est égale à la force gravitaire totale, Q_D représente le poids propre total (The total dead load) et Q_L est égale à la charge d'exploitation effective (The effective live load) définie à 25 % des charges d'exploitation totales non-réduites (Pour les bâtiments à usage d'habitation).

La distribution des charges latérales F_n relatives à chaque niveau d'étage n est déterminée par les deux équations suivantes :

$$F_n = C_{vn} V \quad (\text{Eq. 2.26})$$

$$C_{vn} = \frac{w_n h_n^k}{\sum_{i=1}^n w_i h_i^k} \quad (\text{Eq. 2.27})$$

C_{vn} est le facteur de distribution latérale

V est la pseudo résultante des forces latérales. Elle est donnée par la relation suivante :

$$V = C_1 C_2 C_3 C_m S_a W \quad (\text{Eq. 2.28})$$

Les différents facteurs de cette équation ont été déjà définis ci-dessus.

w_i et w_n représentent respectivement la portion du poids total de la structure localisée au niveau d'étage i et n

h_i et h_n sont les hauteurs relatives aux étages i et n respectivement calculées à partir de la base.

Le schéma suivant représente cette distribution (Fig. 2.6) :

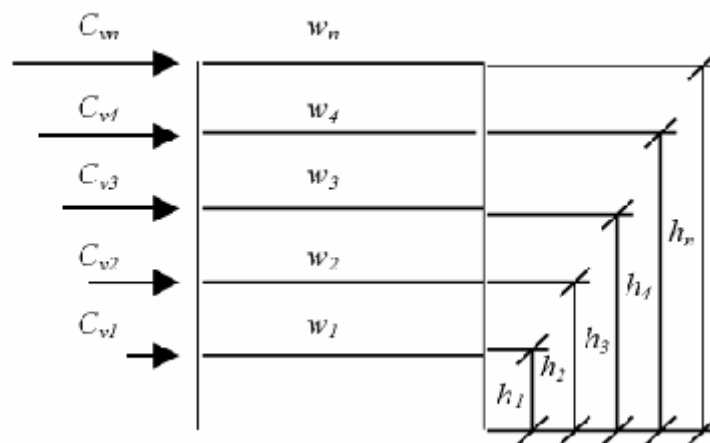


Fig. 2.6 : Distribution verticale des charges latérales [17]

Le paramètre k varie en fonction de la période fondamentale de la structure T . Il prend la valeur 1.0 pour $T \leq 0.5$ seconds, 2.0 pour $T \geq 2.5$ seconds et varie linéairement entre les deux comme il est montré sur la figure suivante (Fig. 2.7) :

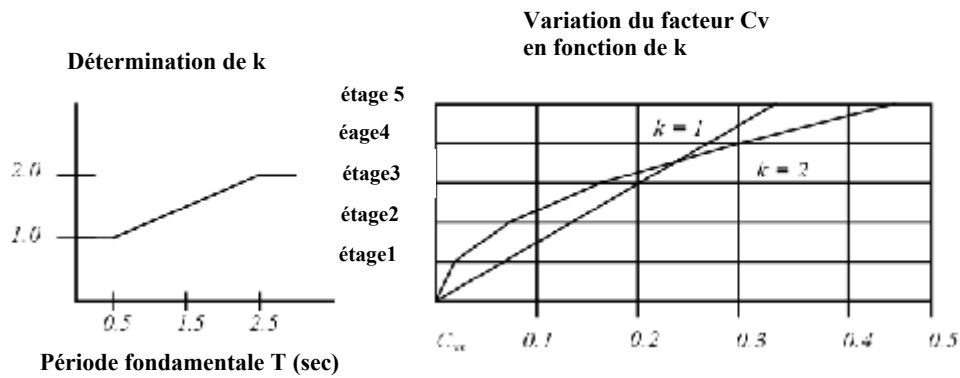


Fig. 2.7 : Variation de k en fonction de la période fondamentale T et l'effet de k sur les charges latérales [17]

Sur la même figure, il est montré l'effet de k sur le facteur C_{vn} et par la suite sur le profil de distribution des charges latérales. Pour les structures courtes et rigides, la période fondamentale est petite et la variation du chargement latéral suivant la hauteur serait proche de la distribution linéaire montrée sur la figure pour $k = 1.0$. Pour les structures élancées et plus flexibles, la période fondamentale serait plus grande et l'allure de la distribution des charges latérales suivant la hauteur de la structure serait non-linéaire comme celle montrée sur la figure et qui correspond à $k = 2.0$. Cela implique que la contribution des modes supérieures dans la réponse des structures rigides est peu significative et seule la réponse du premier mode pourrait imposer la distribution des charges latérales. Cependant, plus les structures deviennent flexibles, les modes supérieurs auraient une contribution importante et le paramètre k est utilisé pour ajuster cette distribution.

II.2.4. Généralisation de l'analyse Pushover [7]

Une analyse Pushover basée sur une répartition des forces horizontales suivant le mode fondamental, n'est pertinente pour un calcul sismique que si le mode fondamental est prépondérant, donc si la structure est régulière sur le plan de la distribution des masses et des raideurs. Pour corriger ce défaut, Chopra [16] a proposé le Pushover modal capable de capturer la participation des modes supérieurs dans l'analyse.

Une analyse par Pushover modal revient à réaliser une analyse par Pushover pour chaque mode propre en utilisant une répartition des efforts horizontaux semblable à la déformée modal de chacun de ces modes. Pour chaque mode, la structure est assimilée à un oscillateur simple de période :

$$T_e = 2\pi \sqrt{\frac{m_e d_e}{F_e}} \quad (\text{Eq. 2.29})$$

Avec :

$$m_e = \sum_1^n m_i \varphi_i \quad (\text{Eq. 2.30})$$

$$F_e = \frac{F_n}{\Gamma} \quad (\text{Eq. 2.31})$$

$$d_e = \frac{d_n}{\Gamma} \quad (\text{Eq. 2.32})$$

$$\Gamma = \frac{m_e}{\sum_1^n m_i \varphi_i^2} \quad (\text{Eq. 2.33})$$

Où φ est le vecteur propre du mode considéré normalisé à $\varphi_n = 1$ et m_i les masses nodales du modèle.

II.3. Procédures d'exécution d'une analyse pushover [9]

Une analyse pushover s'effectue principalement selon les étapes suivantes :

- 1- Modélisation de la structure par un modèle analytique en 2D ou 3D, prenant en compte toutes les caractéristiques importantes linéaires et non-linéaires de la réponse.
- 2- Application des charges gravitaires suivies par les charges latérales selon une distribution prédéterminée et qui représente approximativement les forces d'inertie relatives générées au niveau des masses substantielles du modèle de la structure.
- 3- Faire pousser la structure sous cette distribution des charges jusqu'à atteindre le déplacement cible correspondant à un niveau de performance attribué à la structure.

Les forces et déformations déterminées à ce niveau de déplacement sont utilisées pour l'estimation de la demande de la résistance et des déplacements qui devrait être comparée à la capacité disponible.

Un simple exemple d'une analyse Pushover est illustré sur la figure suivante :

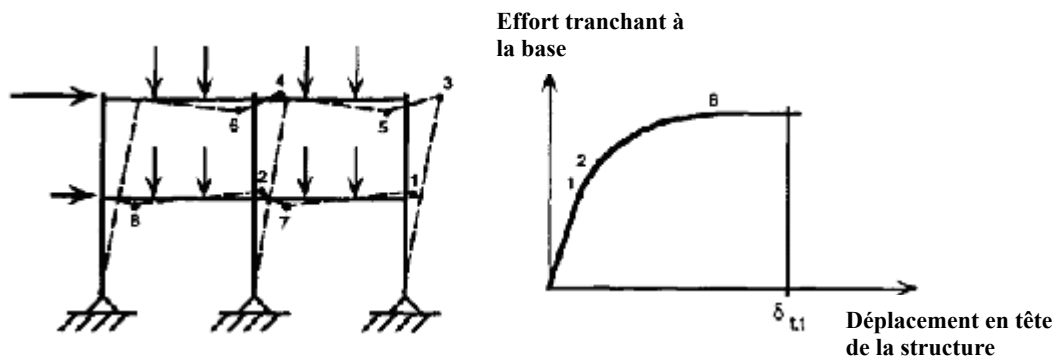


Fig. 2.8: Exécution d'une analyse Pushover [9]

Pour les cas simples comme celui-ci d'un portique plan, l'analyse Pushover peut être effectuée par une série d'analyses élastiques dont, par exemple, les points où la résistance à la

flexion est importante, seraient traités comme des rotules dans l'application des charges latérales additionnelles. L'analyse continue jusqu'à atteindre le déplacement cible $\delta_{t,t}$ dont les résultats sont représentés par la courbe effort tranchant à la base - déplacement en tête comme il est montré sur la figure (Fig. 2.8). Une fois le déplacement cible est atteint, les forces et déformations développées au niveau des éléments de la structure (par exemple : la rotule plastique de rotation dans le point 1 de la figure (Fig. 2.8) seront comparées à la capacité disponible.

II.4. Courbe de capacité et point de performance [7]

L'intérêt de l'analyse Pushover dans le cadre de son application aux méthodes en performance appelées aussi les méthodes en déplacement consiste à superposer une courbe représentant la capacité résistante de la structure issue de l'analyse Pushover avec une courbe représentative de la sollicitation apportée par le séisme. L'intersection de ces deux courbes évaluées à partir des considérations qui vont suivre représente un point de performance permettant d'évaluer le déplacement maximal que la structure subira et subséquemment son degré de pénétration dans le domaine plastique. L'intérêt d'une telle méthode est de fournir une description visuelle du pouvoir endommageant d'un séisme pour une structure donnée.

Le calcul non linéaire lancé par l'analyse Pushover permet d'obtenir une courbe de capacité de la structure. Cette courbe représente l'effort horizontal à la base du bâtiment en fonction du déplacement de celui-ci. La courbe de capacité est en général formée par une phase à caractère élastique linéaire suivie par une phase non linéaire correspondant à la formation des rotules plastiques. Les stades de plastification, ainsi que les différents degrés d'endommagement, peuvent donc être introduits sur cette courbe.

II.4.1. Point de performance [7]

Le calcul du point de performance requiert à la fois la donnée d'une courbe représentative de la sollicitation sismique (demande) et celle d'une courbe issue de l'analyse statique non linéaire (capacité).

La courbe représentant le comportement de la structure est directement issue de la courbe du Pushover reliant la force appliquée au déplacement en tête. Cette courbe n'est pas directement superposée au spectre ADRS (Acceleration Displacement Response Spectra), elle doit subir la conversion nécessaire pour homogénéiser ses paramètres en accélération S_a et déplacement spectraux S_d (Fig. 2.9). La courbe Pushover subit donc les transformations suivantes :

$$S_d = \frac{\Delta_{sommets}}{PF_1 \phi_{R1}} \quad (\text{Eq. 2. 34})$$

$$s_a = \frac{V}{\alpha_1 W} \quad (\text{Eq. 2. 35})$$

Avec : α_1 désigne le coefficient de masse modale du premier mode (%),

PF_1 représente le facteur de participation modal du premier mode (m^{-1})

Δ_{sommet} représente le déplacement au sommet de la structure

W représente le poids des charges permanentes appliquées à la structure et

ϕ_{R1} représente le déplacement modal au sommet (m)

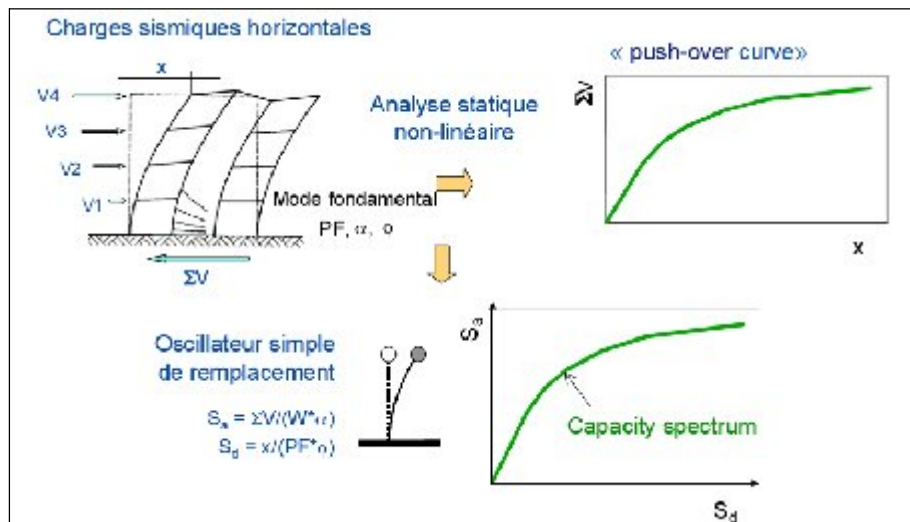


Fig. 2.9: Principe de la courbe de capacité [19]

Pour considérer la demande d'un séisme, la sollicitation sismique est représentée directement au format ADRS, c'est-à-dire par une courbe reportant le déplacement spectral associé à un séisme en abscisse et l'accélération spectrale en ordonnée.

II.4.2. Construction du spectre ADRS [20]

Traditionnellement, les spectres d'oscillateur sont tracés en accélération spectrale et période en raison de l'utilité d'une telle représentation pour le dimensionnement basé sur des calculs d'efforts (Fig. 2.10). Avec l'apparition des méthodes de dimensionnement en déplacement, les spectres en déplacement sont de plus en plus utilisés. Au milieu des années 90, un nouveau type de spectre est apparu pour la réévaluation sismique des bâtiments existants: l'accélération spectrale S_a est tracée en fonction du déplacement spectral S_d (d'où son nom ADRS : Acceleration Displacement Response Spectra).

Dans cette représentation (Fig. 2.11), les zones à déplacement et accélération constants sont respectivement des droites verticales et horizontales alors que la zone à vitesse constante est en $1/S_d$. À partir d'un pseudo-spectre de réponse d'accélération pour un certain séisme, ou un spectre de conception d'un code de calcul dans le plan A – T, il est possible de construire une

représentation équivalente dans le plan des accélérations et des déplacements A –D. Si on connaît seulement les accélérations A(T) en fonction de la période T, on peut déduire que :

$$A = \omega^2 D \rightarrow D = \frac{T^2}{4\pi^2} A \quad (\text{Eq. 2.36})$$

Où T sont les périodes des oscillateurs d'un degré de liberté correspondant à chaque niveau d'accélération A connue.

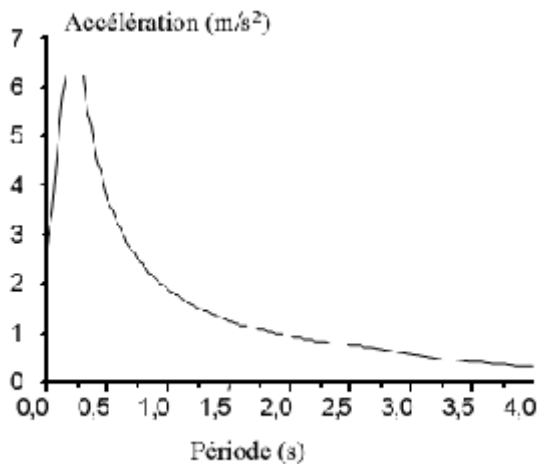


Fig. 2.10 : Spectre en accélération [20]

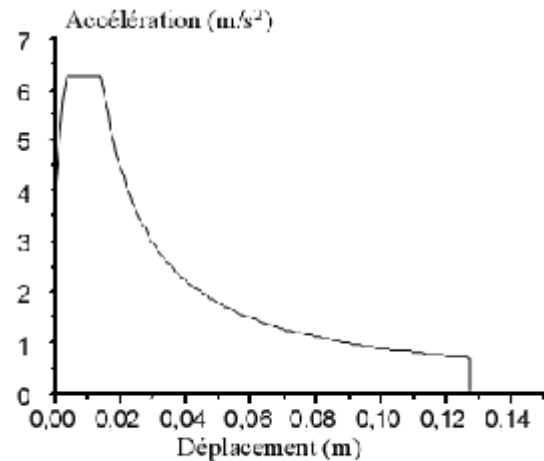


Fig. 2.11 : Spectre en déplacement-accélération [20]

Le point d'intersection du spectre et de la courbe accélération-déplacement de l'oscillateur (courbe de capacité) peut être considéré comme un point de fonctionnement et donne l'accélération spectrale -et donc les efforts- et le déplacement observés pour un séisme donné (Fig. 2.12) et (Fig. 2.13). Cette démarche est similaire à une méthode sécante et l'amortissement utilisé doit être fonction de la ductilité appelée. Ainsi, la détermination du point de fonctionnement correspondant à un niveau de séisme donné nécessite-t-il un certain nombre d'itérations car la ductilité appelée et donc l'amortissement ne sont pas a priori connus (Fig. 2.12).

Par contre, lorsqu'on cherche le niveau de séisme correspondant à une certaine ductilité, le processus n'est pas itératif car les déplacements et accélérations spectraux, à amortissement constant, sont directement proportionnels à l'accélération maximale du signal (Fig. 2.13).

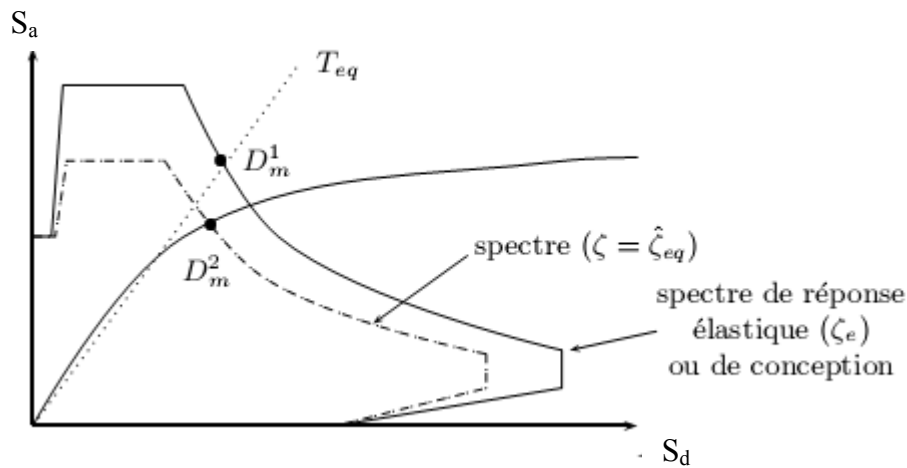


Fig. 2.12 : Principe de réduction des spectres pour la détermination du point de performance par une approche en amortissement [21]

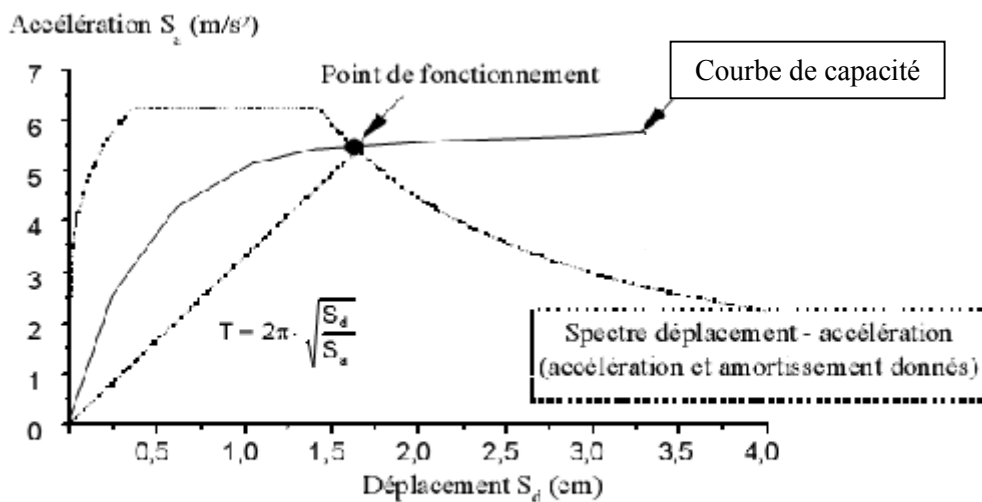


Fig. 2.13 : Détermination du point de performance [20]

II.5. Conclusion

L'analyse Pushover représente une méthode simplifiée pour l'évaluation du pouvoir endommageant d'un séisme par rapport à la structure étudiée. Cette évaluation s'effectue à l'aide de la détermination du point de performance. Pour cela, nous avons expliqué le fondement théorique de cette analyse ainsi que ses différentes étapes. Cette analyse comporte deux étapes principales : la détermination du déplacement cible et le modèle de distribution des charges latérales. Dans ce contexte, nous avons présenté les procédures de détermination du déplacement cible et le modèle de distribution des charges latérales adoptées par les règlements américains (FEMA 356). L'exploitation des courbes issues de l'analyse pushover a été expliquée afin de mettre en évidence le principe de détermination du point de performance attribué à une structure et qui constitue une partie essentielle de notre travail.

Chapitre III

FORMULATIONS NUMERIQUES

III. FORMULATIONS NUMERIQUES

III.1. Introduction

Dans le cadre de l'application d'une analyse Pushover sur des structures en béton armé, certaines procédures et formulations de calculs devraient précéder l'exécution de cette analyse. En effet, le caractère non-linéaire de cette analyse exige un raffinement dans la formulation des lois de comportement des éléments de la structure. Ces lois de comportement doivent être établies pour chaque élément de la structure porteuse. Dans ce contexte, nous présenterons dans ce chapitre les formules qui seront utilisées par la suite pour l'élaboration des lois de comportement des structures qui feront l'objet des applications de ce travail. Ces lois de comportement seront ensuite introduites dans un programme de calcul. Une description sommaire du programme utilisé pour les calculs sera également présentée.

III.2. Comportement non-linéaire idéalisé des éléments de la structure

Les éléments constitutifs du système de contreventement des structures obéissent généralement aux mêmes lois régissant le comportement de leurs matériaux constitutifs mais à une échelle plus grande.

Le comportement élastique ainsi que inélastique idéalisé d'une section générale est représenté sur la figure suivante (Fig. 3.1) :

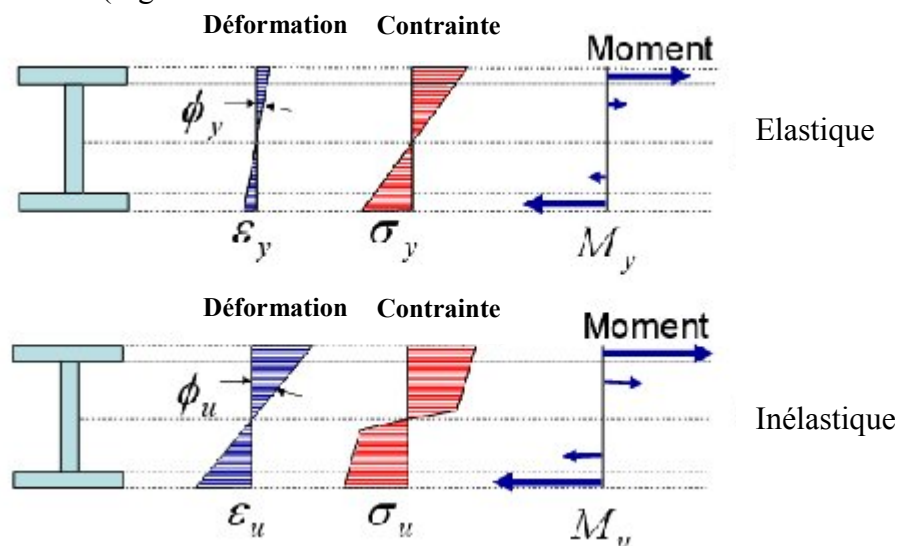


Fig. 3.1 : Comportement non-linéaire idéalisé d'un élément structurel [8]

Cette figure représente la distribution du moment et de la courbure au niveau d'une section générale.

Généralement, le comportement sismique des éléments de la structure est exprimé par des diagrammes moment – courbure.

Un exemple de relation moment – courbure idéalisée d’une section générale est représenté dans la figure suivante (Fig. 3.2) :

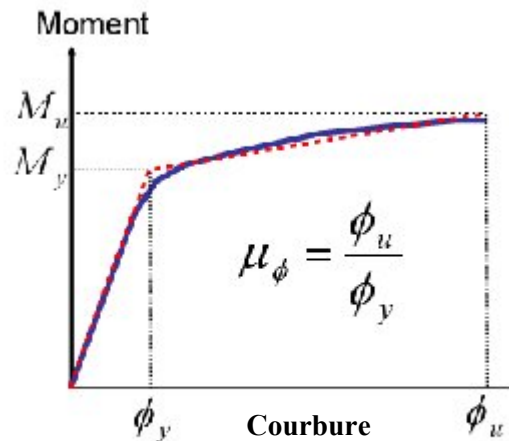


Fig. 3.2 : Relation Moment-Courbure idéalisée d'un élément structurel [8]

La ductilité en courbure montrée sur la figure représente la ductilité approvisionnée dans la section considérée. La demande en ductilité imposée par l'action sismique devrait être moins que celle offerte par la section.

Cependant, le comportement spécifique de chaque élément constitutif de la structure pourrait être déterminé selon la nature géométrique de cet élément, la nature des charges qui lui seront appliquées et son mécanisme de plastification concentré au niveau des régions critiques appelée les rotules plastiques. Dans ce qui suit, ce concept sera expliqué pour les principaux éléments du système de contreventement des bâtiments en béton armé.

III.2.1. Comportement non-linéaire idéalisé des régions critiques "les rotules plastiques"

Le comportement non linéaire des éléments constitutifs des structures en béton armé est pris en compte par l'introduction des modèles appropriés des diagrammes moment (M) – rotation (θ) au niveau de leurs extrémités et sur une longueur connue sous le nom de *rotule plastique*.

La rotule plastique est une dimension fictive qui permet le calcul simplifié des déformations d'un élément de construction en cours de plastification [22].

L'élaboration de ces modèles pour chaque élément de la structure nécessite un ensemble des données telles que : ses dimensions, sa section transversale, son ferrailage et les caractéristiques des matériaux de construction.

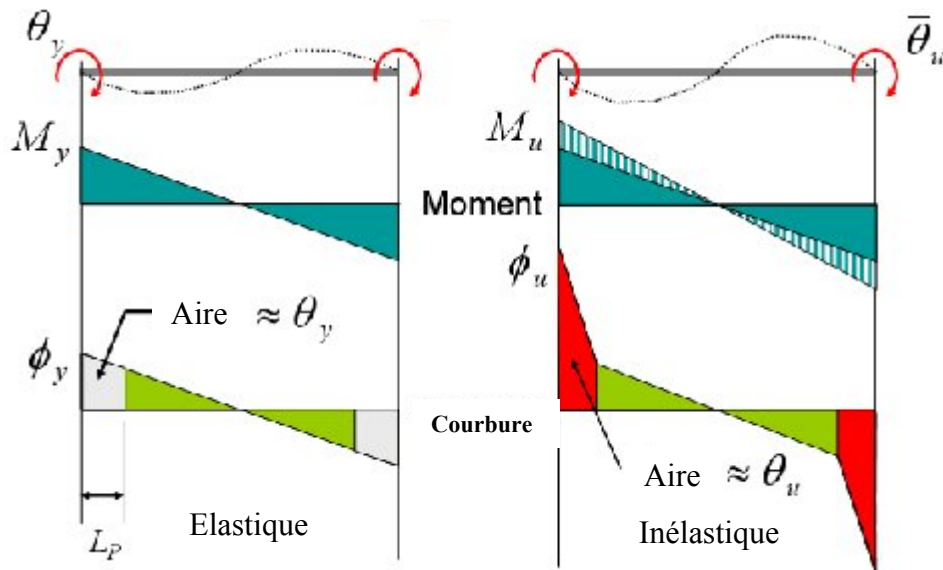


Fig. 3.3 : Distribution du Moment-Courbure au niveau des zones critiques [8]

La figure ci-dessus illustre le cas d'un élément poutre où les rotules plastiques sont dues au moment de flexion.

III.2.2. Le comportement sismique des poutres [23]

Les poutres sont des éléments de structure auxquelles une large portion de dissipation de l'énergie sismique est attribuée par le biais de leur mécanisme flexionnel de plastification. Le comportement sismique des poutres est exprimé en fonction du diagramme moment (M) – courbure (ϕ). Il est reconnu que la courbure d'une section de poutre selon la théorie classique de flexion est égale au ratio de la déformation correspondante à certaine fibre de cette section par rapport à sa distance de l'axe neutre (Fig. 3.4).

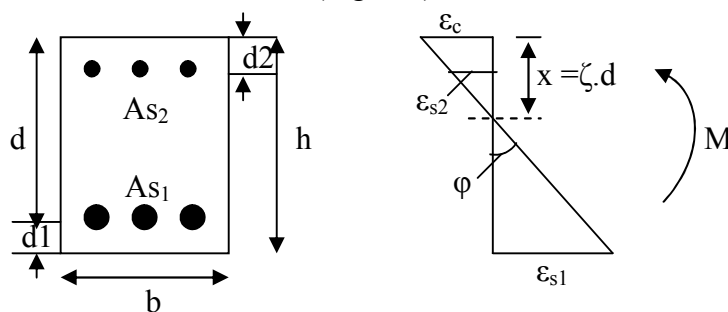


Fig. 3.4 : Courbure d'une section de poutre rectangulaire [23]

La courbure est donnée par la relation suivante :

$$\phi = \frac{\epsilon_c}{x} \tag{Eq. 3.1}$$

Avec : ϵ_c est la déformation (raccourcissement) correspondant à la fibre comprimée du béton
 x est sa distance à partir de l'axe neutre

De même :

$$\phi = \frac{\varepsilon_{s1}}{d - x} \quad (\text{Eq. 3.2})$$

Avec : ε_{s1} est la déformation (allongement) des aciers tendus

d est la profondeur effective de la section de poutre

À partir des deux équations précédentes, la courbure pourrait être donnée également par :

$$\phi = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_{s1}}{d} \quad (\text{Eq. 3.3})$$

Généralement, le diagramme moment – courbure utilisé est caractérisé dans une approche approximative par deux valeurs principales :

- Courbure nominale de plastification ϕ_y
- Courbure ultime ϕ_u

Dont leur détermination s'effectue suivant les deux formules suivantes respectivement :

$$\phi_y = \frac{f_y / E_s}{d(1 - \xi_y)} \quad (\text{Eq. 3.4})$$

Avec : f_y est la limite élastique d'acier

ξ_y est le paramètre de l'axe neutre et donné par la relation suivante :

$$\xi_y = \left[\alpha^2 (\rho_1 + \rho_2)^2 + 2\alpha \left(\rho_1 + \frac{d_2}{d} \rho_2 \right) \right]^{1/2} - \alpha (\rho_1 + \rho_2) \quad (\text{Eq. 3.5})$$

Où : α est le rapport entre les modules de Young d'acier et du béton comme suit :

$$\alpha = \frac{E_s}{E_c} \quad (\text{Eq. 3.6})$$

ρ_1 et ρ_2 sont les ratios de ferrailage et sont donnés comme suit :

$$\rho_1 = \frac{A_{s1}}{bh}, \quad \rho_2 = \frac{A_{s2}}{bh} \quad (\text{Eq. 3.7})$$

La valeur de la courbure ultime est calculée comme suit :

$$\phi_u = \varepsilon_{cu} \frac{0.68 f_c b}{(A_{s1} - A_{s2}) f_y} \quad (\text{Eq. 3.8})$$

Avec : ε_{cu} est la déformation ultime du béton

f_c est la contrainte de compression du béton

À partir de la distribution de courbure résultant de la réponse d'une poutre après une analyse élastique ou inélastique, il serait possible d'estimer les déformations flexionnelles ou bien les rotations correspondant à cette distribution.

Au début, la rotation entre deux sections a et b d'un élément pourrait être calculée par la relation établie entre le moment et l'aire, comme suit :

$$\theta_{ab} = \int_a^b \phi dx \quad (\text{Eq. 3.9})$$

Avec : dx est la longueur d'un élément infinitésimal

x est la distance de l'élément infinitésimal de longueur dx par rapport à la section a

Si on considère la poutre montrée dans la figure suivante et qui est supposée soumise à un couple de moments aux deux extrémités ayant une valeur permettant de dépasser le seuil de l'élasticité et par la suite la formation des rotules plastiques.

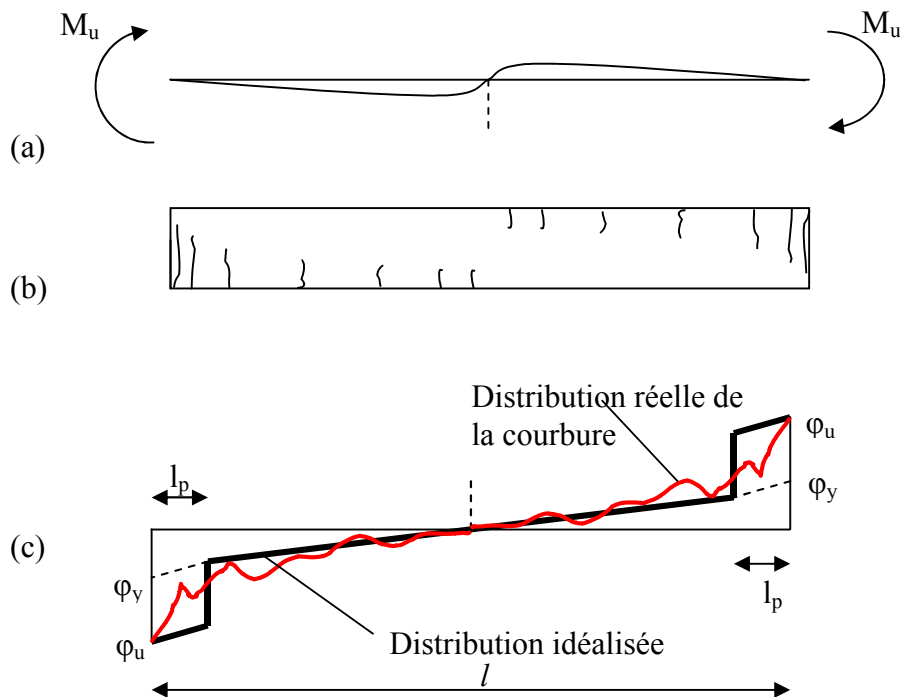


Fig. 3.5 : Distribution réelle et idéalisée de la courbure dans le domaine inélastique d'une poutre soumise à une charge sismique [23]

Les rotations des extrémités de la poutre peuvent être estimées par une intégration appropriée du diagramme de courbure (Fig. 3.4) suivant la formule donnée par l'équation (Eq. 3.9). Une autre procédure, plus simple pourrait être utilisée dans le cas où la courbure réelle serait remplacée par une autre linéaire idéalisée (Fig. 3.5), dont les deux valeurs spécifiques sont :

➤ La rotation nominale de plastification θ_y qui est donnée par la formule suivante :

$$\theta_y = \phi_y \frac{L_V}{3} \quad (\text{Eq. 3.10})$$

Avec : L_V est la portée de cisaillement

➤ La rotation ultime θ_u donnée comme suit :

$$\theta_U = \theta_y + (\phi_U - \phi_Y)L_{pl} \left(1 - \frac{0.5L_{pl}}{L_V} \right) \quad (\text{Eq. 3.11})$$

La rotation plastique est donnée par la formule suivante :

$$\theta_p = (\phi_u - \phi_y)l_{pl} \quad (\text{Eq. 3.12})$$

Avec : θ_p est la rotation plastique

ϕ_u et ϕ_y sont la courbure ultime et la courbure de la limite élastique respectivement

l_p est la longueur de la rotule plastique

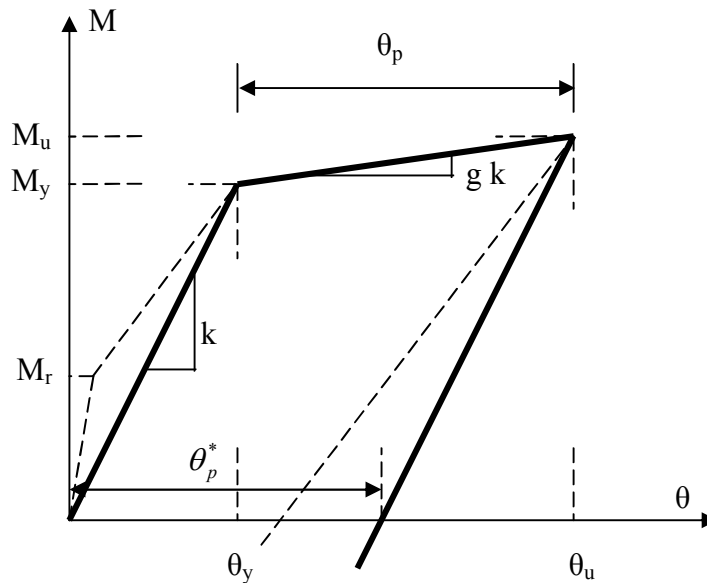


Fig. 3.6 : Diagramme moment –rotation [23]

Le moment correspondant à la limite élastique est calculé comme suit :

$$M_Y = 0.5 f_c b \xi_y d \left(\frac{\xi d}{3} - d_2 \right) + f_y b d (d - d_2) \rho_1 \quad (\text{Eq. 3.13})$$

Le moment ultime est calculé approximativement en fonction de M_y comme suit (ATC40) [24] :

$$M_U = 1.1 M_Y \quad (\text{Eq. 3.14})$$

III.2.2.1. Estimation de la longueur de la rotule plastique [23]

Depuis la parution des méthodes d'analyses anélastiques dans les années 1960, plusieurs formules empiriques pour estimer la longueur de la rotule plastique ont été proposées. Dans un travail récent, il a été suggéré d'introduire le diamètre des barres longitudinales (d_b) dans le calcul de cette longueur, comme suit :

$$l_p = 0.08 l_V + 0.022 f_y d_b \quad (\text{Eq. 3.15})$$

III.2.3. Comportement sismique des poteaux [23]

Le comportement des poteaux soumis à un moment de flexion avec un effort axial incitant une importante marge de plasticité, peut être estimé analytiquement en utilisant l'une des procédures approximatives proposées par des différents auteurs. Cependant, la même procédure déjà présentée pour les poutres peut être appliquée dans le cas des poteaux, tout en prenant en compte de l'effet des charges axiales à travers des coefficients correcteurs.

La procédure suivante a été proposée par Park et Ang (1985) et elle comporte les étapes suivantes :

Considérons la section de poteau rectangulaire montrée sur la figure ci-dessous, et qui est soumise à un moment M et un effort axial N (Fig. 3.7).

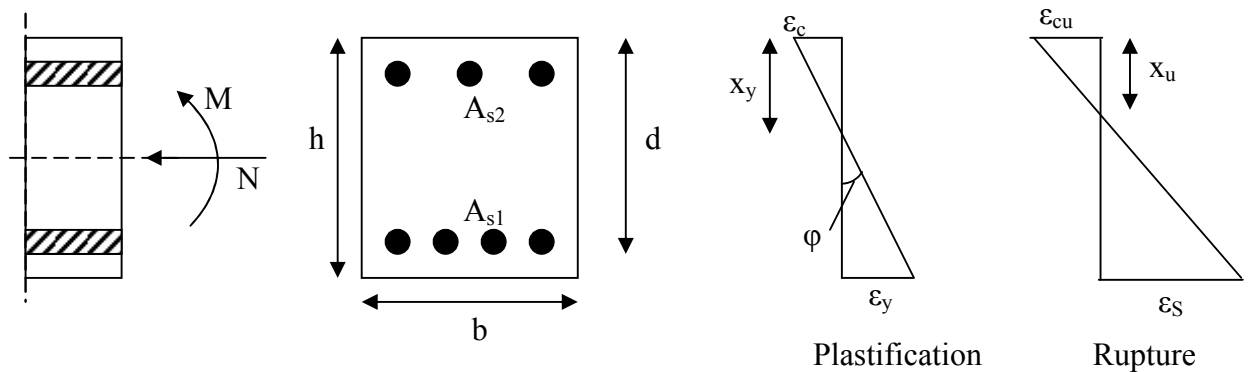


Fig. 3.7 : Courbure d'une section rectangulaire soumise à un moment et effort axial [23]

La courbure nominale de plastification ϕ_y déjà mentionnée ci-dessus est donnée par la relation suivante :

$$\phi_y = \frac{f_y}{E_s} \frac{1}{d(1-\xi_y)} \quad (\text{Eq. 3.16})$$

Avec : ξ_y est donnée dans ce cas par la relation suivante :

$$\xi_y = -\left(2\rho_1 + \frac{P}{f_y bd}\right)\alpha + \left[\left(2\rho_1 + \frac{P}{f_y bd}\right)^2 \alpha^2 + 2\alpha\left(\rho_1 \frac{h}{d} + \frac{P}{f_y bd}\right)\right]^{-1/2} \quad (\text{Eq. 3.17})$$

La courbure ultime est calculée à partir du facteur de ductilité en courbure qui est donnée par la formule suivante (Tassios, 1989a) :

$$\mu_\phi = 1.2 \frac{E_s}{f_y} \left[\frac{0.6}{v + (\rho_1 - \lambda\rho_2)f_y/f_c} - 1 \right] \varepsilon_{cu} \quad (\text{Eq. 3.18})$$

Avec : v est l'effort normal réduit et il est donné par la relation suivante :

$$v = \frac{P}{f_c bh} \quad (\text{Eq. 3.19})$$

Et λ est un paramètre lié à la contrainte de compression et est pris égal à :

- ▶ Pour $\nu < 0.1$ (poutres) $\lambda = 0.5 + 18\rho_1$
- ▶ Pour $\nu = 0.1$, $\lambda \approx 2/3$
- ▶ Pour $\nu = 0.2$, $\lambda \approx 0.9$
- ▶ Pour $\nu > 0.2$, $\lambda \approx 1.0$

Pour le calcul des moments, la formule suivante est utilisée :

$$M_y = \frac{f_y b d}{2\alpha} \left(\frac{h}{2} - \frac{\xi_y d}{3} \right) \frac{\xi^2}{1-\xi} + \frac{f_y b d (d - d_2)^2}{2d} \cdot \frac{\rho_1}{1-\xi_y} \quad (\text{Eq. 3.20})$$

Avec : ξ_y est donné par l'équation (Eq. 3.17)

P est l'effort normal

La longueur de la rotule plastique peut être estimée de la même manière expliquée dans le cas des poutres.

III.2.4. Comportement sismique des voiles [23]

Le terme « voile » regroupe des éléments de structures au comportement mécanique très divers, cependant du point de vue de leur fonctionnement, deux grandes familles se distinguent : voiles courts ($H/L < 2$) et voiles élancés ($H/L > 2$).

Le rôle des voiles dans les structures courantes en béton armé consiste principalement en le transfert des charges sismiques. Souvent, ce sont les voiles qui supportent la majorité des charges sismiques, pendant que les portiques sont appelés à agir en deuxième lieu de défense contre les séismes, par la suite d'une fissuration et/ou une rupture éventuelle dans les voiles.

La détermination analytique de la résistance à la flexion des voiles peut être effectuée en se référant à une procédure générale (modèle fibre). Il est à signaler que la supposition que les sections planes fléchies restent planes (Bernoulli) n'est pas strictement applicable dans le cas des voiles et spécialement ceux qui ont un ratio $H/L < 2$ avec H et L la hauteur et la longueur du voile respectivement et qui se comportent d'une manière plane plutôt que linéairement. Toutefois, la méthodologie développée dans son origine pour les poteaux et les poutres a montré sa convenance au cas des voiles minces à faible hauteur (Paulay, Priestly et Syngé ; 1982).

Pour le cas général des voiles avec un faible chargement axial, la résistance à la flexion peut être estimée à l'aide de la formule suivante (Tassios, 1984) :

Pour les voiles d'une section transversale rectangulaire, des armatures longitudinales correspondant au ratio de ferrailage $\rho\nu = A_{sv} / (b_w l_w)$, avec b_w est la largeur et l_w est la

longueur de la section transversale, et un ferrailage concentré aux extrémités d'une section $A_{s1} = A_{s2} = A_s$,

$$M_u = \left[\left(1 - \frac{\xi}{2} \right) \frac{A_s}{b_w l_w} f_y + \frac{1}{2} (1 - \xi) (\rho_v f_y + \sigma_0) \right] b l_w^2 \quad (\text{Eq. 3.21})$$

Avec : $\sigma_0 = N / (b_w l_w)$ est la contrainte moyenne due à l'effort axial seulement et :

$$\xi = \left(\frac{A_s f_y}{b_w l_w f_c} + \rho_v \frac{f_y}{f_c} + \frac{\sigma_0}{f_c} \right) \frac{1}{1 + \rho_v f_y / f_c} \quad (\text{Eq. 3.22})$$

est le ratio de profondeur de l'axe neutre (x/l_w) à l'état limite

III.3. Modélisation par SAP2000 [25]

L'analyse Pushover peut être exécutée directement par un programme de calcul qui peut modéliser le comportement non linéaire des éléments de la structure intervenant dans la résistance aux charges latérales.

Dans cette étude, l'analyse Pushover sera exécutée sur des structures en béton armé à l'aide de logiciel de calcul SAP2000.

III.3.1. Exécution de l'analyse Pushover par SAP2000 [25]

La version non linéaire du SAP2000 offre un outil très puissant pour l'exécution de l'analyse Pushover, avec un modèle en 2D ou 3D.

Le SAP2000 offre également la possibilité de mener l'analyse Pushover selon deux manières :

- ▶ Contrôlée par une force (force controlled)
- ▶ Contrôlée par un déplacement (displacement controlled)

La commande "Pousser au niveau de chargement défini par le modèle" (Push To Load Level Defined By Pattern) est utilisée pour le cas d'une analyse Pushover contrôlée par une force (Fig. 3.8). Dans ce cas, l'analyse Pushover prend en compte de l'ensemble des charges définies dans le modèle de chargement (load pattern).

La commande "Pousser à une magnitude de déplacement" (Push to displacement magnitude) est utilisée dans le cas d'une analyse Pushover contrôlée par un déplacement. Dans ce cas, l'analyse Pushover procède à atteindre le déplacement attribué au joint spécifié et dans la direction considérée.

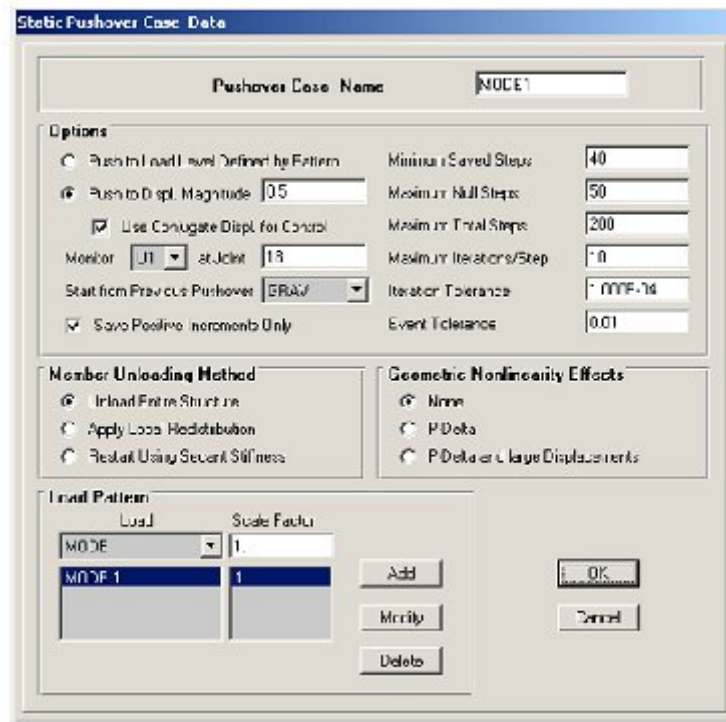


Fig. 3.8 : Boite de dialogue d'analyse Pushover en SAP2000

III.3.2. Description de la procédure éléments finis [25]

Dans SAP2000, les éléments de portique (poteaux et poutres) "frame elements" sont modélisés par des lignes avec des propriétés linéaires élastiques munies des rotules plastiques pour prendre en compte des caractéristiques non linéaires force – déplacement selon un modèle représenté généralement par la figure suivante (Fig 3.9) :

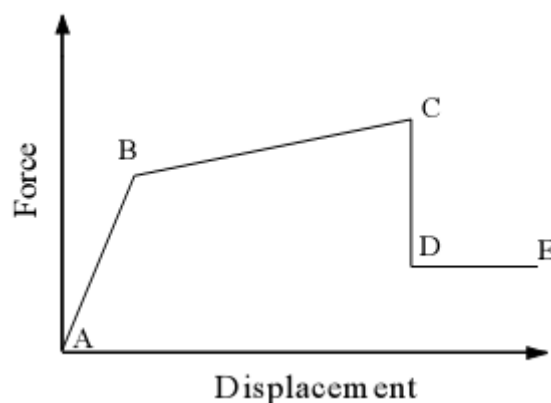


Fig. 3.9 : Caractéristiques générales Force – Déplacement d'un élément [25]

Le point A correspond aux conditions initiales (non chargement).

Le point B représente la limite élastique de l'élément.

L'ordonnée du point C correspond à la résistance nominale et l'abscisse correspondante représente la déformation à partir de laquelle une dégradation marquante de la résistance commence à se produire.

La baisse manifestant de point C au point D représente la rupture initiale de l'élément.

La résistance aux charges latérales au-delà du point C est souvent incertaine.

La résistance résiduelle du point D au point E permet à l'élément de supporter les charges gravitaires.

Au-delà du point E qui correspond à la capacité maximale de déformation, les charges gravitaires ne peuvent plus être reprises.

L'attribution des rotules plastiques peut être effectuée aux différentes locations le long de l'élément (début et fin). Plusieurs relations force – déplacement pourraient être définies telles que : un moment découplé (M2 et M3), torsion (T), force axiale (p) et effort tranchant (V2 et V3). Et comme la charge axiale des poteaux peut varier avec les charges latérales, une rotule plastique de propriétés couplées P-M2-M3 (PMM) dont le comportement non linéaire est basé sur l'interaction des forces axiales avec les moments de flexions au niveau de la rotule plastique, peut être attribuée à l'élément. Aussi, plus qu'un seul type de rotule plastique peut être assigné à la même location de l'élément.

III.4. Conclusion

Nous avons présenté des différentes formulations des lois de comportement pour les différents éléments constitutifs du système porteur des structures en béton armé. Or, nous avons expliqué que le comportement non linéaire des éléments de la structure est pris en compte par la définition de certaines caractéristiques dites des rotules plastiques sur une certaine longueur dite la longueur de la rotule plastique. Ces caractéristiques non linéaires sont exprimées par des lois moment – courbure qui seront introduites dans le programme SAP 2000. Dans ce cotexte, une description sommaire du programme SAP 2000 a été présentée. En effet, ces procédures sont essentielles pour effectuer une analyse Pushover par le programme SAP 2000 du fait que c'est à partir de ces lois de comportement que l'analyse Pushover donnera les différents mécanismes de plastification prévus pour chaque élément de la structure sous l'effet d'un séisme.

Chapitre IV

MISE EN ŒUVRE NUMERIQUE ET EXEMPLES ETUDIES

IV. MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE ET EXEMPLES ÉTUDIÉS

IV.1. Introduction

Après la présentation des axes principaux de cette étude qu'on note principalement par : la notion de la rigidité dans les structures, l'analyse Pushover et les formulations numériques nécessaires pour les lois de comportement, le présent chapitre sera consacré à la mise en application de l'analyse Pushover dans le but d'estimer la rigidité correspondant aux certains niveaux de performance pour des différents bâtiments tests. Au préalable, nous présenterons les caractéristiques des matériaux utilisés, le mouvement sismique appliqué et le modèle des bâtiments tests. En faisant varier le nombre des étages de chaque bâtiment (R+10, R+13, R+17 et R+20) et en effectuant des analyses Pushover pour deux niveaux de performance, le Non-effondrement (Collapse Prevention, CP) et la sécurité de personnes (Life Safety, LS), une estimation de la rigidité du niveau RDC nécessaire pour atteindre chaque niveau de performance sera effectuée. Ce travail finira par l'élaboration des courbes indicatives de la rigidité correspondant à chaque cas étudié qui servira ensuite comme une base de données pour construire un abaque de prédimensionnement.

IV.2. Caractéristiques des matériaux

Le matériau utilisé est le béton armé dont ses deux matériaux constitutifs à savoir le béton et l'acier, obéissent aux lois de comportement contraintes – déformations suivantes :

IV.2.1. Loi de comportement du béton [6]

La courbe contrainte – déformation utilisée est représentée comme suit (Fig. 4.1) :

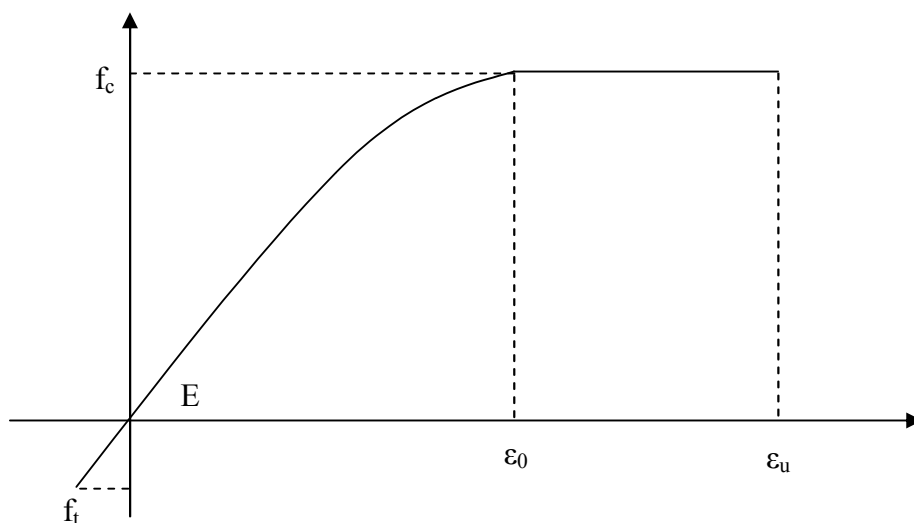


Fig. 4.1 : Loi de comportement du béton [6]

Les valeurs principales sont indiquées dans le tableau ci-dessous (Tab. 4.1) :

Contrainte de compression f_{cj}	25 MPa
Contrainte de traction f_{ij}	2.1 MPa
Module de Young E	32164.195 Mpa
Déformation ε_0	$2 \cdot 10^{-3}$
Déformation ultime ε_u	$3.5 \cdot 10^{-3}$

Tab. 4.1 : Caractéristiques du béton [6]

IV.2.2. Loi de comportement de l'acier

La courbe contrainte-déformation est représentée par la figure suivante (Fig. 4.2) :

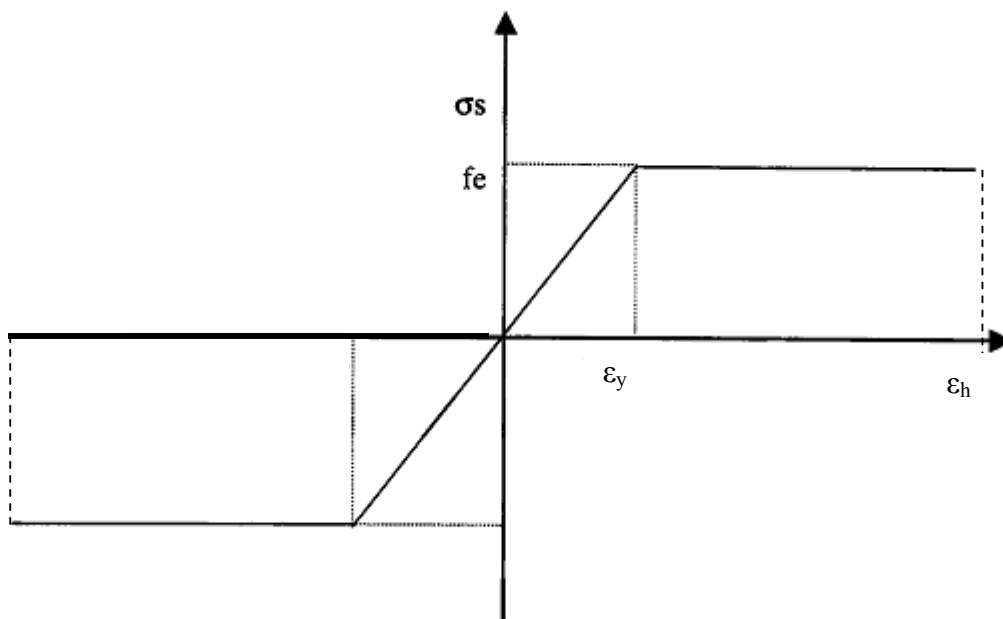


Fig. 4.2 : Loi de comportement de l'acier [6]

Les caractéristiques principales sont reportées dans le tableau ci-dessous (Tab. 4.2) :

Limite élastique f_e	400 MPa
Contrainte de calcul $f_s=f_e/\gamma_s$	400 MPa ($\gamma_s=1$, cas accidentel)
Module de Young E_s	200000 Mpa
Déformation élastique ε_y	$2 \cdot 10^{-3}$
Déformation plastique ε_h	$10 \cdot 10^{-3}$

Tab. 4.2 : Caractéristiques de l'acier [6]

IV.3. Modèles des bâtiments testés

Les modèles des bâtiments testés sont des modèles tridimensionnels, encastrés à la base, avec des masses des étages concentrées au niveau du centre de gravité de chaque étage.

Les deux types de bâtiments testés dans cette application se distinguent par leurs surfaces de plancher différentes (15mx15m, 20mx20m) avec une portée des poutres égales dans les deux directions et qui vaut 5m. La hauteur de chaque étage est de 3m (Fig. 4.3) et (Fig. 4.4). Seulement le nombre des étages sera varié pour les autres bâtiments (R+13, R+17 et R+20).

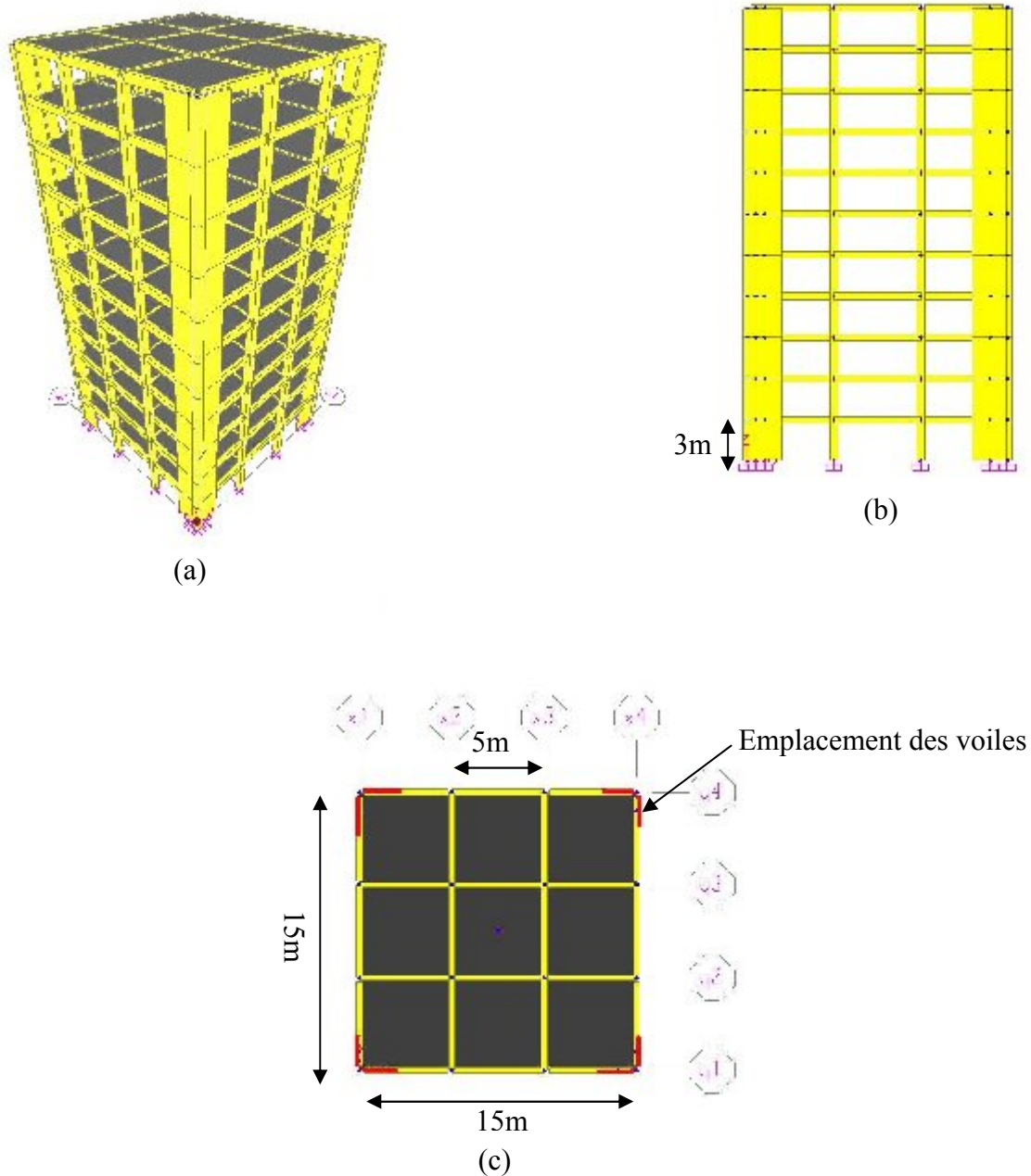


Fig. 4.3 : Différentes perspectives du bâtiment de 225m², (a) : vue en 3D, (b) : vue en élévation, (c) : vue en plan

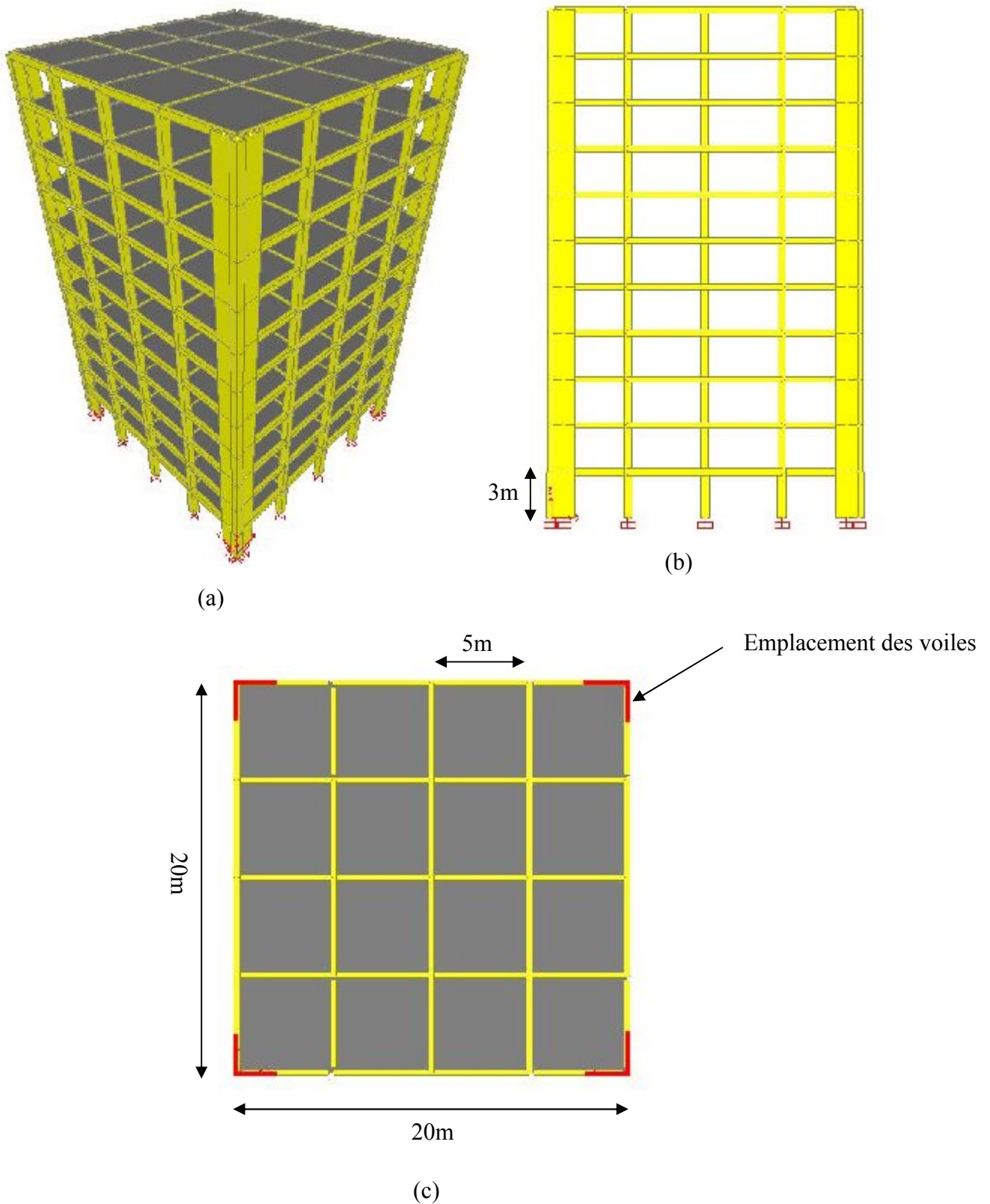


Fig. 4.4 : Différentes perspectives de bâtiments de 400 m^2 , (a) : vue en 3D, (b) : vue en élévation, (c) : vue en plan

IV.4. Mouvement sismique

Le mouvement sismique considéré dans cette application est le séisme d'El-Centro défini par un spectre de réponse en accélération à 5% d'amortissement lissé conformément à l'ATC 40 (Fig. 4.5).

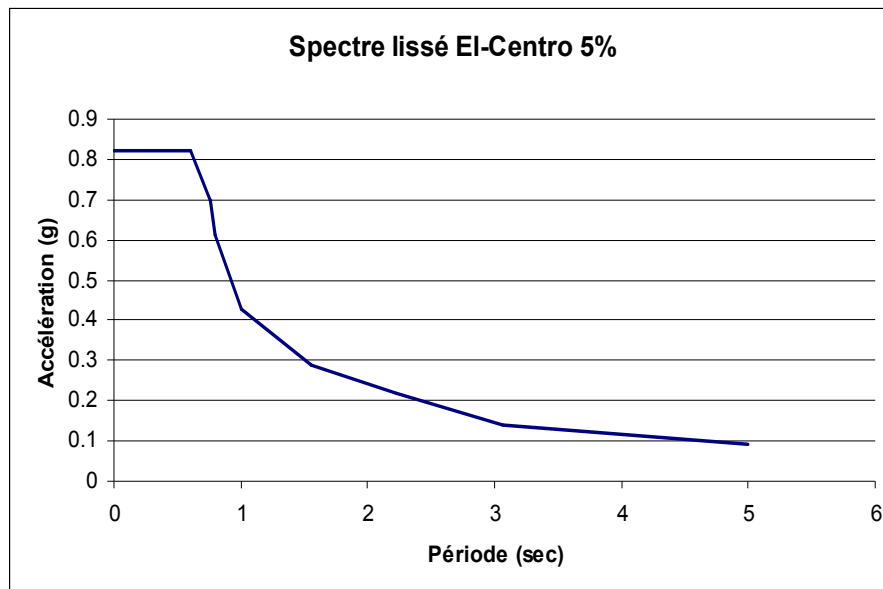


Fig. 4.5 : Spectre lissé El-Centro 5% [7]

Etant donné la symétrie du bâtiment, seulement la direction longitudinale sera considérée dans les calculs.

IV.5. Charges du poids propre et d'exploitation

En ce qui concerne les charges, on admet les valeurs suivantes :

- Poids propre étage courant : 5.4 kN/m²
- Poids propre terrasse inaccessible : 6.5 kN/m²
- Charge d'exploitation étage courant : 1.5 kN/m²
- Charge d'exploitation terrasse inaccessible : 1 kN/m²

IV.6. Applications

IV.6.1. Bâtiments de surface de plancher de 225m² pour un niveau de performance de "Non-effondrement" (Collapse Prevention, C.P)

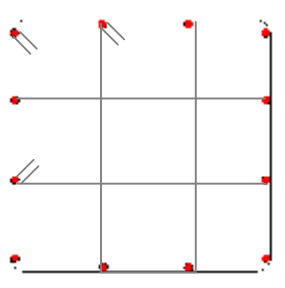
IV.6.1.1. Bâtiment R+10

Le bâtiment testé est un bâtiment régulier, de 11 étages (R+10), d'un système de contreventement mixte comme le montre la figure (Fig. 4.3).

IV.6.1.1.1. Sections et armatures

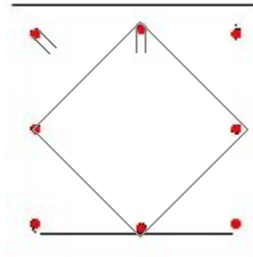
Toutes les dalles ont une épaisseur constante de 20 cm. La figure suivante illustre les sections courantes des éléments de contreventement dans le bâtiment testé (Fig. 4.6).

POT 50x50/4T16 par face



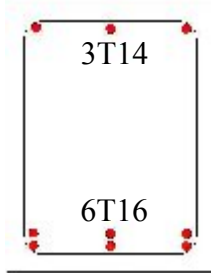
(a)

POT 40x40/3T16 par face

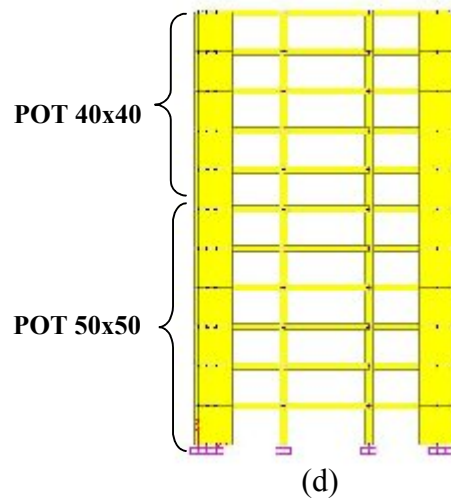


(b)

Poutre 30x45



(c)

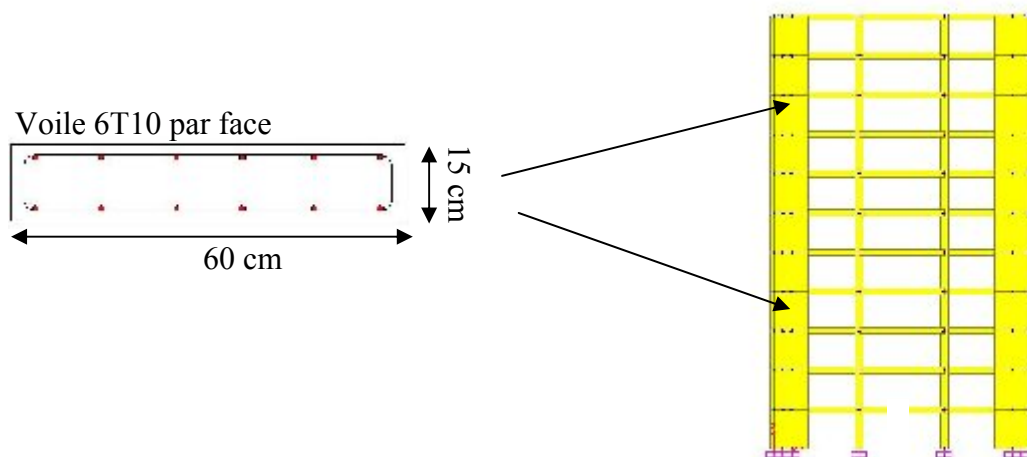


(d)

Fig. 4.6 : Différentes sections et armatures du bâtiment ; (a) : poteau 50 cm x 50 cm, (b) : poteau 40 x 40, (c) : poutre 35 cm x 45 cm, (d) : distribution des sections

Les voiles seront positionnés symétriquement dans les quatre coins du bâtiment.

Les dimensions initiales des voiles sont représentées sur la figure (Fig. 4.7) :



Voile 6T10 par face

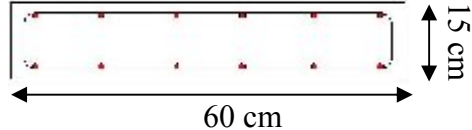


Fig. 4.7 : Sections des voiles

IV.6.1.1.2. Analyse modale linéaire (méthode spectrale)

Par cette méthode, il est recherché pour chaque mode de vibration, le maximum des effets engendrés dans la structure par les forces sismiques représentées par un spectre de réponse de calcul. Ces effets sont par la suite combinés pour obtenir la réponse de la structure. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau suivant (Tab. 4.3) :

Mode N°	Période (s)	Pourcentage de masse modale (%)
01	1.18	79.07
02	1.18	79.07
03	1.01	25.26

Tab. 4.3 : Périodes et masses modales des trois premiers modes

IV.6.1.1.3. Détermination de la distribution des charges latérales selon la FEMA 356 (Art. 3.3.1.3.2) [26]

La distribution des charges latérales adoptée par la FEMA 356 est donnée par la formule (Eq. 2.26) : $F_n = C_{vn}V$ avec $V = C_1C_2C_3C_mS_aW$

- ✓ Coefficient C_1 : $T_e = 1.212 \text{ s} > T_s = 0.5\text{s}$, donc, $C_1 = 1$
- ✓ Coefficient C_2 : $C_2 = 1.2$
- ✓ Coefficient C_3 : $C_3 = 1$
- ✓ Coefficient C_m : pour $T_e = 1.212 \text{ s} > 1\text{s} \rightarrow C_m = 1$
- ✓ L'accélération spectrale à $T_e = 1.224 \text{ s}$ vaut $S_a = 0.31\text{g}$
- ✓ Le facteur k : Pour $T = 1.18 \text{ sec} \rightarrow k = 1.18$

Le tableau suivant présente la distribution des charges latérales déterminées (Tab. 4.4) :

Niveau	$W_i(t)$	$h_i (m)$	$W_i \cdot h^k$	$C_{vx} = \frac{w_x h_x^k}{\sum_{i=1}^n w_i h_i^k}$	$F_i (KN)$	$V_i (KN)$
RDC	221	3	807,97	0,011	9,62	903,77
1 ^{er} étage	221	6	1830,67	0,024	21,81	894,15
2 ^{eme} étage	221	9	2953,92	0,039	35,18	872,35
3 ^{eme} étage	221	12	4147,88	0,055	49,41	837,16
4 ^{eme} étage	221	15	5397,34	0,071	64,29	787,76
5 ^{eme} étage	221	18	6692,89	0,088	79,72	723,47
6 ^{eme} étage	221	21	8028,07	0,106	95,62	643,75
7 ^{eme} étage	221	24	9398,13	0,124	111,94	548,13
8 ^{eme} étage	221	27	10799,45	0,142	128,63	436,19
9 ^{eme} étage	221	30	12229,12	0,161	145,66	307,55
10 ^{eme} étage	219.5	33	13591,93	0,179	161,89	161,89

Tab. 4.4 : Distribution des charges latérales selon FEMA 356

Cette distribution a une allure semblable à celle schématisée sur la figure suivante (Fig. 4.8) :

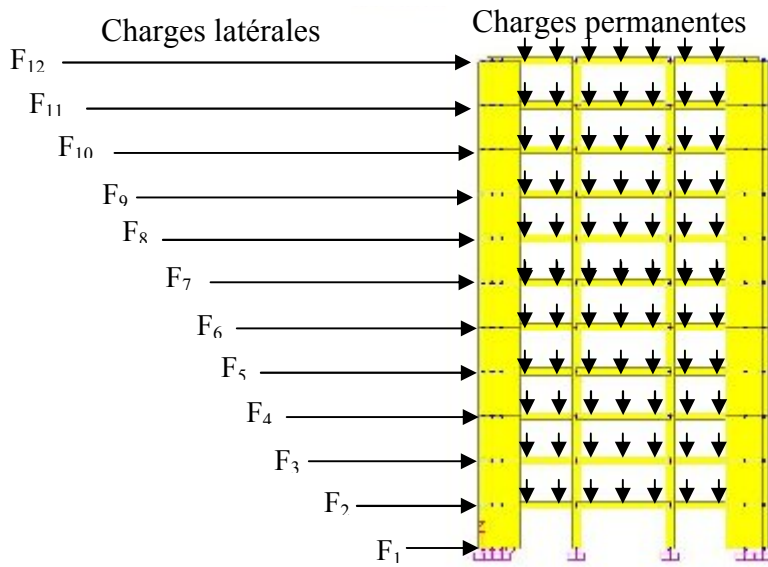


Fig. 4.8 : Modèle de distribution des charges

IV.6.1.1.4. Détermination des lois moment – courbure

Suivant les procédures de calcul et de modélisation présentées dans le chapitre III, une détermination des lois de comportement des éléments devrait être effectuée. Cette loi qui exprime la relation moment-courbure dépend des caractéristiques géométriques de la section, des caractéristiques mécaniques des matériaux qui la composent et de l'effort normal existant. Pour les éléments élastiques, la résistance des matériaux fournit une loi de comportement en élasticité linéaire : $M = EI.C$ avec M le moment de flexion, E le module d'Young homogénéisé, I l'inertie de la section et C la courbure.

Pour les sections correspondant aux rotules plastiques, les relations présentées dans le chapitre III sont utilisées afin de déterminer les lois moments courbures de chaque élément plastifié, comme il est montré sur la figure suivante (Fig. 4.9) :

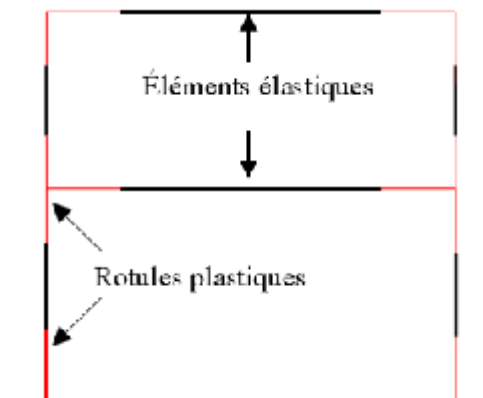


Fig. 4.9 : Localisation des rotules plastiques

IV.6.1.1.4.a. Loi moment-courbure pour les poutres

La détermination de la loi moment – courbure pour les poutres s’effectue selon les démarches de calcul présentées dans le chapitre III. Le tableau suivant récapitule les résultats obtenus :

Courbure nominale de plastification ϕ_y	$3.58 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$
Ductilité en Courbure μ_ϕ	5.97
Moment de plastification M_y	153.37 kN.m
Moment ultime M_u	168.71 kN.m
Longueur de la rotule plastique l_p	54.08 cm

Tab. 4.5 : Loi moment – courbure pour les poutres

Une représentation graphique de cette loi est illustrée sur la figure suivante (Fig. 4.10) :

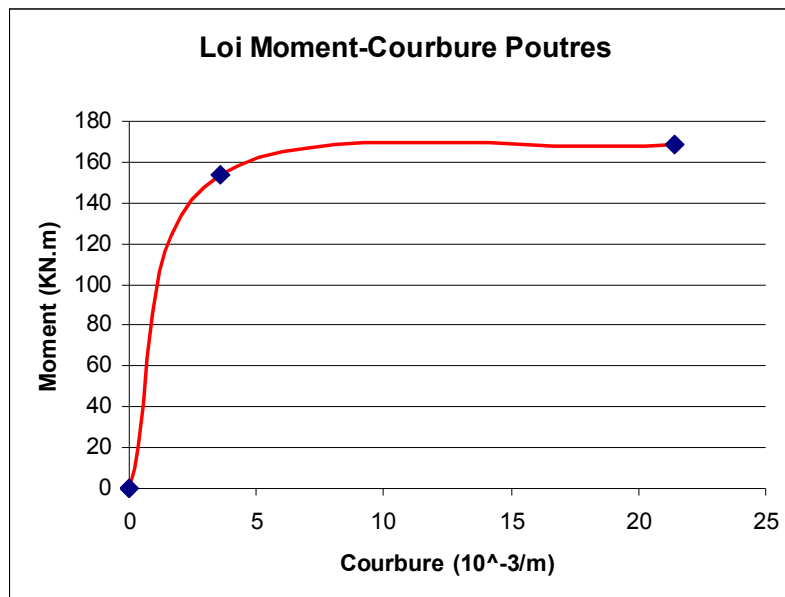


Fig. 4.10 : Loi moment-courbure des poutres

IV.6.1.1.4.b. Loi moment-courbure pour les poteaux 50x50

Egalement, la détermination de la loi moment – courbure pour les poteaux se fait conformément aux formulations données dans le chapitre III. Les tableaux suivants récapitulent les résultats obtenus en fonction de différentes valeurs des efforts normaux.

Courbure nominale de plastification φ_y	$2.56 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$
Courbure ultime φ_u	$3.44 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$
Moment de plastification M_y	494.92 kN.m
Moment ultime M_u	544.41 kN.m
Longueur de la rotule plastique l_p	38.08 cm

Tab. 4.6 : Loi de comportement des poteaux 50 x 50 pour $N = 2000 \text{ kN}$

Courbure nominale de plastification φ_y	$2.72 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$
Courbure ultime φ_u	$6.27 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$
Moment de plastification M_y	410.32 kN.m
Moment ultime M_u	451.35 kN.m
Longueur de la rotule plastique l_p	38.08 cm

Tab. 4.7 : Loi de comportement des poteaux 50 x 50 pour $N = 1500 \text{ kN}$

Courbure nominale de plastification φ_y	$2.92 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$
Courbure ultime φ_u	$11.73 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$
Moment de plastification M_y	321.92 kN.m
Moment ultime M_u	354.12 kN.m
Longueur de la rotule plastique l_p	38.08 cm

Tab. 4.8 : Loi de comportement des poteaux 50 x 50 pour $N = 1000 \text{ kN}$

Courbure nominale de plastification φ_y	$3.18 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$
Courbure ultime φ_u	$25.18 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$
Moment de plastification M_y	228.53 kN.m
Moment ultime M_u	251.38 kN.m
Longueur de la rotule plastique l_p	38.08 cm

Tab. 4.9 : Loi de comportement des poteaux 50 x 50 pour $N = 500 \text{ kN}$

Une représentation graphique de la courbe d'interaction moment – effort normal pour les poteaux 50 x 50 est illustrée sur la figure (Fig. 4.11) :

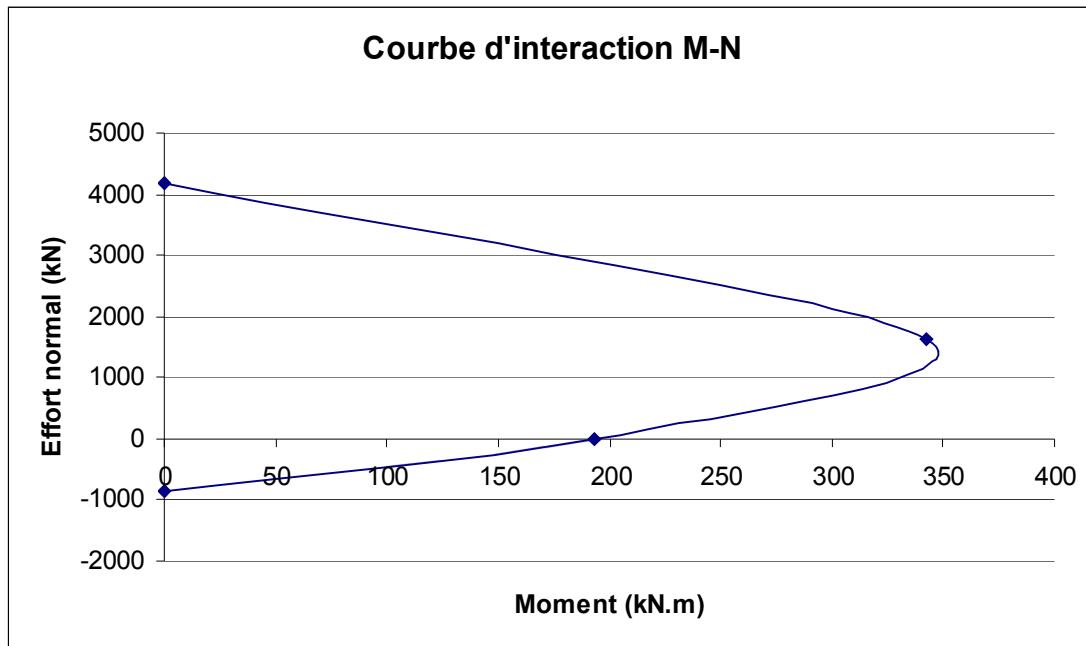


Fig. 4.11 : Courbe d'interaction moment-essort normal pour poteaux 50x50

La figure (Fig. 4.12) montre les résultats obtenus pour les lois de comportement des poteaux 50 x 50 en fonction des efforts normaux :

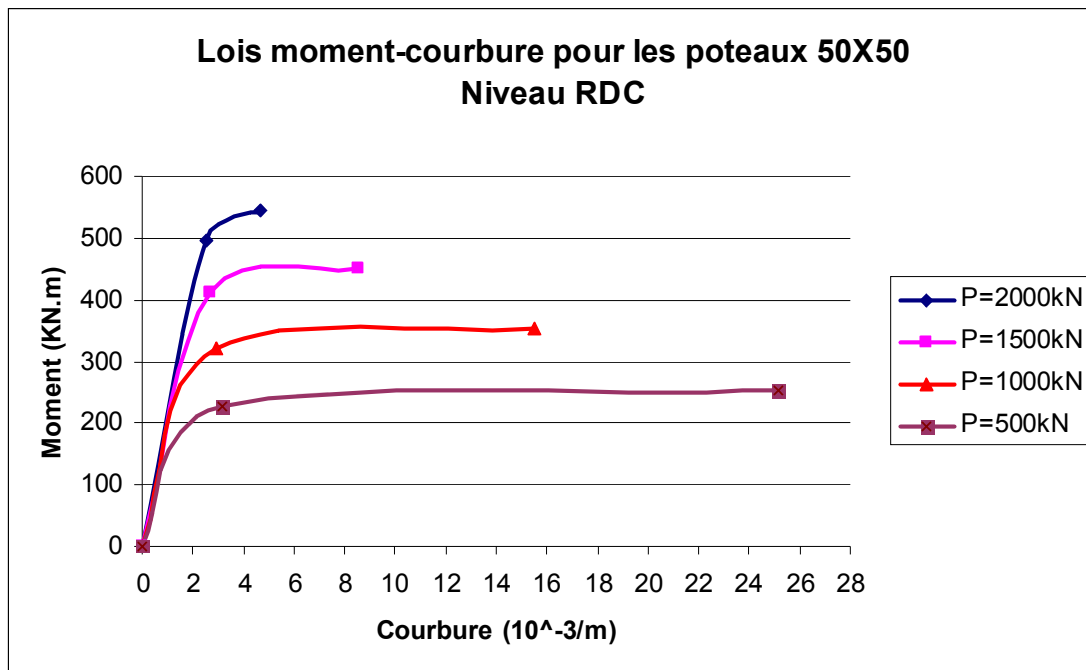


Fig. 4.12 : Loi moment-courbure des poteaux 50x50 du niveau RDC en fonction des différentes valeurs des efforts normaux existants

La même opération est effectuée pour les autres étages ainsi que pour les poteaux 40x40.

IV.6.1.1.5. Modélisation des voiles

Les voiles utilisés dans le système de contreventement pour notre étude sont classés comme des voiles élancés ayant un rapport $H/L > 2$ avec H et L sont la hauteur et la longueur du voile respectivement. Pour le cas des voiles élancés, le mécanisme de plastification est contrôlé par la flexion comme les poteaux. D'autre part, l'article 6.8.2.1 de la FEMA 356 permet une modélisation des voiles élancés par un modèle équivalent poteau – poutre.

L'article recommande aussi de prendre en compte la rigidité de la zone de connexion entre la poutre et le voile. Une hypothèse qui nous permet de décrire la loi de comportement des voiles de la même façon que les poteaux. Ainsi, l'évaluation de la rigidité des voiles sera effectuée selon les mêmes démarches des poteaux.

IV.6.1.1.6. Niveau de performance de la structure

Le niveau de performance attribué à la structure correspond au niveau de non-effondrement (C.P : Collapse Prevention).

IV.6.1.1.7. Récapitulatif

Les différentes procédures qui précèdent l'exécution de l'analyse Pushover sur le bâtiment testé ont été présentées. Des données de base du matériau utilisé à savoir le béton armé, a été présentée ainsi que, la définition du mouvement sismique et les différentes valeurs des charges et surcharges appliquées. Le modèle de la structure, sa géométrie, les sections de ses éléments aussi ont été présentées. Les lois moment – courbure des éléments de la structure ont été déterminées pour qu'elles soient introduites dans le programme de calcul. En ce qui suit, les résultats obtenus de l'analyse Pushover effectuée sur le bâtiment testé seront présentés.

IV.6.1.1.8. La courbe Pushover pour le bâtiment R+10

La courbe Pushover obtenue est représentée comme suit (Fig. 4.13) :

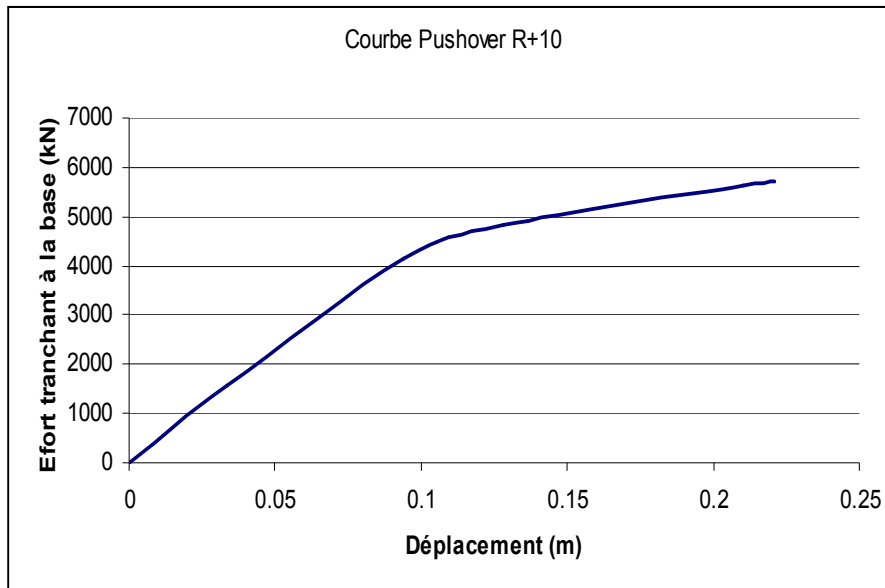


Fig. 4.13 : Courbe Pushover du bâtiment initial R+10

IV.6.1.1.9. La courbe de capacité

La courbe effort tranchant à la base – déplacement en tête de la structure issue de l'analyse pushover devrait être convertie en courbe déplacement spectral – accélération spectrale pour qu'elle soit comparée avec le spectre d'El-Centro en format ADRS.

La figure (Fig. 4.14) représente la courbe de capacité convertie en format ADRS :

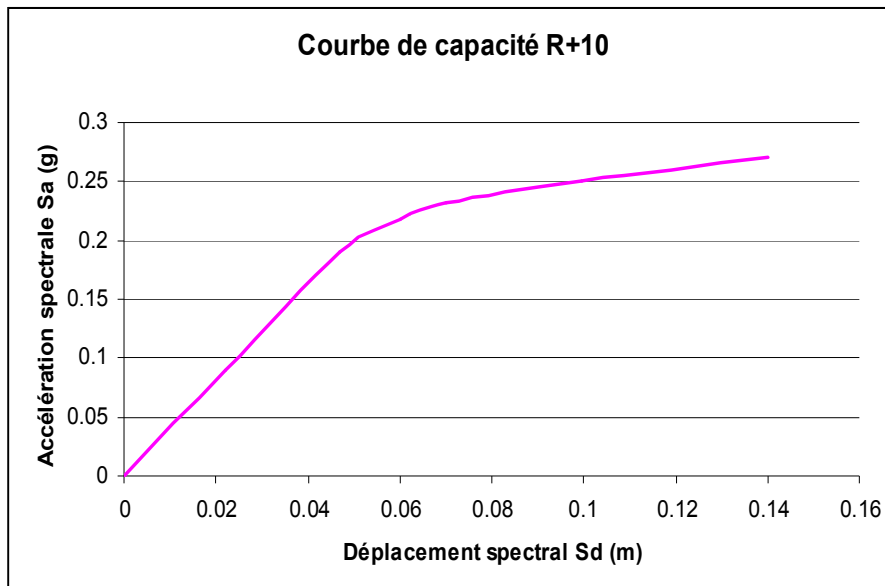


Fig. 4.14 : Courbe de capacité du bâtiment initial R+10 en format ADRS

IV.6.1.1.10. Le spectre d'El-Centro au format ADRS

La figure suivante (Fig. 4.15) représente la conversion du spectre d'El-Centro (Fig. 4.5) au format ADRS comme suit :

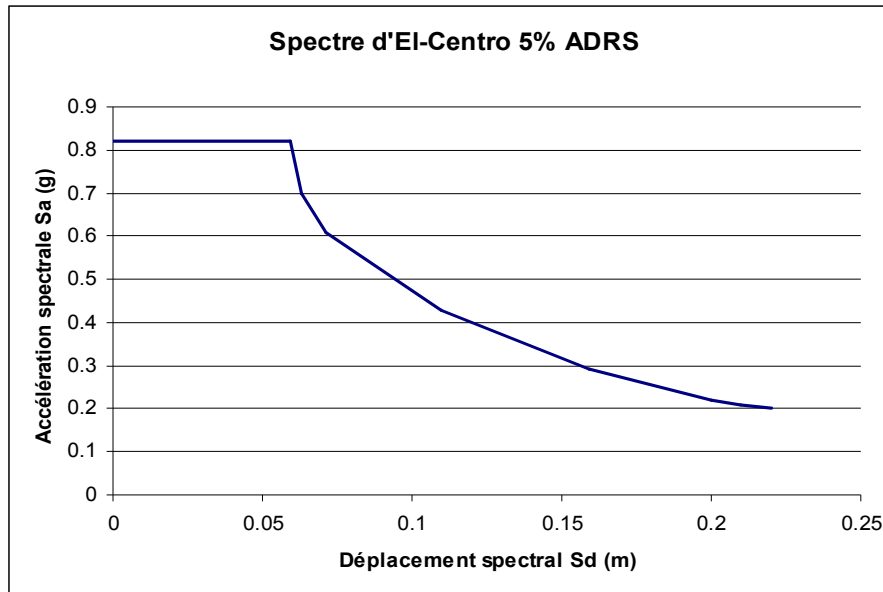


Fig. 4.15 : Spectre ADRS El-Centro 5%

IV.6.1.1.11. Détermination du point de performance

La détermination du point de performance s'effectue en superposant la courbe de capacité (Fig. 4.14) avec le spectre ADRS (Fig. 4.15). L'intersection entre les deux courbes définit ce point de performance (Fig. 4.16).

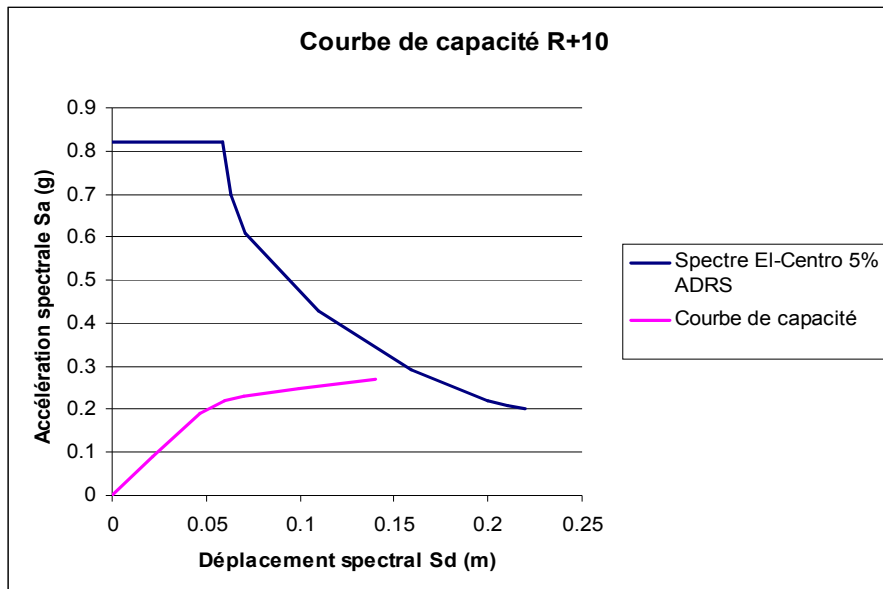


Fig. 4.16 : Définition du point de performance

Nous remarquons que la capacité de la structure est insuffisante pour atteindre le niveau de performance spécifié. Une amélioration de la résistance de la structure devrait être effectuée en augmentant les dimensions des éléments de son système de contreventement.

Après plusieurs itérations, nous avons abouti aux dimensions suivantes :

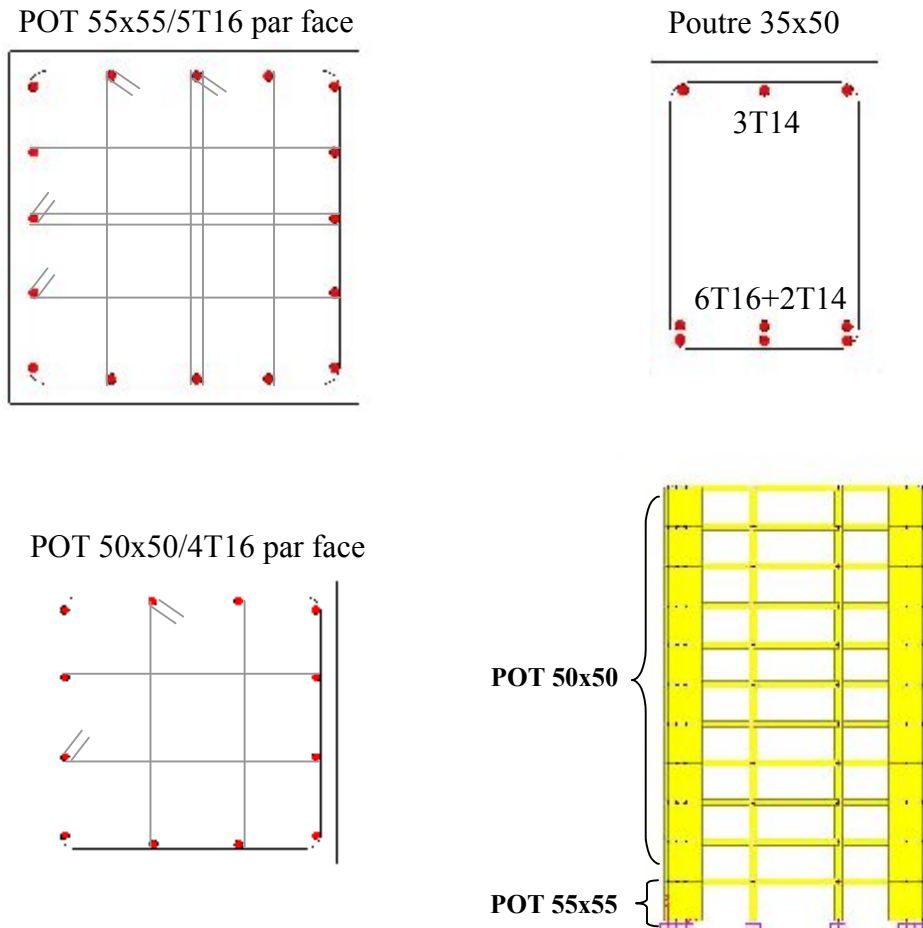


Fig. 4.17 : Sections des poteaux et des poutres

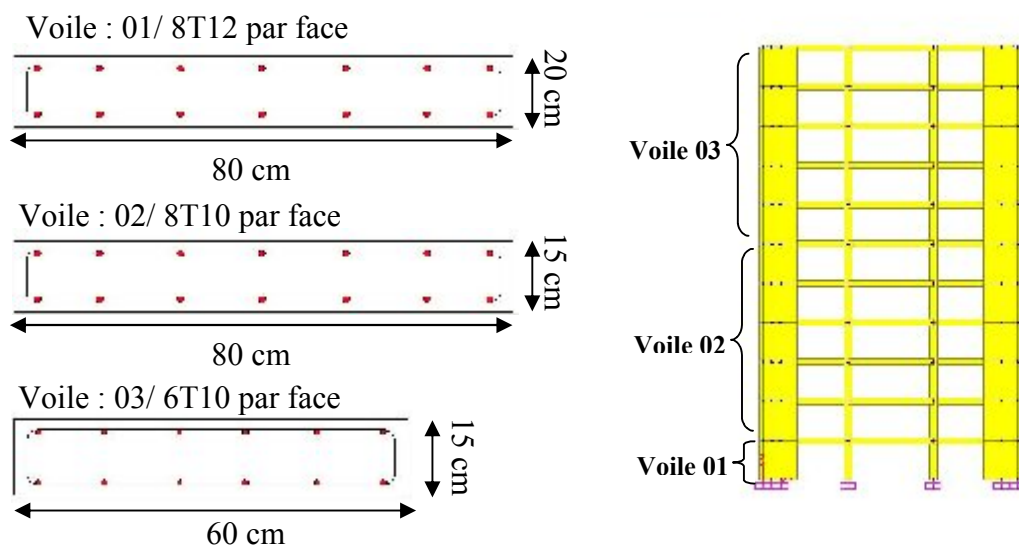


Fig. 4.18 : Sections et distribution des voiles selon la hauteur du bâtiment

Les résultats obtenus sont représentés comme suit :

IV.6.1.1.12. La courbe Pushover du bâtiment amélioré

La courbe Pushover issue de l'analyse du bâtiment amélioré est présentée sur (Fig. 4.19) :

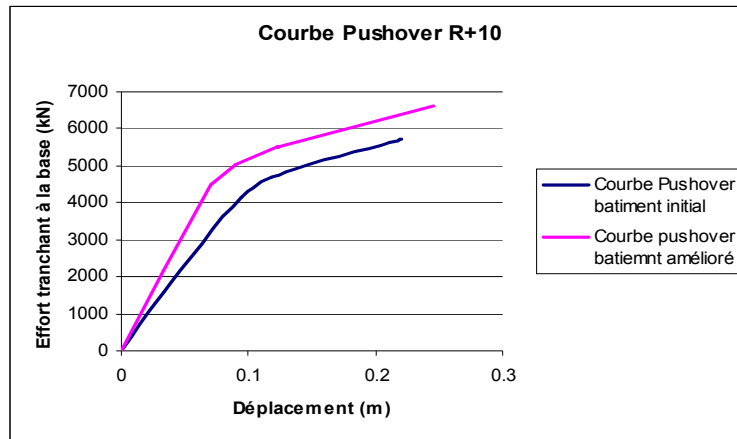


Fig. 4.19 : Courbe Pushover du bâtiment initial et amélioré

On remarque que la capacité de la structure est améliorée.

IV.6.1.1.13. Courbe de capacité et point de performance du bâtiment amélioré

Le point de performance est déterminé comme suit (Fig. 4.20) :

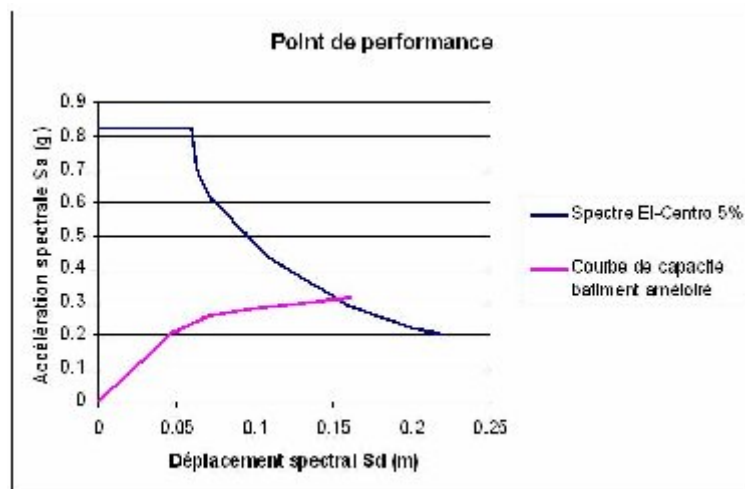


Fig. 4.20 : Détermination du point de performance

Les nouvelles dimensions des éléments du système de contreventement de la structure ont apporté une amélioration dans sa résistance. Cette amélioration a donné un point de performance qui est comparable à la valeur du déplacement cible déterminée pour le niveau de performance spécifiée suivant les démarches de calcul présentées dans le chapitre II comme suit :

- **Détermination des rigidités initiale K_i , effective K_e et la période fondamentale T_e**

L'application des ajustements de la FEMA 356 [26], nous mène à avoir une idéalisation de cette courbe Pushover en une courbe bilinéaire comme il est montré sur la figure suivante :

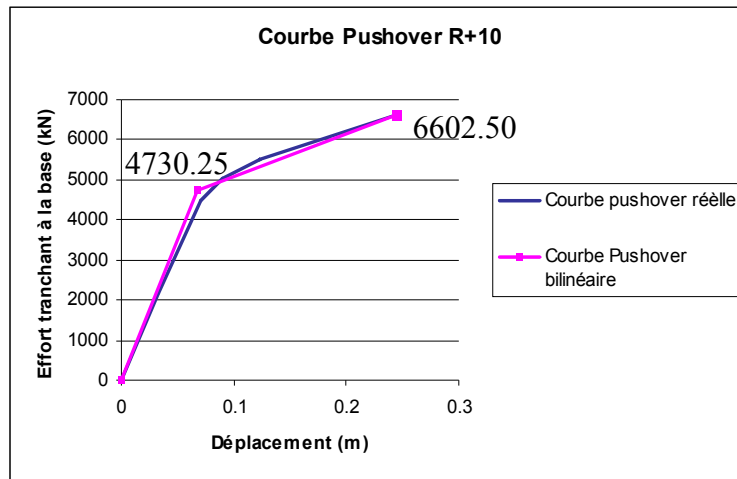


Fig. 4.21 : Idéalisations de la courbe Pushover

La rigidité initiale K_i correspond à la pente de la courbe de capacité dans sa partie élastique, soit :

$$K_i = 2471.02/0.035 = 70600.75 \text{ kN/m}$$

La valeur de la limite élastique V_y est estimée à 4730.25 kN

→ $0.6 V_y = 2838.15 \text{ kN}$. Le déplacement correspondant à cet effort est de 4.1 cm.

$$\text{Donc } K_e = \frac{2838.15}{4.1 \cdot 10^{-2}} = 69223.17 \text{ kN/m} \Rightarrow T_e = T_i \sqrt{\frac{K_i}{K_e}} = 1.224 \text{ s}$$

▪ **Calcul des coefficients FEMA 356**

- ✓ Coefficient C_0 : pour plus de 10 étages $C_0 = 1.5$
- ✓ Coefficient C_1 : $T_e = 1.224 \text{ s} > T_s = 0.5 \text{ s}$ (Période caractéristique spécifique au site, pour un site meuble), donc, $C_1 = 1$
- ✓ Coefficient C_2 : $C_2 = 1.2$
- ✓ Coefficient C_3 : $C_3 = 1$
- ✓ **Calcul du déplacement cible δ_t**

L'accélération spectrale à $T_e = 1.224 \text{ s}$ vaut $S_a = 0.31 \text{ g}$. Il vient que le déplacement cible correspond à ce niveau de performance vaut :

$$\delta_t = C_0 C_1 C_2 C_3 S_a \omega_e^2 = 18.96 \text{ cm}$$

Les coordonnées du point de performance sont données comme suit :

$$(S_a (m/s^2), S_d (m)) = (0.302 \text{ g}, 0.158),$$

La conversion de ces coordonnées en effort tranchant à la base – déplacement au sommet du bâtiment se fait par le biais des relations (Eq. 2.30) et (Eq. 2.31).

En considérant les trois premiers modes dans la forme du chargement modal :

$$\alpha = 0.91 \quad PF_1 \phi_{R1} = 1.19$$

(V (kN), D (m)) = (6603.45, 0.187), une valeur qui est comparable au déplacement cible déjà calculé.

IV.6.1.1.14. Estimation de la rigidité

La rigidité sera estimée pour les éléments du niveau RDC en commençant par les poteaux et les voiles puis la rigidité relative à l'étage entier y compris les poutres sera déterminée.

➤ **Sections des poteaux, poutres et voiles**

▪ **File 1 et 4 :**

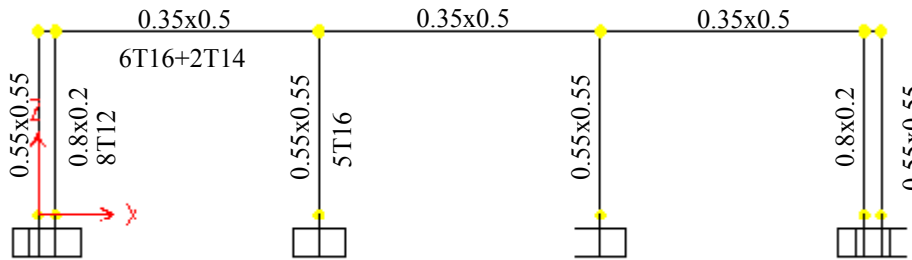


Fig. 4.22 : Portiques des extrémités du niveau RDC

▪ **File 2 et 3 :**

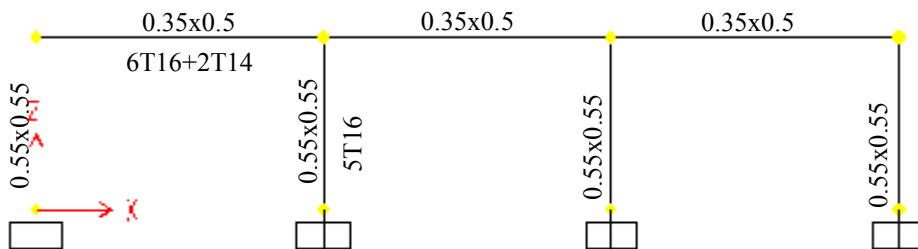


Fig. 4.23 : Portiques du milieu du niveau RDC

Le tableau suivant récapitule les résultats obtenus :

Elément	b (m)	h (m)	H (m)	A _s (cm ²)	Inertie I (m ⁴)	R _i (MN/m)	R _n (MN/m)
Poteau	0.55	0.55	3	12.05	0.00857655	30.65	490.41
Voile	0.8	0.2	3	10.18	0.00062778	2.24	8.97
Etage RDC (y compris les poutres) : R							860.63

Tab. 4.10 : Rigidité du niveau RDC pour le bâtiment R+10 et niveau de performance C.P

Avec :

b représente la largeur de la section

h représente la hauteur de la section

H représentent la hauteur d'étage

R_i représente la rigidité d'un seul élément

R_n = R_i x n où n est le nombre des éléments par étage RDC

Les résultats obtenus pour l'ensemble des cas étudiés sont représentés comme suit :

a. Surface 225 m², niveau de performance C.P

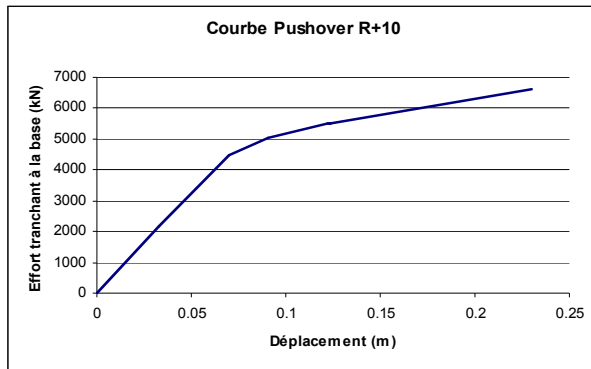


Fig. 4.24 : Courbe Pushover du bâtiment R+10

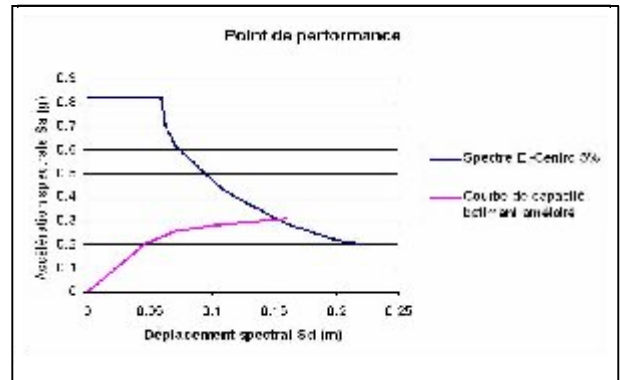


Fig. 4.25 : Point de performance R+10

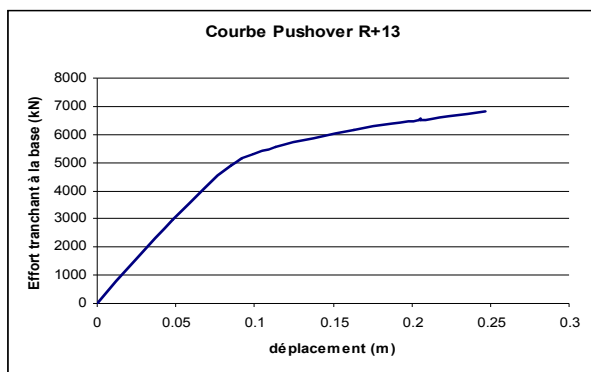


Fig. 4.26 : Courbe Pushover du bâtiment R+13

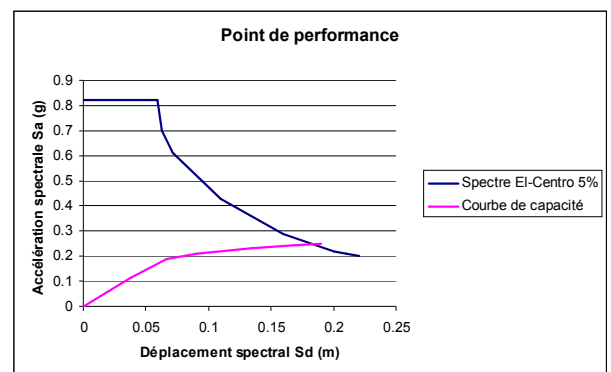


Fig. 4.27 : Point de performance R+13

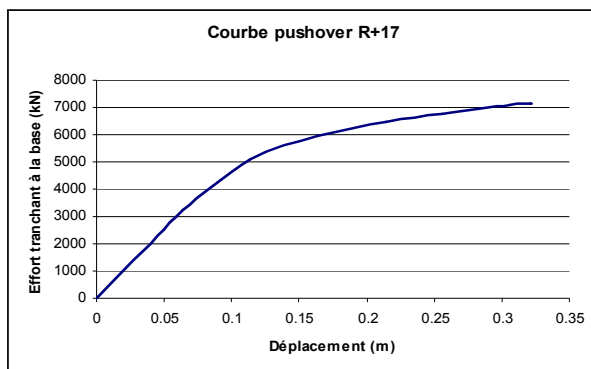


Fig. 4.28 : Courbe Pushover du bâtiment R+17

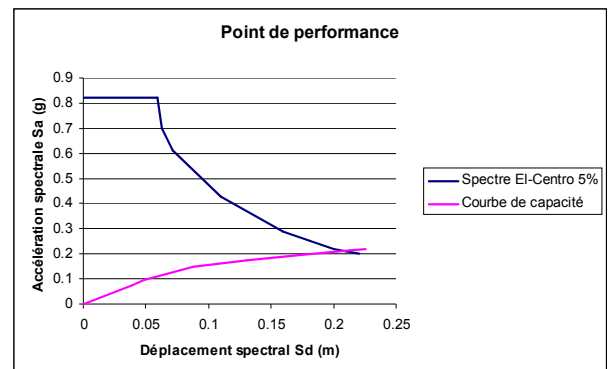


Fig. 4.29 : Point de performance R+17

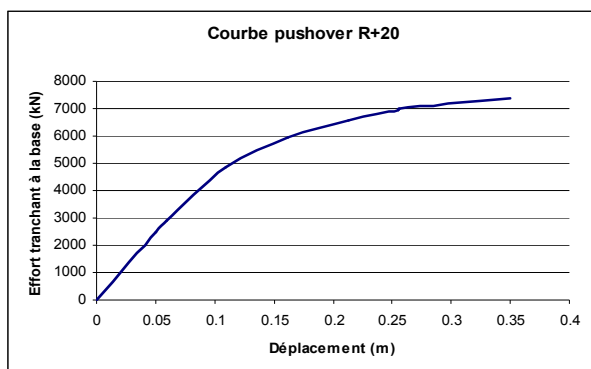


Fig. 4.30 : Courbe Pushover du bâtiment R+20

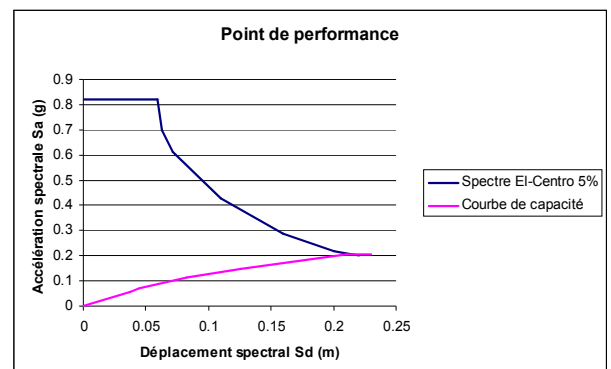


Fig. 4.31 : Point de performance R+20

b. Surface 225 m², niveau de performance L.S

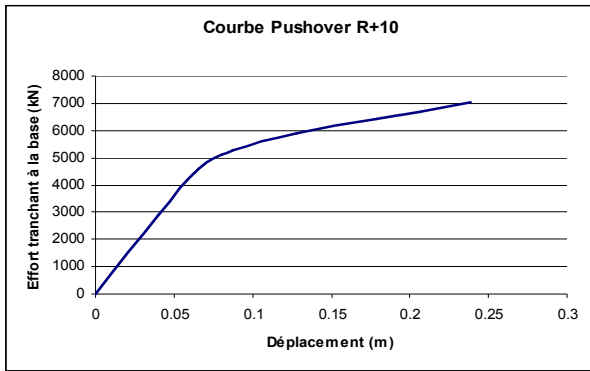


Fig. 4.32 : Courbe Pushover du bâtiment R+10

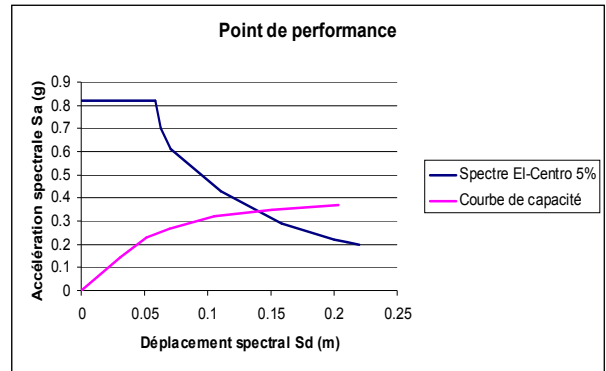


Fig. 4.33 : Point de performance R+10

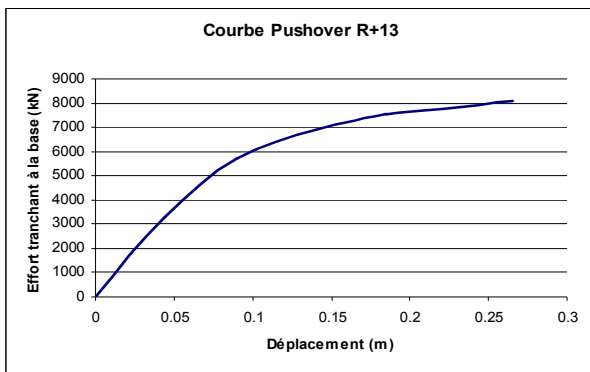


Fig. 4.34 : Courbe Pushover du bâtiment R+13

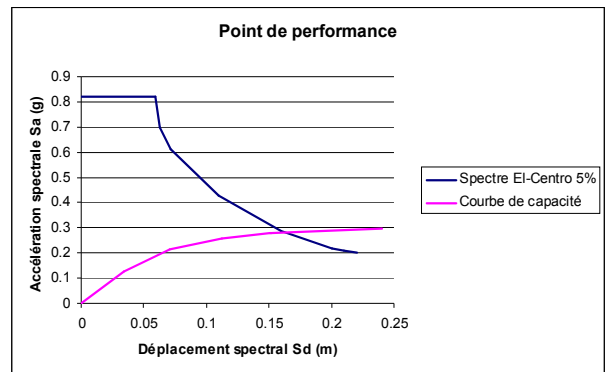


Fig. 4.35 : Point de performance R+13

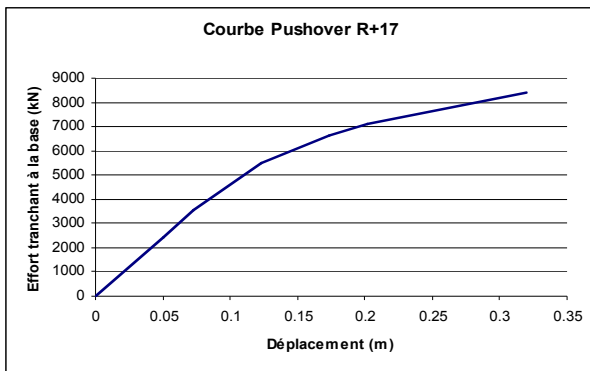


Fig. 4.36 : Courbe Pushover du bâtiment R+17

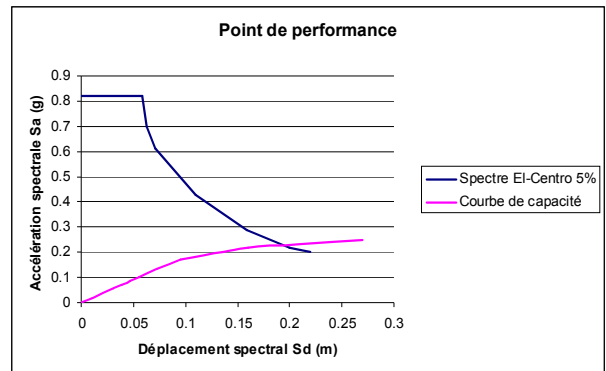


Fig. 4.37 : Point de performance R+17

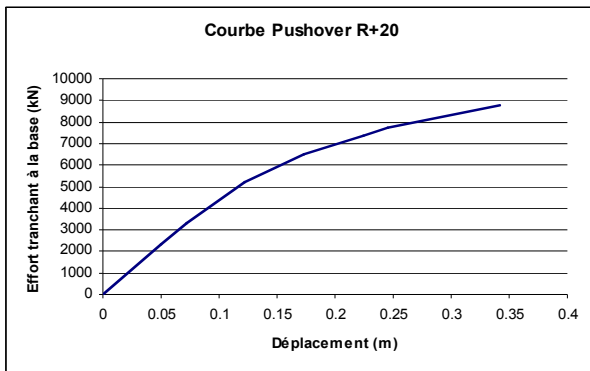


Fig. 4.38 : Courbe Pushover du bâtiment R+20

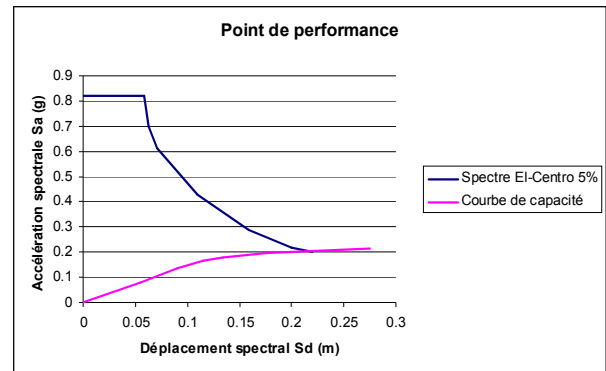


Fig. 4.39 : Point de performance R+20

c. Surface 400 m², niveau de performance C.P

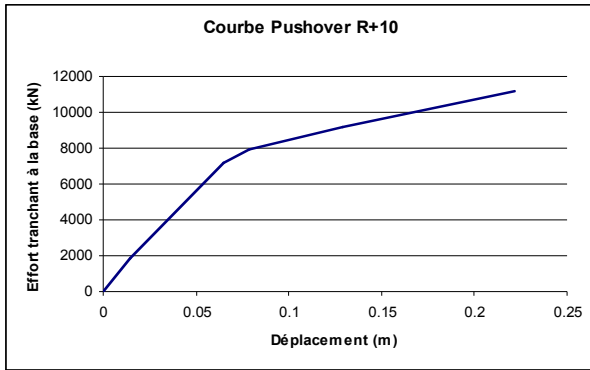


Fig. 4.40 : Courbe Pushover du bâtiment R+10

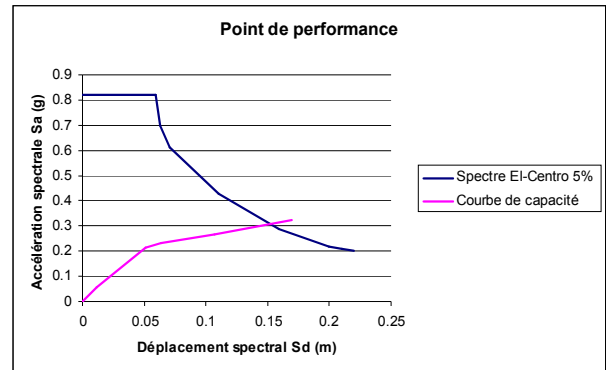


Fig. 4.41 : Point de performance R+10

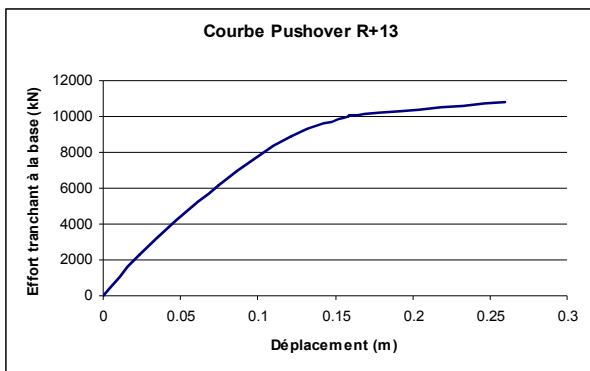


Fig. 4.42 : Courbe Pushover du bâtiment R+13

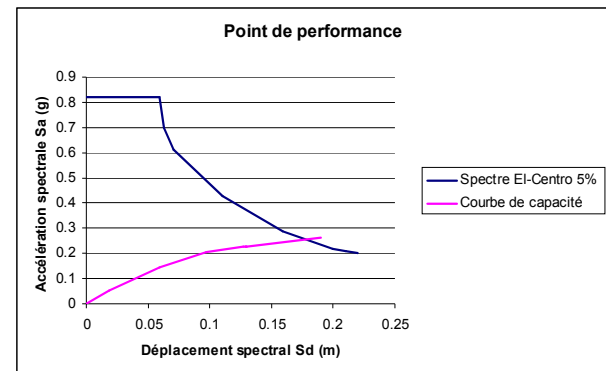


Fig. 4.43 : Point de performance R+13

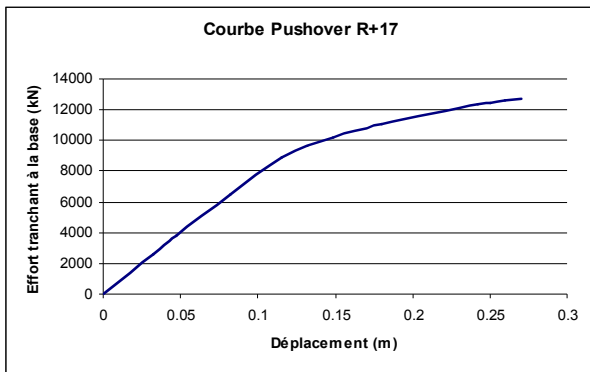


Fig. 4.44 : Courbe Pushover du bâtiment R+17

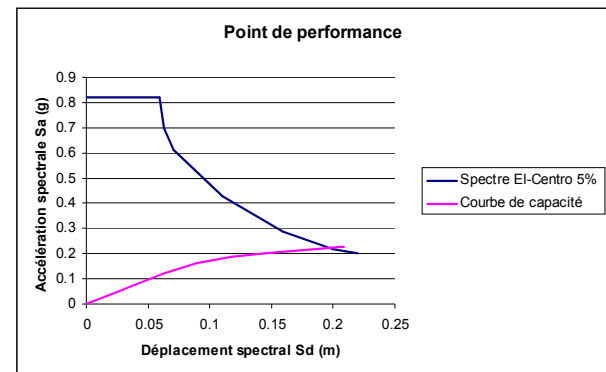


Fig. 4.45 : Point de performance R+17

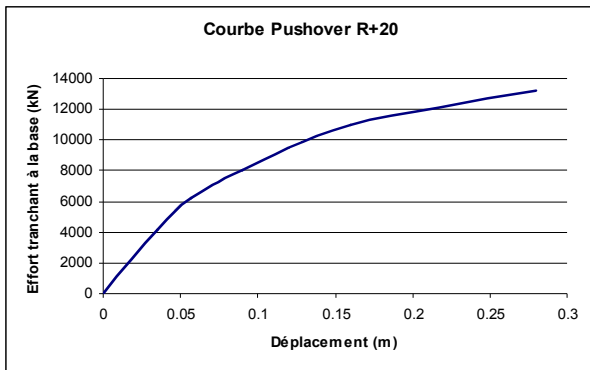


Fig. 4.46 : Courbe Pushover du bâtiment R+20

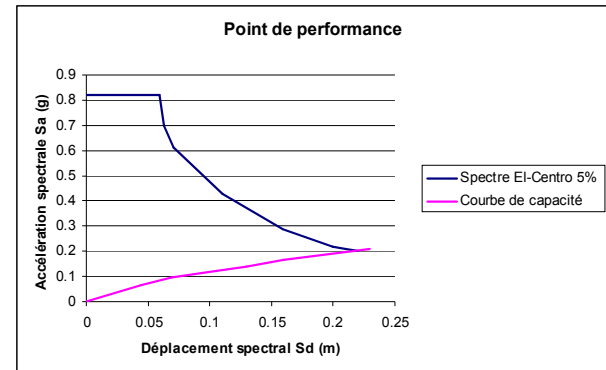


Fig. 4.47 : Point de performance R+20

d. Surface 400 m², niveau de performance L.S

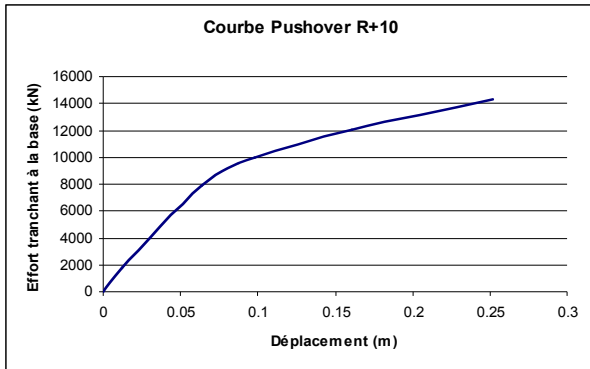


Fig. 4.48 : Courbe Pushover du bâtiment R+10

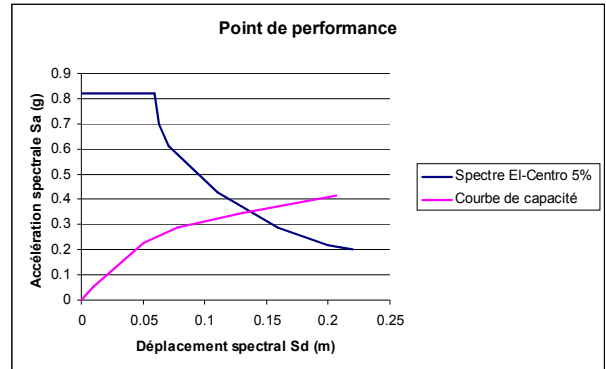


Fig. 4.49 : Point de performance R+10

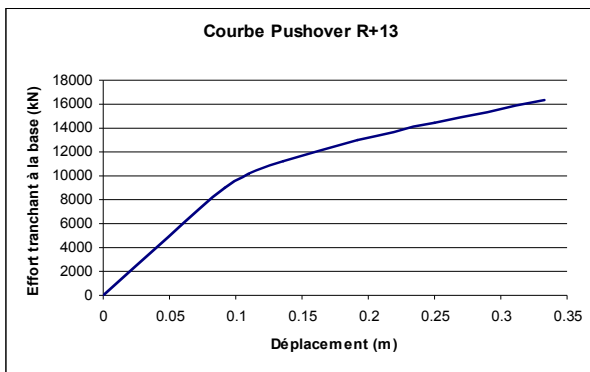


Fig. 4.50 : Courbe Pushover du bâtiment R+13

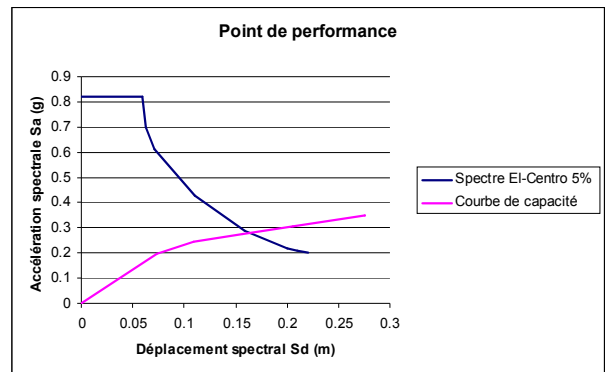


Fig. 4.51 : Point de performance R+13

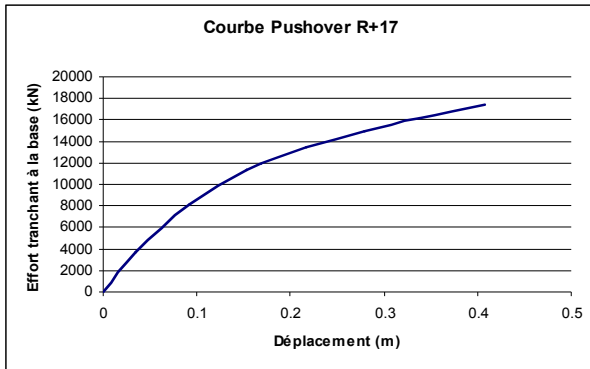


Fig. 4.52 : Courbe Pushover du bâtiment R+17

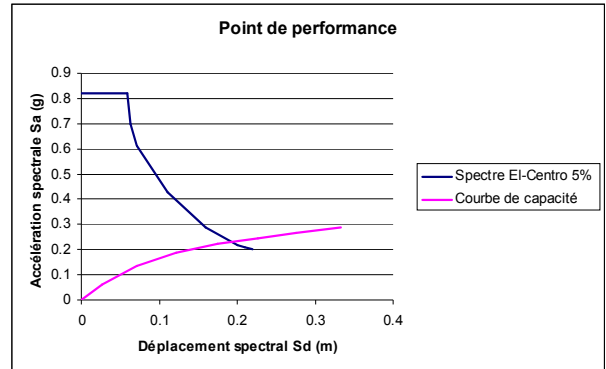


Fig. 4.53 : Point de performance R+17

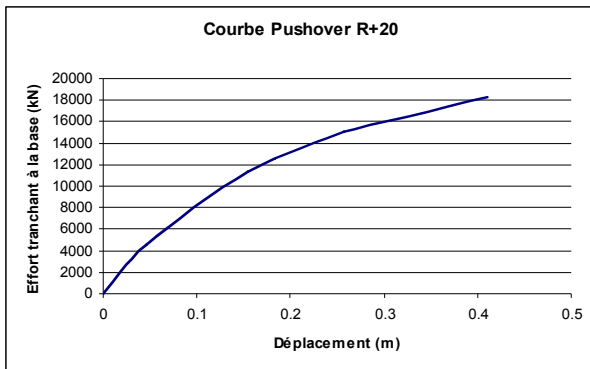


Fig. 4.54 : Courbe Pushover du bâtiment R+20

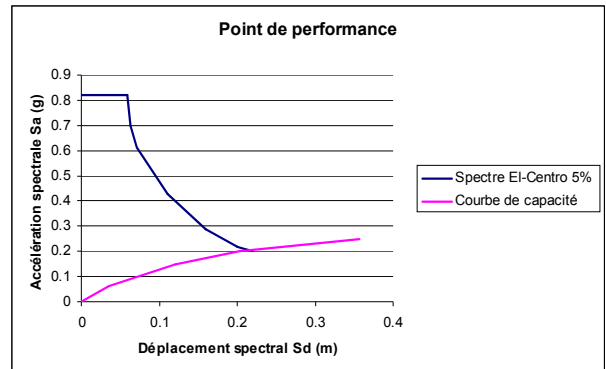


Fig. 4.55 : Point de performance R+20

e. Coordonnées des points de performance

Le tableau suivant récapitule les coordonnées des points de performance :

Applications	Bâtiment testé	Accélération spectrale S_a (m/s^2)	Déplacement spectral S_d (m)
225 m ² , C.P	R+10	0.302 g	0.158
	R+13	0.246 g	0.186
	R+17	0.218 g	0.217
	R+20	0.201 g	0.231
225 m ² , L.S	R+10	0.338 g	0.138
	R+13	0.285 g	0.164
	R+17	0.233 g	0.194
	R+20	0.201 g	0.222
400 m ² , C.P	R+10	0.291 g	0.154
	R+13	0.258 g	0.180
	R+17	0.217 g	0.215
	R+20	0.202 g	0.237
400 m ² , L.S	R+10	0.333 g	0.139
	R+13	0.271 g	0.161
	R+17	0.222 g	0.191
	R+20	0.202 g	0.221

Tab. 4.11 : Coordonnées des points de performance

IV.7. Estimation de la rigidité

L'estimation de la rigidité sera effectuée selon les mêmes procédures présentées précédemment. Les résultats obtenus sont récapitulés dans les tableaux suivants :

a. Surface 225 m², niveau de performance C.P

Bâtiments testés	Sections	Poteau	Voile
R+10	b (m)	0.55	0.8
	h (m)	0.55	0.2
	H (m)	3	3
	A_s (cm ²)	12.05	10.18
	I (m ⁴)	0.00857655	0.00062778
	R_i (MN/m)	30.65	2.24
	R_n (MN/m)	490.41	8.97
	R_{RDC} (MN/m)		860.63
R+13	b (m)	0.6	1
	h (m)	0.6	0.2
	H (m)	3	3
	A_s (cm ²)	12.57	11.31
	I (m ⁴)	0.012	0.00078
	R_i (MN/m)	42.82	2.80
	R_n (MN/m)	685.06	11.22
	R_{RDC} (MN/m)		1099.27
R+17	b (m)	0.65	1.3
	h (m)	0.65	0.2
	H (m)	3	3
	A_s (cm ²)	15.71	14.70
	I (m ⁴)	0.0166	0.00102
	R_i (MN/m)	59.35	3.64
	R_n (MN/m)	949.62	14.58
	R_{RDC} (MN/m)		1687.74
R+20	b (m)	0.7	1.5
	h (m)	0.7	0.2
	H (m)	3	3
	A_s (cm ²)	15.71	16.96
	I (m ⁴)	0.022	0.0012
	R_i (MN/m)	78.68	4.21
	R_n (MN/m)	1258.93	16.83
	R_{RDC} (MN/m)		2332.79

Tab. 4.12 : Estimation de la rigidité des différents cas étudiés pour 225 m², C.P

b. Surface 225 m², niveau de performance L.S

Bâtiments testés	Sections	Poteau	Voile
R+10	b (m)	0.6	0.9
	h (m)	0.6	0.2
	H (m)	3	3
	A_s (cm ²)	10.05	13.85
	I (m ⁴)	0.0117	0.00074
	R_i (MN/m)	41.97	2.66
	R_n (MN/m)	671.53	10.64
	R_{RDC} (MN/m)		1158.79
R+13	b (m)	0.65	1.2
	h (m)	0.65	0.2
	H (m)	3	3
	A_s (cm ²)	12.06	16.93
	I (m ⁴)	0.0162	0.00097
	R_i (MN/m)	57.91	3.49
	R_n (MN/m)	926.61	13.96
	R_{RDC} (MN/m)		1468.98
R+17	b (m)	0.7	1.4
	h (m)	0.7	0.2
	H (m)	3	3
	A_s (cm ²)	15.71	21.55
	I (m ⁴)	0.022	0.001158
	R_i (MN/m)	78.68	4.14
	R_n (MN/m)	1258.93	16.56
	R_{RDC} (MN/m)		2013.79
R+20	b (m)	0.75	1.6
	h (m)	0.75	0.2
	H (m)	3	3
	A_s (cm ²)	18.85	24.63
	I (m ⁴)	0.0291	0.00132
	R_i (MN/m)	104.12	4.73
	R_n (MN/m)	1656.83	18.92
	R_{RDC} (MN/m)		2691.23

Tab. 4.13 : Estimation de la rigidité des différents cas étudiés pour 225 m², L.S

c. Surface 400 m², niveau de performance C.P

Bâtiments testés	Sections	Poteau	Voile
R+10	b (m)	0.6	0.8
	h (m)	0.6	0.2
	H (m)	3	3
	A_s (cm ²)	12.06	9.05
	I (m ⁴)	0.012	0.000627
	R_i (MN/m)	42.64	2.24
	R_n (MN/m)	1006.13	8.97
	R_{RDC} (MN/m)		1405.56
R+13	b (m)	0.65	0.9
	h (m)	0.65	0.2
	H (m)	3	3
	A_s (cm ²)	12.06	10.18
	I (m ⁴)	0.0162	0.0007
	R_i (MN/m)	57.91	2.52
	R_n (MN/m)	1447.83	10.09
	R_{RDC} (MN/m)		1783.83
R+17	b (m)	0.7	1.3
	h (m)	0.7	0.2
	H (m)	3	3
	A_s (cm ²)	15.71	14.7
	I (m ⁴)	0.022	0.00102
	R_i (MN/m)	78.68	3.64
	R_n (MN/m)	1967.08	14.58
	R_{RDC} (MN/m)		2413.30
R+20	b (m)	0.75	1.5
	h (m)	0.75	0.2
	H (m)	3	3
	A_s (cm ²)	18.85	16.96
	I (m ⁴)	0.0291	0.00117
	R_i (MN/m)	104.12	4.21
	R_n (MN/m)	2602.94	16.82
	R_{RDC} (MN/m)		3115.01

Tab. 4.14 : Estimation de la rigidité des différents cas étudiés pour 400 m², C.P

d. Surface 400 m², niveau de performance L.S

Bâtiments testés	Sections	Poteau	Voile
R+10	b (m)	0.65	1
	h (m)	0.65	0.2
	H (m)	3	3
	A_s (cm ²)	14.07	15.39
	I (m ⁴)	0.0164	0.000827
	R_i (MN/m)	58.70	2.96
	R_n (MN/m)	1467.62	11.87
	R_{RDC} (MN/m)		1833.43
R+13	b (m)	0.65	1.2
	h (m)	0.65	0.2
	H (m)	3	3
	A_s (cm ²)	15.71	18.47
	I (m ⁴)	0.0166	0.00099
	R_i (MN/m)	59.35	3.55
	R_n (MN/m)	1483.77	14.19
	R_{RDC} (MN/m)		2148.95
R+17	b (m)	0.7	1.4
	h (m)	0.7	0.2
	H (m)	3	3
	A_s (cm ²)	18.85	21.55
	I (m ⁴)	0.0224	0.00116
	R_i (MN/m)	80.12	4.14
	R_n (MN/m)	2038.82	16.56
	R_{RDC} (MN/m)		2878.60
R+20	b (m)	0.75	1.5
	h (m)	0.75	0.2
	H (m)	3	3
	A_s (cm ²)	21.99	30.16
	I (m ⁴)	0.0296	0.00131
	R_i (MN/m)	105.76	4.70
	R_n (MN/m)	2644.11	18.79
	R_{RDC} (MN/m)		3720.70

Tab. 4.15 : Estimation de la rigidité des différents cas étudiés pour 400 m², L.S

IV.7.1. Variation de la rigidité pour les poteaux et les voiles

Sur la base des différentes rigidités estimées ci-dessus, une représentation graphique de la variation de cette rigidité pour les poteaux et les voiles est donnée comme suit :

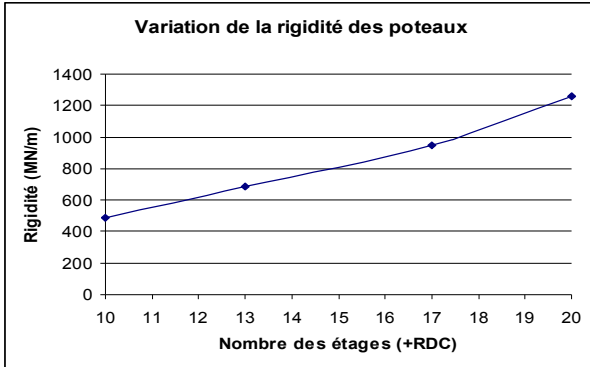


Fig. 4.56 : variation de la rigidité des poteaux pour 225m², CP

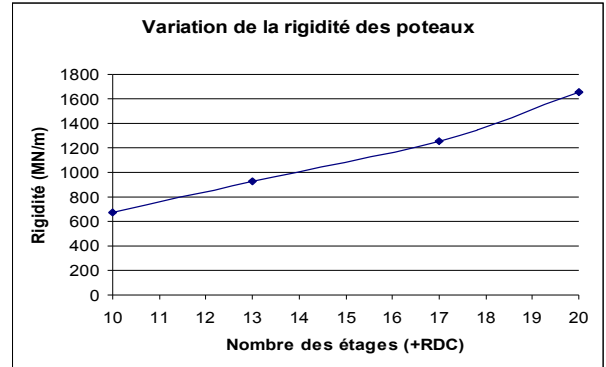


Fig. 4.57 : variation de la rigidité des poteaux pour 225m², LS

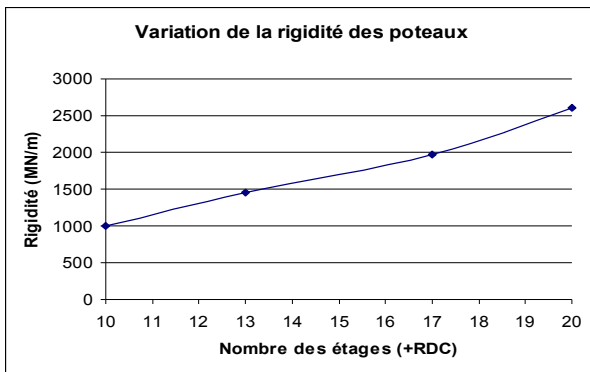


Fig. 4.58 : variation de la rigidité des poteaux pour 400m², CP

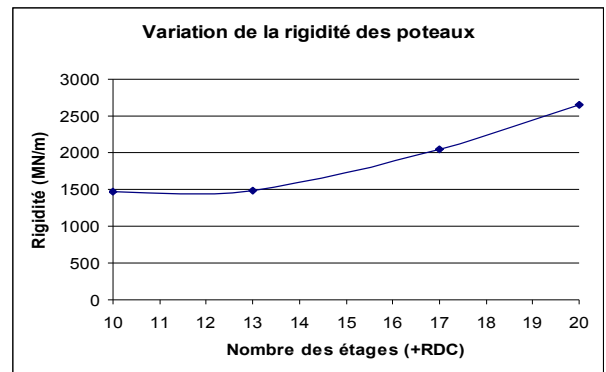


Fig. 4.59 : variation de la rigidité des poteaux pour 400m², LS

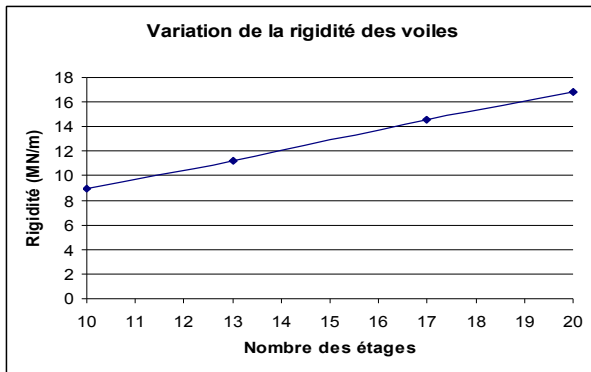


Fig. 4.60 : variation de la rigidité des voiles pour 225m², CP

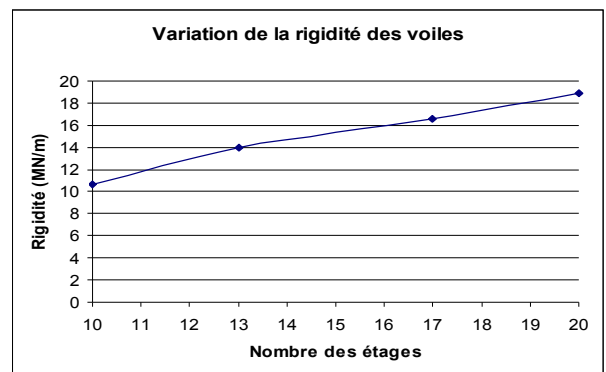


Fig. 4.61 : variation de la rigidité des voiles pour 225m², LS

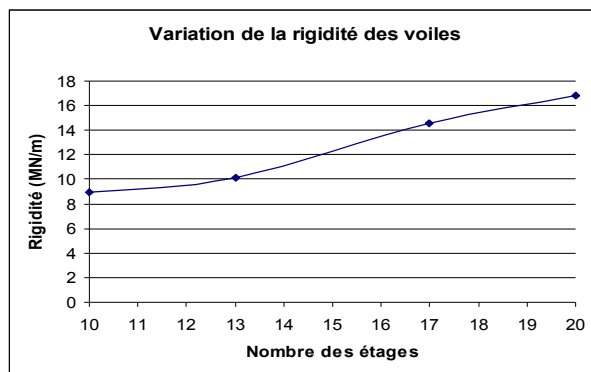


Fig. 4.62 : variation de la rigidité des voiles pour 400m², CP

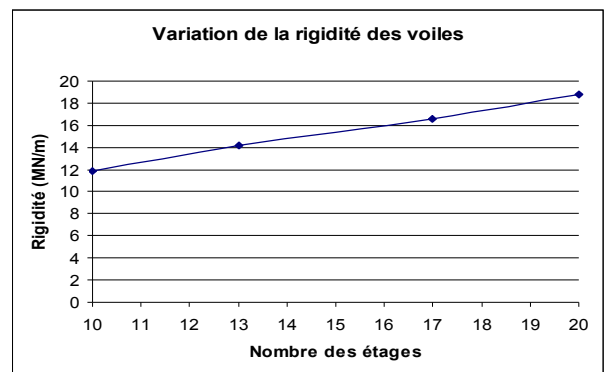


Fig. 4.63 : variation de la rigidité des voiles pour 400m², LS

IV.7.2. Variation de la rigidité pour l'étage RDC

La variation de la rigidité relative à l'étage RDC est représentée comme suit :

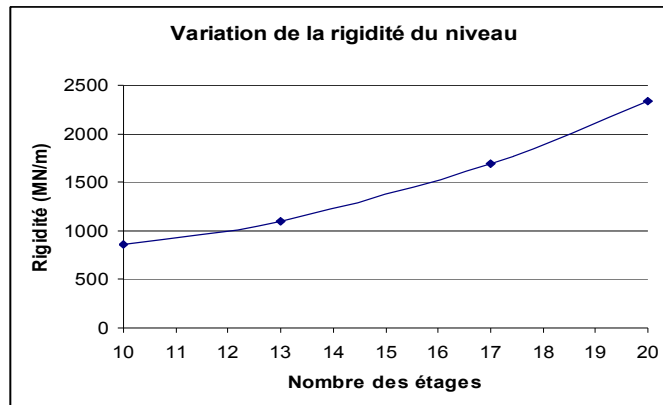


Fig. 4.64 : Variation de la rigidité du RDC pour 225m², CP

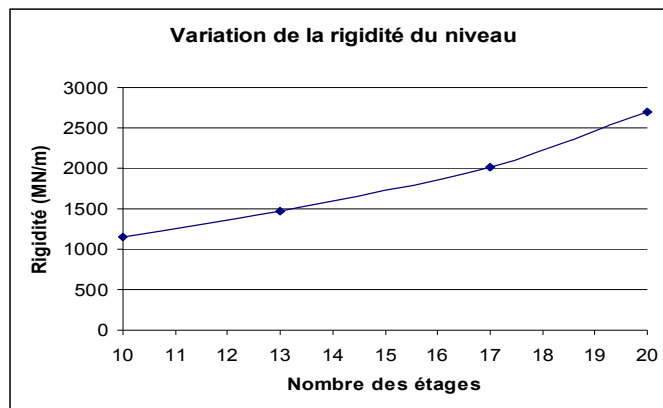


Fig. 4.65 : Variation de la rigidité du RDC pour 225m², LS

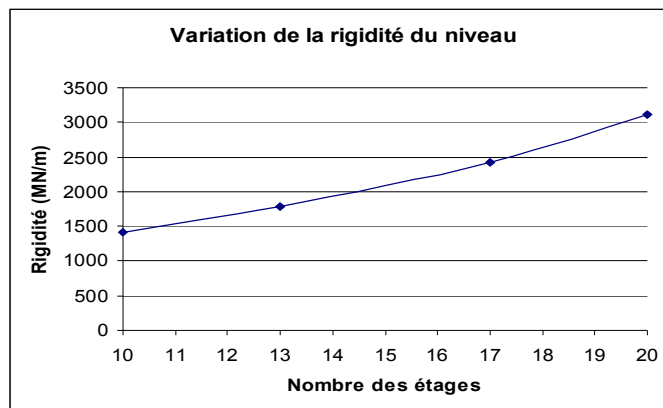


Fig. 4.66 : Variation de la rigidité du RDC pour 400m², CP

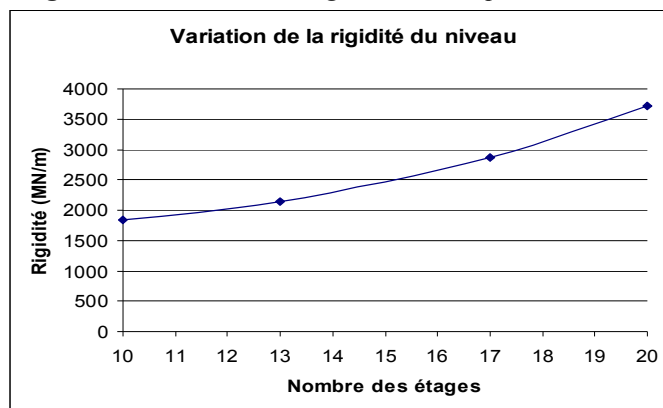


Fig. 4.67 : Variation de la rigidité du RDC pour 400m², LS

IV.8. Etude comparative

Une comparaison entre les différents résultats correspondant aux deux niveaux de performance ainsi que les deux surfaces de plancher est représentée par les figures suivantes :

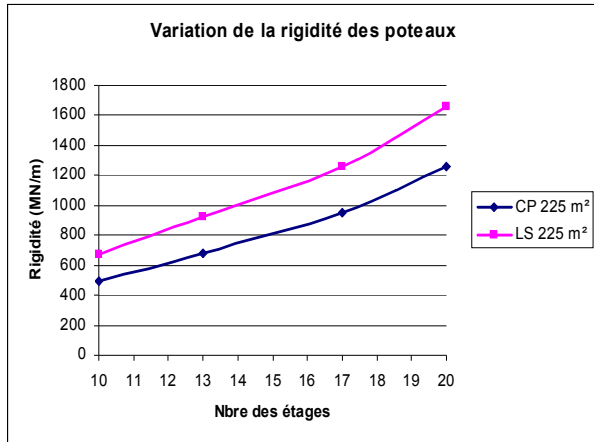


Fig. 4.68 : Variation de la rigidité des poteaux de 225 m² pour CP et LS

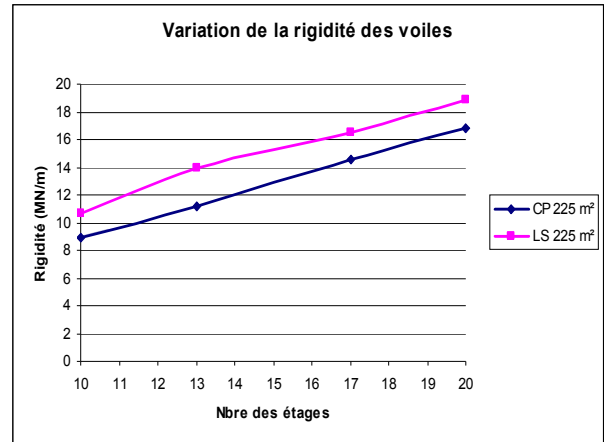


Fig. 4.69 : Variation de la rigidité des voiles de 225 m² pour CP et LS

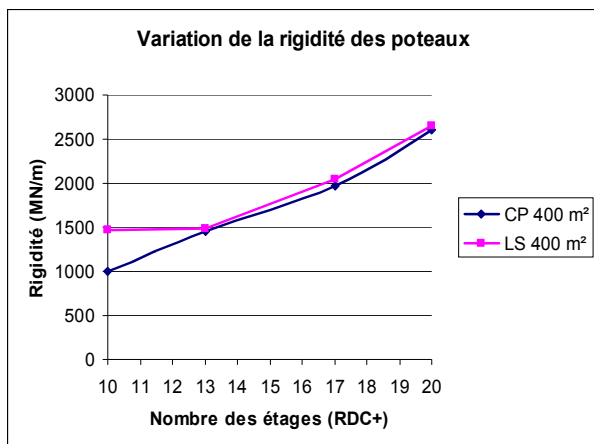


Fig. 4.70 : Variation de la rigidité des poteaux de 400 m² pour CP et LS

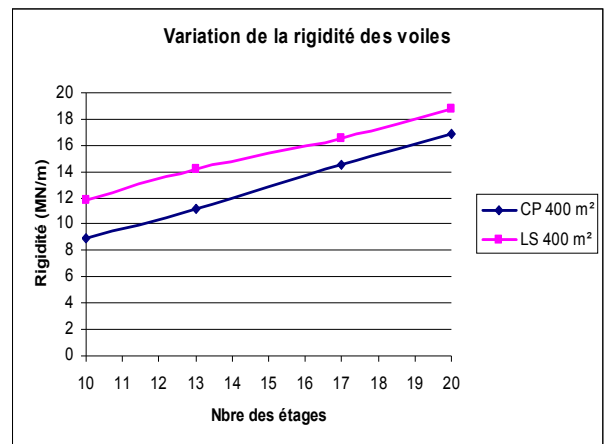


Fig. 4.71 : Variation de la rigidité des voiles de 400 m² pour CP et LS

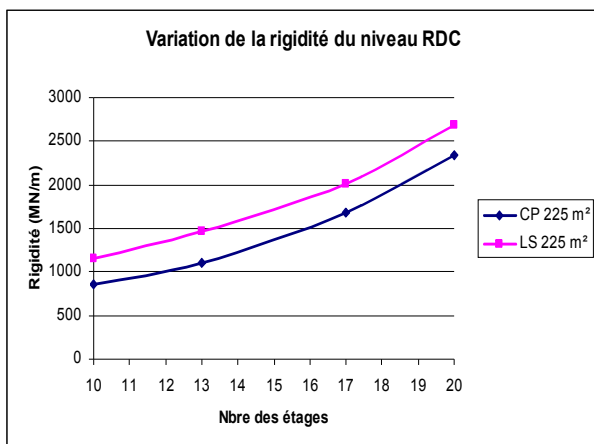


Fig. 4.72 : Variation de la rigidité du RDC de 225 m² pour CP et LS

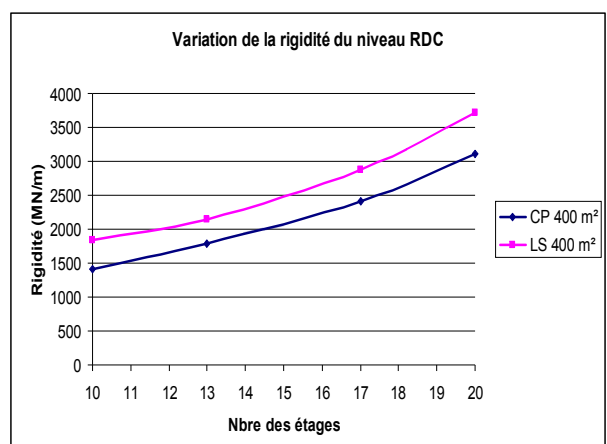


Fig. 4.73 : Variation de la rigidité du RDC de 400 m² pour CP et LS

IV.8.1. Commentaires

Les figures ci-dessus montrent la variation de la rigidité pour les éléments de l'étage RDC : les poteaux, les voiles et l'ensemble de l'étage RDC pour les différents cas étudiés. Nous avons considéré dans nos calculs deux surfaces de plancher (225 m² et 400 m²) et deux niveaux de performance (C.P et L.S). Les figures (de (Fig. 4.56) à (Fig. 4.59)) illustrent la variation de cette rigidité pour les éléments poteaux pour les différents cas étudiés. Ensuite, les figures (de (Fig. 4.60) à (Fig. 4.63)) montrent la variation de cette rigidité pour les éléments voiles. Les rigidités relatives au niveau RDC sont représentées par les figures (de (Fig. 4.64) à (Fig. 4.67)). Notre travail s'est poursuivi par une comparaison entre les résultats obtenus pour les deux niveaux de performance (de (Fig. 4.68) à (Fig.4.73)).

Nous remarquons que la rigidité des poteaux dans le cas de 400 m² prend des valeurs semblables pour les deux niveaux de performance, ce qui témoigne le rôle des dimensions des voiles dans la réponse de la structure ainsi que celui des poutres.

Une superposition de l'ensemble des résultats obtenus est illustrée comme suit :

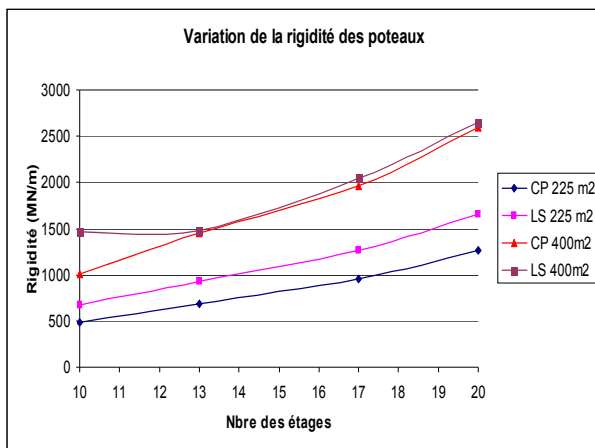


Fig. 4.74 : Variation de la rigidité des poteaux

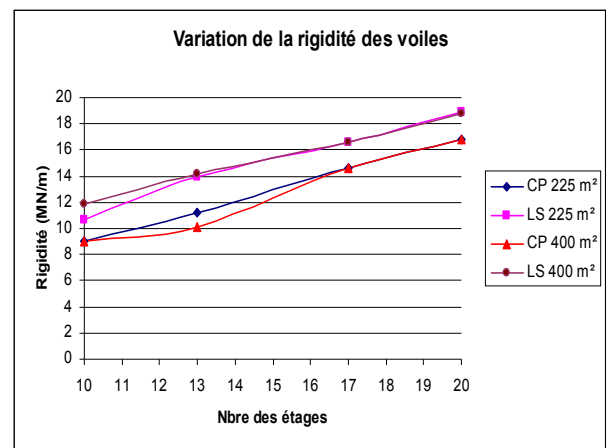


Fig. 4.75 : Variation de la rigidité des voiles

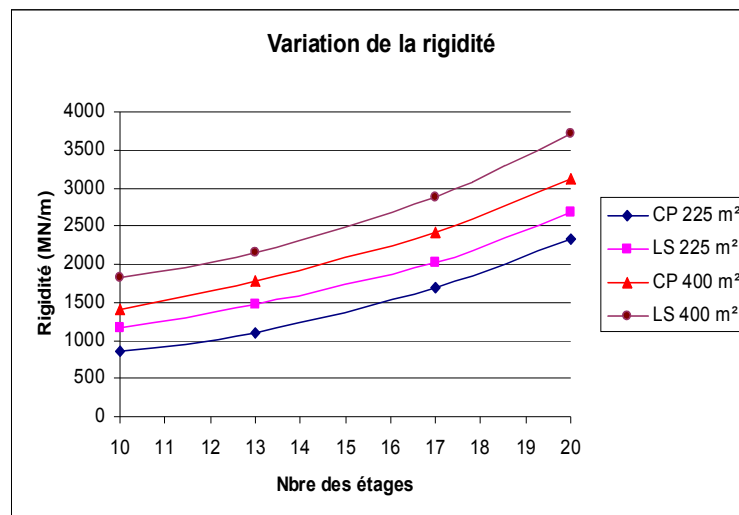


Fig. 4.76 : Variation de la rigidité du RDC

IV.8.2. Exploitation des résultats

À partir des résultats obtenus, deux conclusions principales peuvent être déduites comme suit :

a. Rapport de rigidité entre les deux niveaux de performance C.P et L.S

Les résultats obtenus nous ont montré que le passage d'un niveau de performance "C.P" à un niveau de performance "L.S" nécessite une augmentation de **24 %** en moyenne dans la rigidité.

b. L'élaboration d'un abaque de prédimensionnement

En effet, les résultats issus de notre travail pourront servir comme une base de données pour l'élaboration d'un abaque de prédimensionnement spécialement développé pour cet usage et qui se conforme à la dialectique des méthodes en performance.

Cet abaque est élaboré comme suit :

On prend l'exemple des rigidités calculées pour le niveau de performance C.P

Le tableau suivant récapitule les résultats obtenus :

Surface limite	Nbre d'étages	Rigidité voiles	Rigidité poteaux	Rigidité RDC
225 m ²	R+10	8.97	490.41	860.63
	R+13	11.22	685.06	1099.27
	R+17	14.58	949.62	1687.74
	R+20	16.83	1258.93	2332.79
400 m ²	R+10	8.97	1006.13	1405.56
	R+13	10.09	1447.83	1783.83
	R+17	14.58	1967.08	2413.30
	R+20	16.82	2602.94	3115.01

Tab. 4.16 : Rigidités déterminées pour le niveau de performance C.P

Comme on peut le remarquer, les différentes rigidités des voiles sont comparables pour les deux types de bâtiments (225 m² et 400 m²) et elles varient en fonction du nombre d'étages. Cela est justifié par le choix des voiles élancés pour notre application. Un abaque de prédimensionnement allégé sera basé sur les points suivants :

- une rigidité des voiles en fonction du nombre d'étages déduite de l'abaque suivant (Fig. 4.77) :

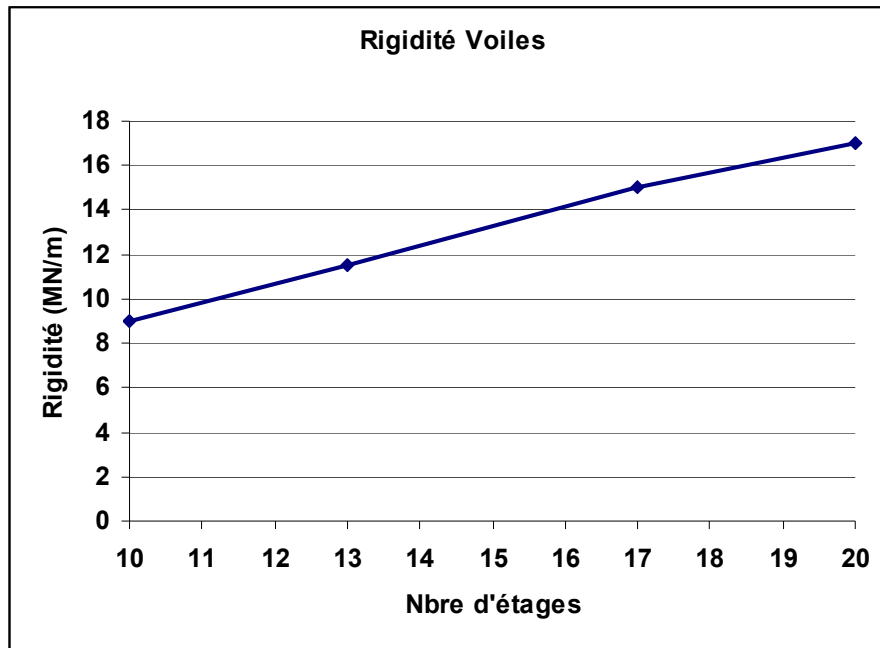


Fig. 4. 77 : Rigidité des voiles en fonction du nombre d'étages pour le niveau de performance P.C

- une rigidité des poteaux déduite de l'abaque suivant (Fig. 4.78) :

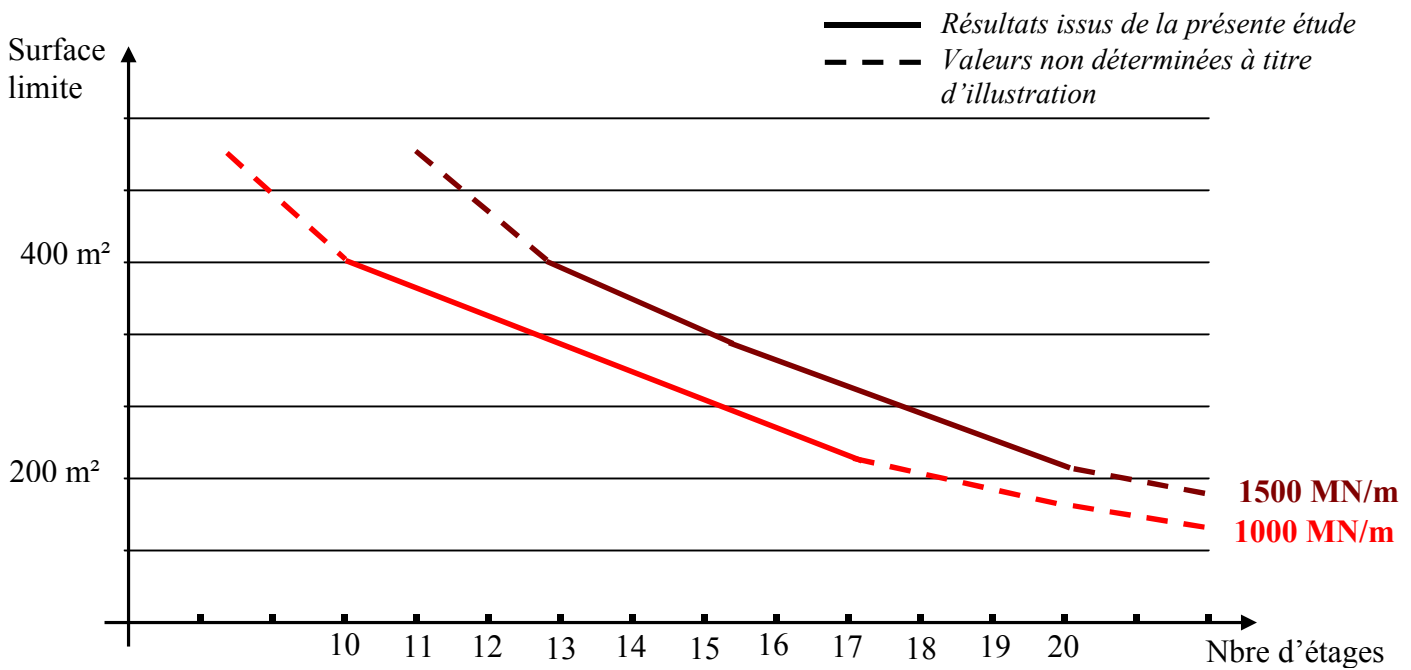


Fig. 4. 78 : Exemple d'un abaque de prédimensionnement des poteaux en fonction de la rigidité déterminée pour différentes surfaces de plancher, nombre d'étages, le niveau de performance C.P et le mouvement sismique d'El-Centro à 5% d'amortissement

- une rigidité totale déduite de l'abaque suivant (Fig. 4.79) :

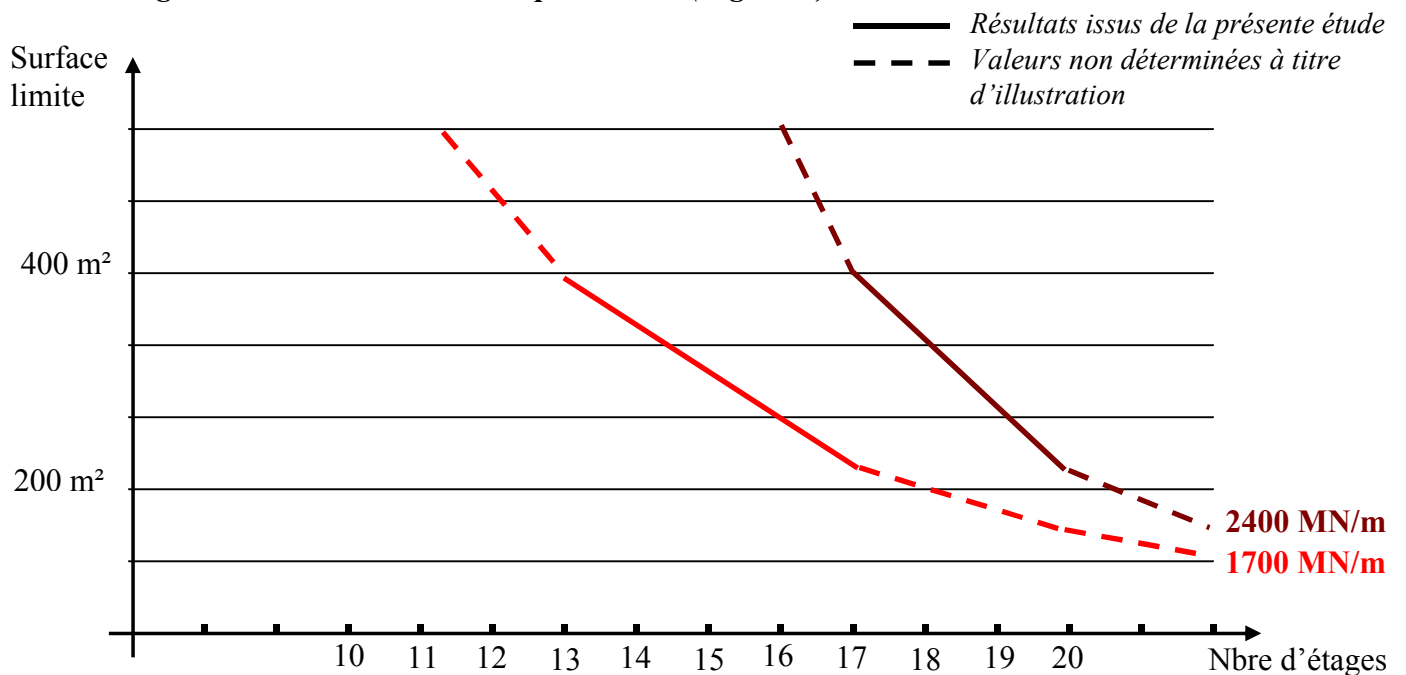


Fig. 4.79 : Exemple d'un abaque de prédimensionnement d'étage RDC en fonction de la rigidité déterminée pour différentes surfaces de plancher, nombre d'étages, le niveau de performance C.P et le mouvement sismique d'El-Centro à 5% d'amortissement

IV.8.3. Exemples de validation des résultats

Pour vérifier la fiabilité des résultats obtenus, nous présenterons dans la suite, deux exemples qui nous permettront d'utiliser ces deux principaux résultats. Le premier exemple consiste à effectuer un dimensionnement d'un bâtiment à partir des données générales précédentes. Le deuxième fera l'objet de la vérification du rapport déterminé pour le passage d'un niveau de performance "C.P" au niveau "L.S".

IV.8.3.1. Exemple 01

Dans cet exemple, une application de prédimensionnement d'un bâtiment selon la procédure présentée ci-dessus sera effectuée dans le but de valider les résultats obtenus.

Le bâtiment choisi est défini par les données suivantes :

- surface de plancher de 300 m²
- nombre d'étages R+15
- niveau de performance C.P
- mouvement sismique d'El-Centro (Fig. 4.5)

L'utilisation de l'abaque de prédimensionnement (Fig. 4.77 Fig. 4.78 et Fig. 4.79) se fait comme suit :

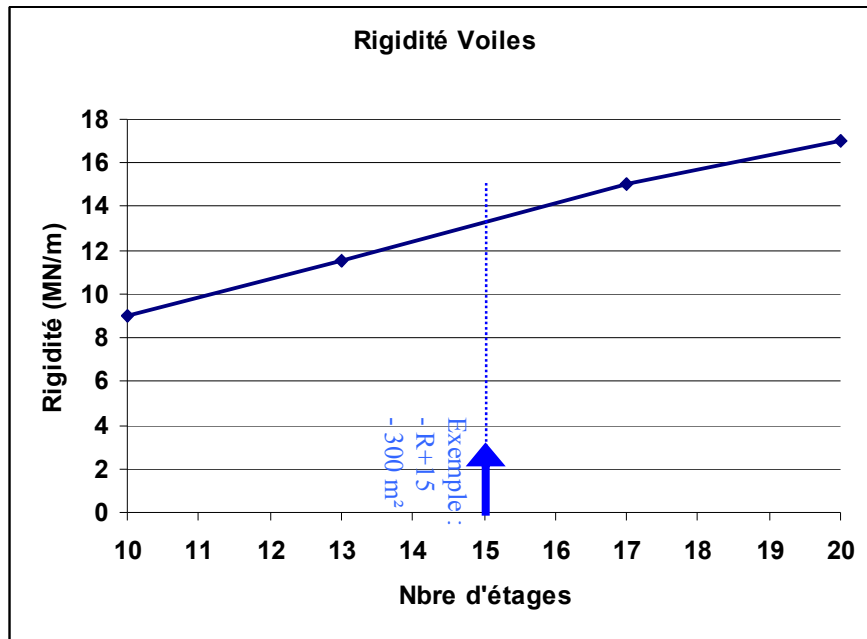


Fig. 4. 80 : Détermination de rigidité des voiles en fonction du nombre d'étages pour le niveau de performance C.P

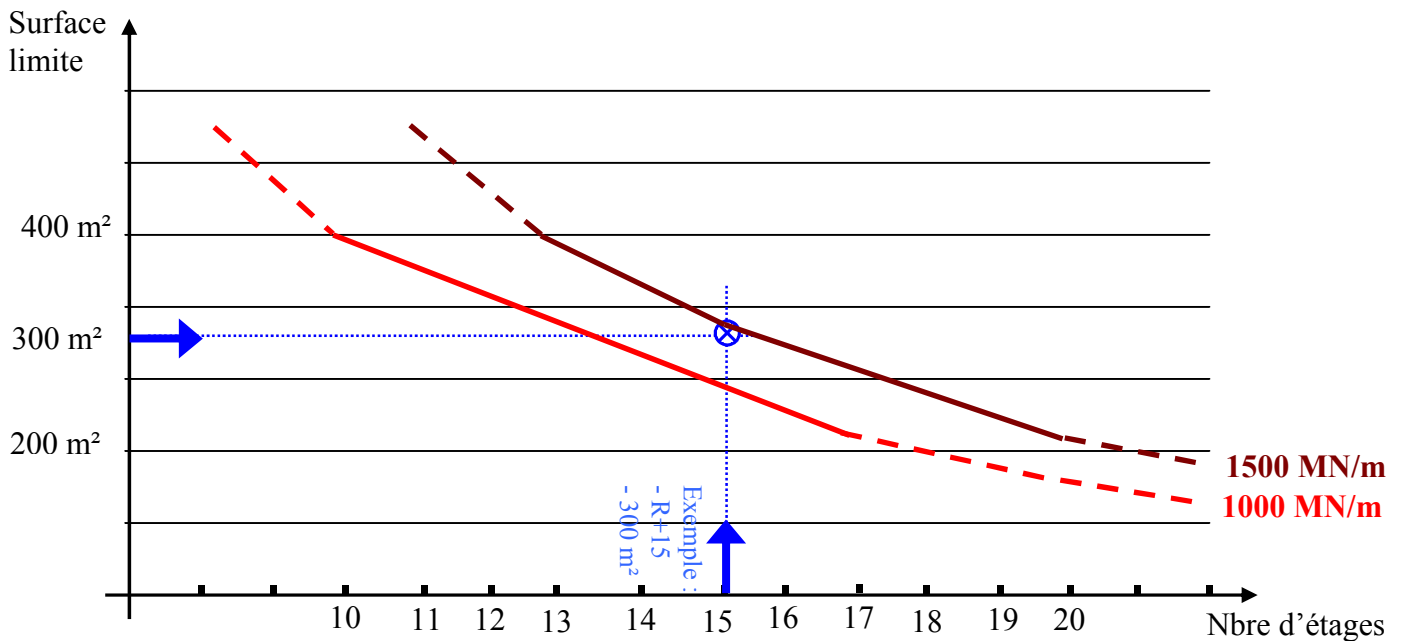


Fig. 4. 81 : Détermination de la rigidité des poteaux en fonction de la surface de plancher, nombre d'étages, le niveau de performance C.P et le mouvement sismique d'El-Centro à 5% d'amortissement

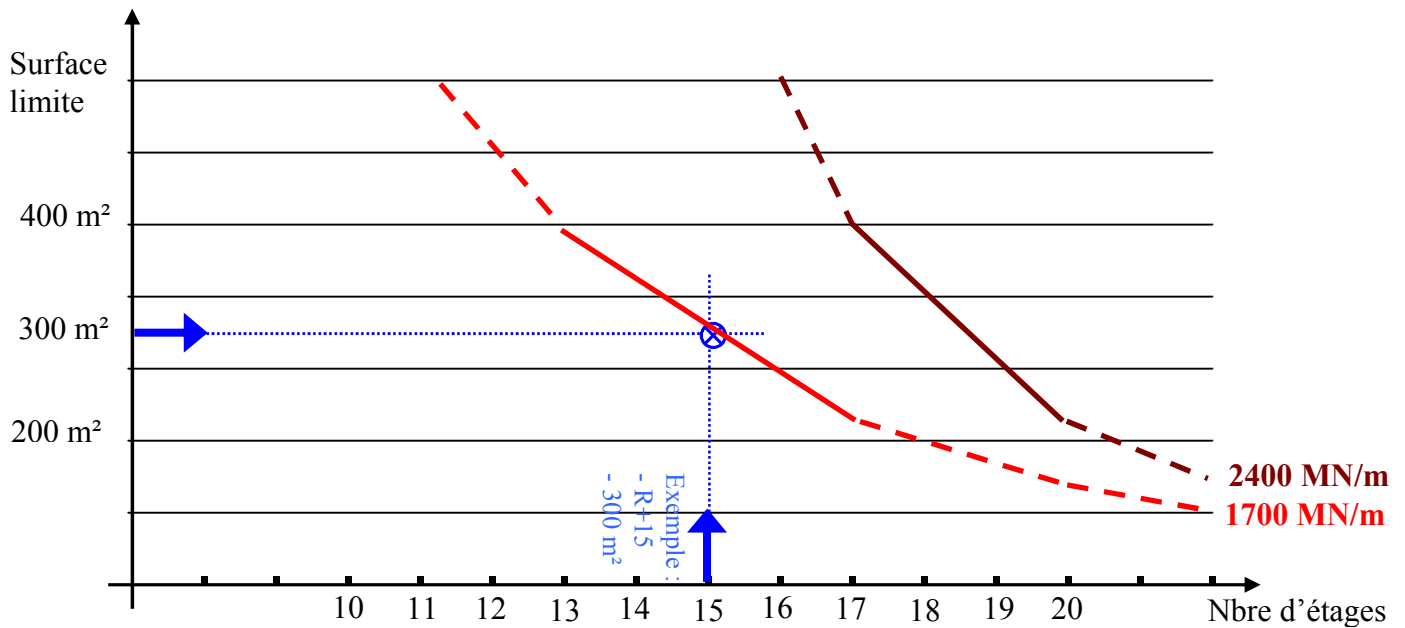


Fig. 4. 82 : Détermination de la rigidité totale du niveau RDC en fonction de la surface de plancher, nombre d'étages, le niveau de performance C.P et le mouvement sismique d'El-Centro à 5% d'amortissement

À partir de ces abaques on peut déduire la rigidité des voiles ainsi que la rigidité des poteaux et la rigidité totale de l'étage RDC. Les valeurs obtenues sont comme suit :

- Rigidité des voiles qui vaut **13.1 MN/m**
- Rigidité des poteaux qui vaut **1500 MN/m**
- Rigidité totale qui vaut **1700 MN/m**

On rappelle que ces rigidités correspondent à une seule direction de calcul et pour le niveau RDC.

La rigidité des voiles s'obtient en disposant par exemple dans les quatre coins du bâtiment et pour les deux directions, des voiles d'une épaisseur de 20 cm et de longueur de 1.2 m avec un ferrailage de 11.31 cm² (10T12) par face.

Pour les poteaux, cette rigidité s'obtient en disposant des poteaux d'une section de 65cm x 65cm avec un ferrailage de 18.85 cm² (6T20) par face.

La rigidité totale s'obtient par l'utilisation des poutres de section 30cm x 45cm, de ferrailage de 15.14 cm² (6T16 + 2T14) et d'une portée de 4.33 m dans les deux directions.

IV.8.3.1.1. Analyse Pushover du bâtiment

Les mêmes démarches de calcul qui précèdent l'analyse Pushover sont appliquées pour le cas de ce bâtiment. Les résultats obtenus sont comme suit :

La courbe Pushover obtenue est représentée sur la figure suivante (Fig. 4.83) :

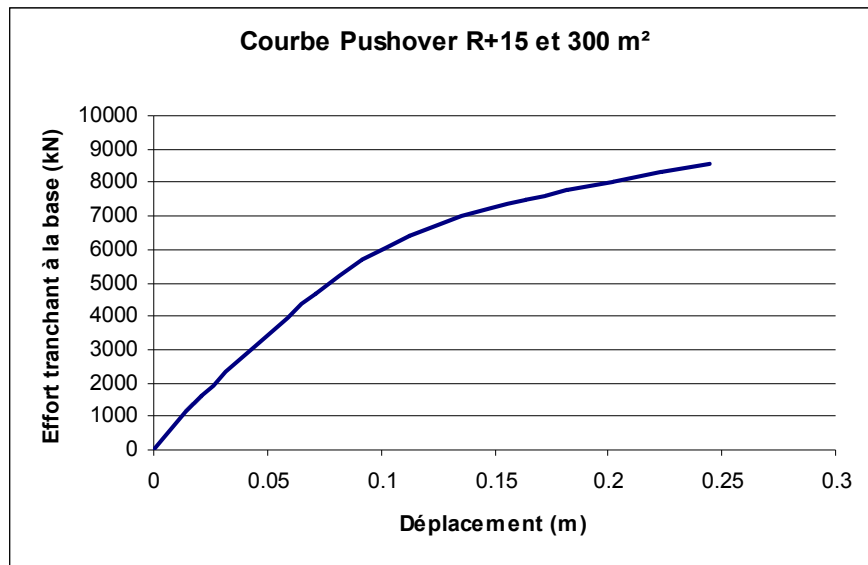


Fig. 4.83 : Courbe Pushover du bâtiment

Le point de performance est déterminé comme suit (Fig. 4.84) :

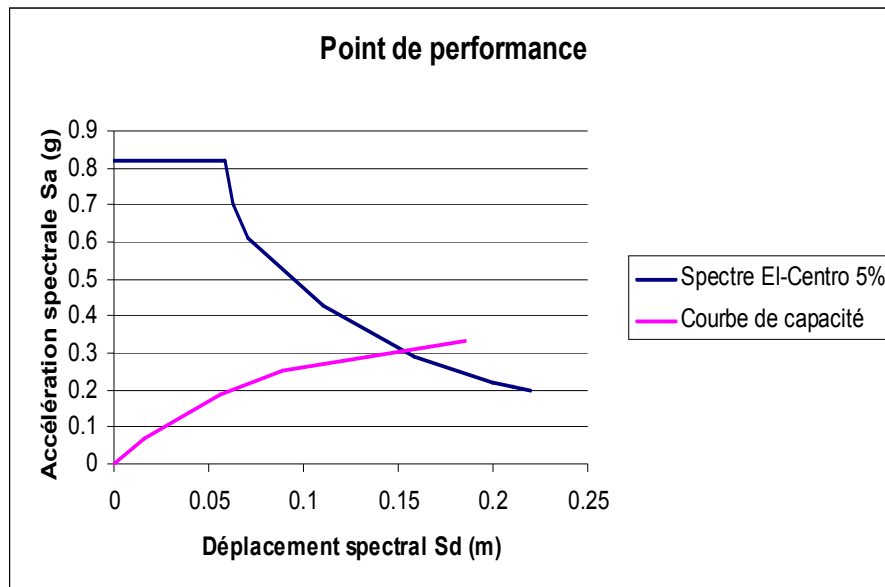


Fig. 4.84 : Détermination du point de performance

IV.8.3.1.2. Détermination du point de performance selon FEMA 356

Les étapes de détermination du point de performance selon FEMA 356 sont comme suit :

- Détermination des rigidités initiale K_i , effective K_e et de la période fondamentale T_e

L'application des ajustements de la FEMA 356 [26], nous mène à avoir une idéalisation de cette courbe Pushover en une courbe bilinéaire comme il est montré sur la figure suivante :

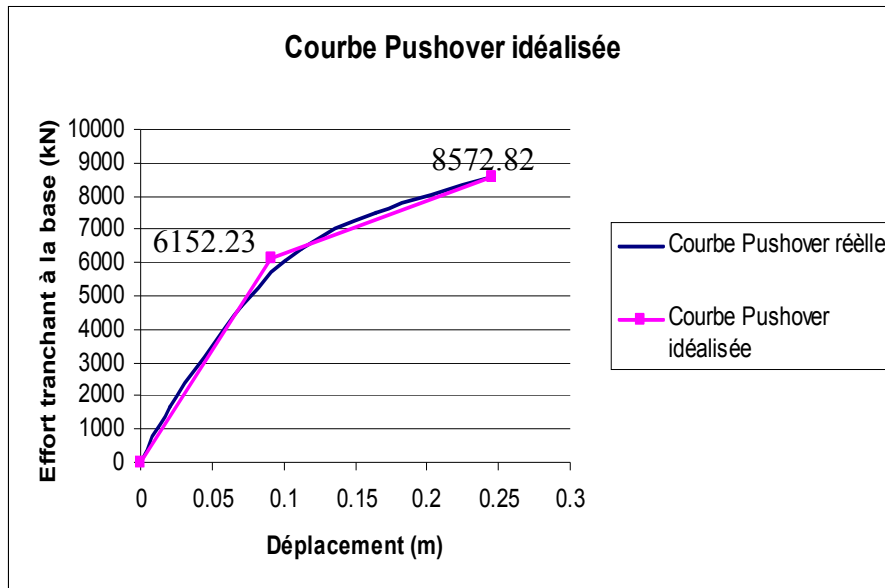


Fig. 4.85 : Idéalisations de la courbe Pushover

$$K_i = 1144.29/0.017 = 70600.75 \text{ kN/m}$$

La valeur de la limite élastique V_y est estimée à 6152.23 KN

$$\rightarrow 0.6 V_y = 3691.34 \text{ KN}$$

Le déplacement correspondant à cet effort est de 5.6 cm.

La raideur effective qui lui correspond est donc :

$$K_e = \frac{3691.34}{5.6 * 10^{-2}} = 65916.75 \text{ KN/m}$$

$$\text{D'où, } T_e = T_i \sqrt{\frac{K_i}{K_e}} = 1.01 \text{ s}$$

▪ **Calcul des coefficients FEMA 356**

- ✓ **Coefficient C_0** : pour plus de 10 étages $C_0 = 1.5$
- ✓ **Coefficient C_1** : $T_e = 1.01 \text{ s} > T_s = 0.5 \text{ s}$ (Période caractéristique spécifique au site, pour un site meuble), donc, $C_1 = 1$
- ✓ **Coefficient C_2** : $C_2 = 1.2$
- ✓ **Coefficient C_3** : $C_3 = 1$
- ✓ **Calcul du déplacement cible δ_t**

L'accélération spectrale à $T_e = 1.01 \text{ s}$ vaut $S_a = 0.39g$. Il vient que le déplacement cible correspond à ce niveau de performance vaut : $\delta_t = C_0 C_1 C_2 C_3 S_a \omega_e^2 = 17.98 \text{ cm}$

Les coordonnées du point de performance sont données comme suit :

$$(S_a (m/s^2), S_d (m)) = (0.31 g, 0.159) \rightarrow (V (kN), D (m)) = (7856.23, 0.186)$$

Donc, les deux valeurs du déplacement cible sont proches (17.98 cm et 18.6 cm), ce qui nous montre la fiabilité de cette procédure à dimensionner la structure par rapport à un niveau de performance précis sans passer par toutes les étapes de calcul non-linéaire.

IV.8.3.2. Exemple 02

Dans le même contexte de validation des résultats, une augmentation de 24% de la rigidité déjà déterminée pour le niveau de performance "C.P" sera effectuée pour ce bâtiment et cela dans le but de vérifier la précision de ce rapport pour passer au niveau de performance L.S.

La rigidité correspondant au niveau de performance "C.P" est de **1700 MN/m**

Une augmentation de 24 % nous donne une valeur de **2040 MN/m**

Cette rigidité s'obtient par disposition des sections suivantes :

- des poteaux de 70cm x 70cm et d'un ferrailage de 18.85 cm² (6T20) par face
- des voiles de 1.4 m et d'un ferrailage de 14.7 cm² (13T12) par face
- des poutres de section de 30cm x 45cm et d'un ferrailage de 12.06 cm² (6T16)

IV.8.3.2.1. Analyse Pushover du bâtiment

Les mêmes démarches de calcul qui précèdent l'analyse Pushover sont appliquées pour le cas de ce bâtiment. Les résultats obtenus sont comme suit :

La courbe Pushover obtenue est représentée sur la figure suivante (Fig. 4.86) :

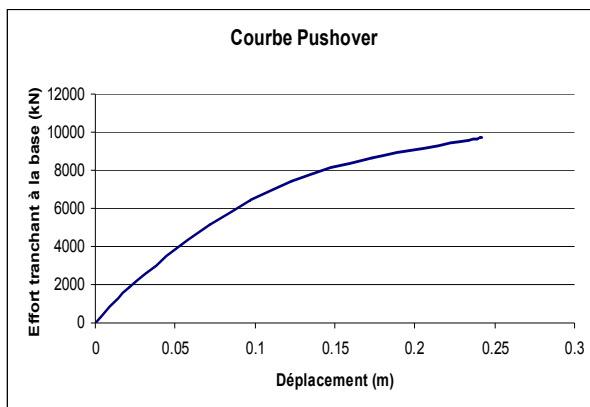


Fig. 4.86 : Courbe Pushover du bâtiment

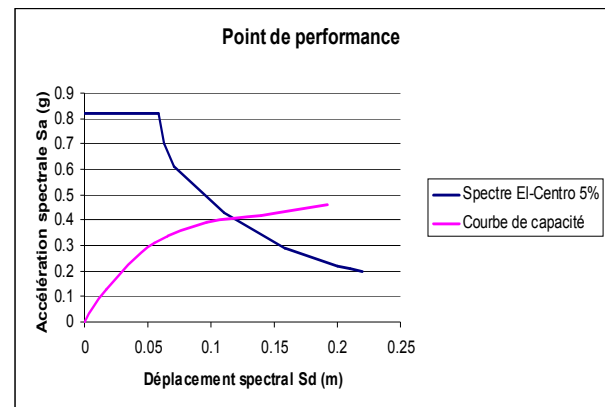


Fig. 4.87 : Détermination du point de performance

Les mêmes démarches de calcul du déplacement cible nous donne une valeur de 13.2cm. Une valeur qui correspond au niveau de performance L.S (Fig. 4.87).

IV.9. Conclusion

L'objectif de cette partie est d'estimer les différentes rigidités relatives aux différents bâtiments caractérisés par des surfaces de plancher et le nombre d'étages. Cette estimation était effectuée pour deux niveaux de performance dans le but d'évaluer le rapport nécessaire en terme de rigidité pour le passage d'un niveau à un autre. De même, une construction d'un abaque de prédimensionnement à partir de ces rigidités a été présentée, ce qui constitue un grand allègement dans l'opération de prédimensionnement pour les ingénieurs. Deux exemples de validation ont été présentés et qui ont montré le grand intérêt apporté par ces résultats. Le premier exemple a fait l'objet d'un dimensionnement d'un bâtiment sur la base de l'abaque déjà construit. Ensuite, une augmentation de la rigidité de ce bâtiment par 24%, ce qui représente le rapport déterminé en terme de rigidité pour passer d'un niveau de performance C.P au niveau de performance L.S, a été effectuée. Les résultats obtenus ont été conformes aux conclusions déduites de cette étude.

CONCLUSION

GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Le but principal du présent travail est l'estimation des différentes rigidités correspondant aux différents types de bâtiments. Ces bâtiments sont définis par des données générales à savoir : leurs surfaces de plancher et le nombre d'étages. L'évaluation de ces rigidités est effectuée conformément à une nouvelle dialectique en ingénierie parasismique à savoir les méthodes en performance.

Une généralisation de cette application pour d'autres niveaux de performance, autres mouvements sismiques ainsi que d'autres types de bâtiments permet d'obtenir des différentes courbes indicatives de la rigidité requises pour chaque cas, autrement dit, savoir au préalable, où se situer pour offrir à ce type de bâtiment un niveau de performance déterminé sous l'effet d'un mouvement sismique précis, ce qui apporte un grand allègement dans les opérations de prédimensionnement.

L'intérêt principal d'une telle procédure est de donner plus d'envergure à l'application des règles parasismiques aux constructions par la mise en main des ingénieurs, qui ne disposent pas forcément d'une connaissance approfondie dans le calcul non-linéaire des structures, des outils de calcul simplifiés conformes à la nouvelle dialectique de l'ingénierie parasismique pour leurs travaux de prédimensionnement. Il leur est possible de déterminer rapidement la rigidité requise afin que la structure réponde aux règlements. Egalement, l'utilisation de cet abaque s'étend au champ de la vulnérabilité des structures, du fait qu'il serait possible de vérifier la vulnérabilité d'une structure existante en comparant la rigidité de ses éléments avec celle donnée par l'abaque.

Toutefois, pour une utilisation minutieuse et plus généralisée d'un tel abaque de prédimensionnement, d'autres paramètres devraient être introduits comme : la zone sismique et la classe de sol, ceci pourra être fait par exemple par des facteurs de correction qui devront être déterminés.

Finalement, ce travail représente l'idée de base de ce qui est connu maintenant par le RPP light (Rapport de Prédimensionnement Parasismique) destinés aux bâtiments standards, et qui pourra être introduit au niveau des règlements parasismiques afin d'avoir un allègement de la procédure de vérification de ce type des bâtiments. Dans ce contexte, la notion des bâtiments standards doit faire l'objet d'une définition rigoureuse mettant en clair les conditions techniques nécessaires pour cette classification telles que : la classe de l'ouvrage, la hauteur des étages, la régularité en plan et en élévation, ...etc.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] : **D. Gay & J. Gambien.** *Dimensionnement des structures : une introduction*, HERMES Science Publications, Paris, 1999
- [2] : **J. Fauchart.** *Initiation au calcul des structures – Béton et acier -*, Editions EYROLLES, Paris V^e, 1975
- [3] : **A. Pecker.** *Dynamique des structures et des ouvrages*, ENPC, 2008
- [4] : *Méthodes numériques en mécanique des structures : Cours de Magister*, ENTP
- [5] : **H. Thonier.** *Conception et calcul des bâtiments*, Presse de l'E.N.P.C, 2001
- [6] : **BAEL 91.** *Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états limites*, Editions EYROLLES, Juillet 1992
- [7] : **AFPS, 2006.** *Méthodes en déplacements : Principe - Codification – Application*, Cahier technique AFPS N° 26, Avril 2006
- [8]: **FEMA 356.** *Federal Emergency Management Agency; Washington, D.C*
- [9]: **H. Krawinkler & G. Seneviratna .** *Pros and cons of a pushover analysis of seismic performance evaluation ; Engineering structures, Vol. 20. Nos 4-6, pp 452-464, 1998*
- [10]: **A. M. Mwafy & A. S. Elnashai.** *Static Pushover versus Dynamic analysis of R/C Buildings; Engineering Structures, Vol. 23. 407-424, 2001*
- [11]: **P. Fajfar & M. Fichinger.** *Nonlinear Sismic analysis of R/C Buildings; Implication of a case study, European earthquake Engineering. 31-43, 1987*
- [12]: **M. O. Eberhard & M. A. Sozen.** *Behavior Based Method to Determine Design Shear in Earthquake Resistant Walls; Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, New York, Vol. 119. No. 2, 619-640, 1993*
- [13]: **F. Sasaki & S. Freeman & T. Paret.** *Multi-Mode Pushover Procedure (MMP)-A Method to Identify the Effect of Higher Modes in a Pushover Analysis; Proc. 6th U.S. National Conference on Earthquake Engineering, Seattle, 1998*
- [14]: **Applied Technology Council, ATC-40.** *Seismic Evaluation and Retrofit of Concrete Buildings ; Volume 1-2, Redwood City, California, 1996*
- [15]: **A. S. Moghadam.** *A Pushover Procedure for Tall Buildings, 12th European Conference on Earthquake Engineering, Paper Reference 395*
- [16]: **A. K. Chopra & R. K. Goel.** *A Modal Pushover Analysis Procedure to Estimating Seismic demands for buildings: Theory and Preliminary Evaluation ; PERR Report 2001/03, Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley*

- [17]: **E. Spacone & R. Martino & G. Kingsley.** *A Nonlinear Pushover Analysis of Reinforced Concrete Structures* ; Colorado Advanced Software Institute
- [18]: **Q. Xue & C-W Wu.** *Preliminary detailing for displacement-based seismic design of buildings* ; *Engineering Structures* 28 (2006) 431-440
- [19] : **ST-09 Advanced Earthquake Engineering.** *Analyse Non-linéaire Statique, Méthode du spectre de capacité, EPFL, 2005*
- [20] : **D. Combuscure.** *Modélisation des structures de génie civil sous chargement sismique à l'aide de Castem 2000, Rapport DM2S/SEMT/EMSI/RT/01-008/A, 2001*
- [21] : **E. Saez.** *Conception des bâtiments basés sur la notion de performance; Ecole Centrale de Paris, Mars 2006*
- [22] : **A. Dazio.** *Capacité portante des structures en béton ; ETH Zürich*
- [23]: **G. E. Penelis & A. J. Kappos.** *Earthquake-resistant Concrete Structures, 1997*
- [24]: **Applied Technology Council, ATC-40.** *Seismic Evaluation and Retrofit of Concrete Buildings* ; Chapitre 8. pages 8-1 à 8-65, California, 1996
- [25]: **O. Sermin.** *Evaluation of Pushover Analysis procedures for Frame Structures; Middle East Technical University, April 2005*
- [26]: **A. K. CHOPRA.** *Dynamics of Structures – Theory and Applications To Earthquake Engineering – Second Edition. Prentice Hall 2001*
- [27] : **Y. Belmouden.** *Analyse spectrale non itérative des oscillateurs simples sous l'action des tremblements des terres ; Bulletin de l'institut scientifique, Rabat, section sciences de la Terre, 2004, n° 26, 1-10*
- [28] : **F. Frey & B. Rebora.** *Analyse non-linéaire des structures, EPFL 2007*
- [29]: **A. Habibullah & S. Pyle.** *Practical three dimensional nonlinear static Pushover analysis ; Structure magazine, winter 1998*
- [30]: **P. A. Nazé.** *Contribution à la prédiction du dommage des structures en béton armé sous sollicitations sismiques; Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2004*
- [31] : **X. K. Zou & C. M. Chan.** *Optimal seismic performance-based design of reinforced concrete buildings using non-linear pushover analysis ; Engineering Structures* 27 (2005), 1289-1302
- [32]: **A.R. Yazdani Motlagh & M. Ala Saddeghvaziri.** *Nonlinear response of stiffening SDOF systems; Engineering Structures* 23 (2001), 1269-1280
- [33]: **M. Intel & H. B. Ozmen.** *Effects of plastic hinge properties in nonlinear analysis of reinforced concrete buildings; Engineering Structures* 28 (2006), 1494-1502

- [34] : **P. Mouroux & C. Negulescu.** *Comparaison pratique entre les méthodes en déplacement de l'ATC-40 (en amortissement) et de l'Eurocode 8 (en ductilité); 7^{ème} Colloque National AFPS, 2007*
- [35]: **A. Kaddid & A. Boumekkik.** *A Pushover Analysis of reinforced Concrete Frame Structures; Asian journal of civil engineering, Vol. 9, N. 1 (2008), 75-83*
- [36]: **ICBO. UNIFORM BUILDING CODE.** *International Conference of Building Officials; California, 1994*
- [37] : **FEMA 273.** *NEHRP Guidelines for the Seismic Rehabilitation of Buildings. FEDERAL Emergency Management Agency, 1997*
- [38]: **X. Mittaz & R. Perruzi.** *Prédimensionnement parasismique; TRACÉS, n° 15/16, août 2007*
- [39] : *Calcul des structures hyperstatiques : Cours de RDM, ENTP*
- [40] : *Etude des structures civiles et industrielles, Cours de structures, ENTP*

POSTFACE

Cette postface est rédigée en vue d'apporter plus d'éclaircissements et de précisions quant à la problématique soulevée dans le cadre de ce travail d'une part, et dans le but de répondre aux remarques et recommandations émises lors de la soutenance d'autre part, et qui n'ont pas été pris en compte dans la version finale de ce manuscrit.

Ces remarques peuvent être énumérées comme suit :

1. Quelle que soit l'approche utilisée, FEMA 356 Ou ATC 40, l'aléa sismique régional ou local doit être définie au voisinage du site où l'ouvrage est implanté, et en fonction de son groupe d'usage.
2. Le pré dimensionnement de la structure doit être effectué selon le code en vigueur, même si la procédure FEMA 356 est utilisée pour déterminer la courbe de capacité issue de l'analyse Pushover.
3. La valeur du déplacement cible déterminée selon la FEMA 356 doit être évalué pour chaque niveau de performance désiré. En d'autres termes, si le concepteur souhaite que sa structure satisfasse aux exigences de non effondrement (CP) ou de protection des vies humaines (LS), la valeur δ_t du déplacement cible doit correspondre au niveau de performance désiré. Ce niveau de performance dépendra donc aussi bien de l'aléa sismique local que des objectifs de comportement souhaités.
4. Le choix adopter comme séisme de référence celui d'El-Centro pour entreprendre les différentes simulations n'est justifié que si l'ouvrage possède une fréquence propre incluse dans le contenu fréquentiel du séisme. Au cas échéant, le spectre de réponse issu des RPA99/2003 pourrait être adopté.
5. Il serait souhaitable d'indiquer les zones d'apparition des rotules plastiques ainsi que leurs séquences d'apparition.
6. IL est souhaitable d'avoir une réparation progressive et non uniforme de la rigidité le long de la structure, de telle sorte que les dommages apparaissent en premier lieu dans les niveaux supérieurs avant les niveaux inférieurs. Ceci permettra au cas ou des réparations venaient à être entreprises de déployer moins de matériels pour reprendre les charges verticales.

En tout état de cause, il est vivement recommandé de continuer ce travail dans le cadre d'une thèse de doctorat afin de pouvoir l'inclure dans le cadre des règles parasismiques Algériennes, et de pouvoir répondre aussi et de manière concrète aux objectifs assignés, et qui consistaient à proposer des abaques donnant la rigidité nécessaire aux éléments d'une structure lorsque la surface de plancher est connue pour atteindre un niveau de performance désiré.